JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. V.-A. Le Besgue

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 133-136.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__133_0>

Extrait d'une Lettre adressée à M. V.-A. Le Besgue;

Par M. J. LIOUVILLE.

« . . . Permettez-moi de vous communiquer une formule que je crois nouvelle et qui vous paraîtra peut-être intéressante. Cette formule conduira, je l'espère, à des conséquences utiles dans la théorie des nombres, dont vous vous êtes occupé avec tant de succès.

» Soit m un nombre entier donné, de la forme

$$4l + 1.$$

Posons d'abord, de toutes les manières possibles,

$$m = i^2 + \varpi^2 + 16s^2,$$

i désignant un entier impair et positif, ϖ un entier pair, positif, nul ou négatif, enfin s un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Puis cherchons la somme

$$\text{(A)} \qquad \Sigma(-1)^{s + \frac{i^2-1}{8}} \mathcal{F}(\varpi)$$

relative à tous les systèmes de valeurs (i, ϖ, s) pour lesquelles notre équation a lieu : $\mathcal{F}$ indique ici une fonction algébrique ou numérique quelconque.

» D'un autre côté, faisons aussi, de toutes les manières possibles,

$$m = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8s_1^2,$$

i_1 désignant un entier impair et positif, ϖ_1 un entier pair, positif, nul ou négatif, enfin s_1 un entier indifféremment pair ou impair, positif, nul ou négatif. Puis cherchons, pour tous les systèmes (i_1, ϖ_1, s_1), la somme

$$(\mathrm{B}) \qquad \Sigma(-1)^{s_1} \mathcal{F}(\varpi_1),$$

où la fonction $\mathcal{F}$ est la même que ci-dessus.

» Je dis que les deux sommes (A) et (B), que je désignerai par A et B, sont toujours égales entre elles. En d'autres termes, on a toujours

$$(1) \qquad \Sigma(-1)^{s+\frac{i^2-1}{8}} \mathcal{F}(\varpi) = \Sigma(-1)^{s_1} \mathcal{F}(\varpi_1).$$

» Vérifions ce théorème sur quelques exemples. Prenant d'abord

$$m = 1,$$

nous aurons pour l'équation

$$m = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2$$

une seule solution, savoir

$$i = 1, \quad \varpi = 0, \quad s = 0,$$

et, par suite,

$$\mathrm{A} = \mathcal{F}(0).$$

D'autre part, l'équation

$$m = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8 s_1^2$$

n'a aussi alors qu'une seule solution, savoir

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 0,$$

de laquelle on conclut

$$\mathrm{B} = \mathcal{F}(0);$$

donc A = B, conformément à notre théorème.

» Soit à présent

$$m = 5.$$

L'équation

$$5 = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2$$

aura deux solutions, savoir

$$i = 1, \quad \varpi = 2, \quad s = 0,$$

puis

$$i = 1, \quad \varpi = -2, \quad s = 0,$$

d'où

$$A = \mathfrak{F}(2) + \mathfrak{F}(-2);$$

l'équation

$$5 = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8 s_1^2$$

aura également deux solutions, répondant l'une à

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 2, \quad s_1 = 0,$$

l'autre à

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = -2, \quad s_1 = 0;$$

de là pour B cette valeur

$$\mathfrak{F}(2) + \mathfrak{F}(-2),$$

qui est bien celle même de A.

» Soit, comme troisième exemple,

$$m = 9.$$

L'équation

$$9 = i^2 + \varpi^2 + 16 s^2$$

n'a qu'une seule solution, fournie par

$$i = 3, \quad \varpi = 0, \quad s = 0,$$

d'où

$$A = -\mathfrak{F}(0).$$

Quant à l'équation

$$9 = i_1^2 + \varpi_1^2 + 8s_1^2,$$

elle est vérifiée non-seulement par

$$i_1 = 3, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 0,$$

mais encore par

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = 1,$$

et par

$$i_1 = 1, \quad \varpi_1 = 0, \quad s_1 = -1.$$

De là

$$B = \mathfrak{F}(0) - \mathfrak{F}(0) - \mathfrak{F}(0) = -\mathfrak{F}(0).$$

Donc, cette fois encore, l'équation

$$A = B$$

se trouve exacte. Je ne pousserai pas plus loin ces vérifications faciles. »