JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Mémoire sur les lignes spiriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 9-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__9_0>

MÉMOIRE SUR LES LIGNES SPIRIQUES;

PAR M. DE LA GOURNERIE.

AVANT-PROPOS.

Les lignes spiriques ou sections planes du tore ont anciennement occupé les Géomètres, comme on le voit dans les savantes Notices historiques que MM. Quetelet et Chasles ont données sur ces courbes [*]; mais, jusque dans ces dernières années, on s'était borné à étudier leurs diverses formes. C'est principalement à cet ordre de recherches que se rapporte le Mémoire de M. Pagani couronné par l'Académie de Bruxelles en 1824.

Depuis cette époque, MM. Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Garlin, Cornu, Mannheim et Darboux ont trouvé des théorèmes importants sur les spiriques [**]. Enfin leur théorie a été enrichie des résultats considérables obtenus par MM. Salmon, Moutard, Darboux, Laguerre et Crofton sur les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, car les spiriques sont une variété de ces lignes [***].

---

[*] M. QUETELET, *Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles*, t. V; *Correspondance mathématique*, t. II. — M. CHASLES, *Aperçu historique*, Note I.

[**] M. YVON VILLARCEAU, *Comptes rendus*, 1848, 2e série. — M. SERRET, *Journal de Mathématiques*, 1843. — MM. GARLIN, CORNU, DARBOUX, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1854, 1859, 1861, 1864. — M. MANNHEIM, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860, et *Journal de l'École Polytechnique*, XLe cahier, p. 74.

[***] M. SALMON, *Higher plane curves*, 1852, p. 172. — M. MOUTARD, *Bulletin de la Société Philomathique*, 1860. — M. DARBOUX, *Comptes rendus*, 1er août 1864; *Annales de l'École Normale*, 1865, 1866. — M. LAGUERRE, *Comptes rendus*, 9 janvier 1865. — M. CROFTON, *The London mathematical Society*, 1867. — *Voir* aussi l'*Étude des surfaces algébriques* publiée par M. BERTRAND dans le *Journal des Savants*, 1867.

Je me propose de faire connaître plusieurs propriétés nouvelles des spiriques, et de présenter une classification de ces courbes.

INTRODUCTION.

Cette Introduction se compose de deux Parties. La première comprend la théorie d'une involution spéciale du quatrième ordre qui nous sera fort utile pour la discussion des spiriques. Dans la seconde, j'établis quelques théorèmes relatifs aux anallagmatiques d'un ordre quelconque. Un grand nombre de propriétés de la spirique sont des corollaires de ces théorèmes, et j'ai pensé qu'il convenait de les démontrer tout d'abord sous leur forme la plus générale.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE D'UNE INVOLUTION SPÉCIALE DU QUATRIÈME ORDRE [*].

§ I. — INVOLUTION SUR UNE DROITE.

Définition et détermination des centres d'inversion d'un groupe de quatre points en ligne droite.

1. Dans une involution quadratique, deux points d'un groupe sont réciproques par rapport au cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les points doubles; le point central est le centre d'inversion. D'après cela, il paraît convenable d'appeler *centres d'inversion* d'un groupe de quatre points en ligne droite a_1, a_2, a_3, a_4, les points centraux O′, O″, O‴ des involutions quadratiques des quatre points pris deux à deux des trois manières possibles.

---

[*] Sur les involutions d'ordre quelconque, on peut consulter principalement M. PONCELET, *Traité des Propriétés projectives*, t. II, IVe section. — M. DE JONQUIÈRES, *Annali di Matematica*, 1859. — M. CREMONA, *Comptes rendus*, 24 juin 1861; *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve plane*, 1862. — M. CHASLES, *Comptes rendus*, 18 novembre 1861. — M. SALMON, *Modern higher algebra*, 1866, p. 145.

On a

$$O'a_1 . O'a_2 - O'a_3 . O'a_4 = 0,$$
$$O''a_1 . O''a_3 - O''a_2 . O''a_4 = 0,$$
$$O'''a_1 . O'''a_4 - O'''a_2 . O'''a_3 = 0.$$

En désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 les abscisses des quatre points du groupe, et par λ', λ'', λ''' celles des centres d'inversion, mesurées les unes et les autres à partir d'une origine fixe, on obtient, à l'aide des relations précédentes,

$$(1)\ \lambda' = \frac{x_1 x_2 - x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}, \quad \lambda'' = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_4}{x_1 + x_3 - x_2 - x_4}, \quad \lambda''' = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}.$$

J'appellerai λ l'abscisse de l'un quelconque des centres d'inversion.

2. Nous aurons souvent besoin de connaître les abscisses des centres d'inversion en fonction des coefficients de l'équation du quatrième degré qui a pour racines les abscisses des quatre points du groupe. Pour faire cette détermination, je supposerai d'abord que l'origine est au centre des moyennes distances de ces derniers points; alors l'équation n'a pas de second terme

$$(2) \qquad x^4 + qx^2 + sx + t = 0.$$

Je pose

$$x_1 + x_2 = b, \quad x_3 + x_4 = b',$$
$$x_1 x_2 = c, \quad x_3 x_4 = c'.$$

J'exprime λ' et les coefficients de l'équation (2), en fonction des quantités b, c, b', c'; j'ai alors en supprimant l'accent de λ'

$$\lambda = \frac{c - c'}{b - b'}, \quad 0 = b + b', \quad q = bb' + c + c',$$
$$s = -bc' - b'c, \quad t = cc'.$$

J'élimine d'abord b', puis c', et j'obtiens

$$b = \pm\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}, \quad c = \frac{1}{2}\left(q + b^2 + \frac{s}{b}\right), \quad 4t = \left(q + b^2 + \frac{s}{b}\right)\left(q + b^2 - \frac{s}{b}\right);$$

portant dans la troisième de ces équations la valeur de b et développant, on a successivement

$$4t = \left(q + \frac{s}{2\lambda}\right)^2 - 2\lambda s,$$

$$\lambda^3 + \frac{4t - q^2}{2s}\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda - \frac{s}{8} = 0. \tag{3}$$

b et c étant la somme et le produit des abscisses x_1 et x_2, ces quantités sont données par l'équation

$$x^2 - \sqrt{\frac{s}{2\lambda}}\,x + \frac{1}{2}\left(q + \frac{s}{2\lambda} + \frac{s}{\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}}\right) = 0. \tag{4}$$

L'équation (3) fait connaître les abscisses des centres d'inversion et résout ainsi le problème que je m'étais proposé. J'ai calculé l'équation (4) pour montrer que la fonction (1) conduit à une résolution facile de l'équation du quatrième degré. Je reviendrai sur ce sujet (n^{os} **25-27**).

3. Je vais maintenant examiner le cas où l'origine des abscisses n'est pas au centre des moyennes distances des points du groupe. Au lieu de l'équation (2), nous avons l'équation plus générale

$$x^4 - 4px^3 + qx^2 + sx + t = 0. \tag{5}$$

Je fais disparaître le second terme en posant $x = x_1 + p$:

$$x_1^4 - (6p^2 - q)x_1^2 - (8p^3 - 2pq - s)x_1 - 3p^4 + qp^2 + sp + t = 0.$$

L'origine étant transportée au centre des moyennes distances, je peux appliquer la formule (3); j'obtiens ainsi pour déterminer les abscisses λ_1 des points O′, O″, O‴ l'équation

$$\lambda_1^3 + \frac{48p^4 - 16p^2q - 4sp - 4t + q^2}{2(8p^3 - 2pq - s)}\lambda_1^2 + \left(3p^2 - \frac{q}{2}\right)\lambda_1 + \frac{1}{8}(8p^3 - 2pq - s) = 0.$$

Il faut maintenant revenir à la première origine, et pour cela remplacer λ_1 par $(\lambda - p)$. On trouve, après quelques réductions faciles,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(8p^3 - 2pq - s)\lambda^3 + \left(ps - 2p^2q - 2t + \frac{q^2}{2}\right)\lambda^2 \\ &\qquad + \left(4pt - 2p^2s + \frac{qs}{2}\right)\lambda + \left(\frac{s^2}{8} - 2p^2t\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Propriété fondamentale de l'involution spéciale.

4. Je suppose que l'on veuille déterminer les points d'un groupe dont on connaît les trois centres d'inversion O′, O″, O‴.

En prenant sur la droite une origine fixe, on peut représenter les centres d'inversion et les points du groupe par les équations

$$(7)\qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

$$(5)\qquad x^4 - 4px^3 + qx^2 + sx + t = 0.$$

Les coefficients de la première sont connus, et il s'agit d'obtenir ceux de la seconde.

Les centres d'inversion du groupe (5) sont donnés par l'équation (6); nous devons donc avoir, en désignant par k un coefficient indéterminé,

$$\begin{aligned} &8p^3 - 2pq - s = ka, \\ &ps - 2p^2q - 2t + \frac{q^2}{2} = kb, \\ &4pt - 2p^2s + \frac{qs}{2} = kc, \\ &\frac{s^2}{8} - 2p^2t = kd. \end{aligned}$$

Les cinq inconnues p, q, s, t, k ne sont soumises qu'à quatre équations; nous pouvons donc nous donner une de ces quantités, par exemple l'abscisse p du centre des moyennes distances des points du groupe.

Éliminant k, on obtient

$$4pb + 2c + qa = 0,$$
$$4pc + 8d + sa = 0,$$
$$(8p^3 - 2pq - s)d - \left(\frac{s^2}{8} - 2p^2 t\right) a = 0.$$

On déduit de ces équations

$$q = -\frac{4pb + 2c}{a}, \quad s = -\frac{4pc + 8d}{a}, \quad t = \frac{c^2 - 4bd}{a^2} - \frac{4pd}{a}.$$

L'équation du groupe cherché est par conséquent

$$(8) \quad ax^4 - 2cx^2 - 8dx + \frac{c^2 - 4bd}{a} - 4p(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0.$$

5. p est un coefficient arbitraire; en conséquence, et d'après la forme de l'équation, nous voyons qu'*il y a une infinité de groupes de quatre points dont trois points donnés sont les centres d'inversion, et que ces groupes forment une involution.*

En général, dans une involution du quatrième ordre les centres d'inversion varient pour les différents groupes; mais, d'après ce que nous venons de reconnaître, *quand deux groupes de quatre points ont leurs centres d'inversion communs, tous les groupes de l'involution qu'ils déterminent ont lès mêmes centres d'inversion.*

Les centres d'inversion forment avec le point de l'infini un des groupes de l'involution. Comme d'ailleurs on peut les construire quand un des autres groupes est connu, *l'involution spéciale* que je considère *est déterminée par un seul groupe de quatre points.* Ainsi, eu égard à l'équation (3), l'involution qui comprend le groupe (2) est représentée par l'équation

$$(9) \quad x^4 + qx^2 + sx + t - 4p\left(x^3 + \frac{4t - q^2}{2s} x^2 - \frac{q}{2} x - \frac{s}{8}\right) = 0.$$

Détermination des points d'un groupe de l'involution spéciale quand on connaît l'un d'eux, ou le centre de leurs moyennes distances. — Involutions composantes.

6. Je considère les trois involutions quadratiques qui ont pour points centraux O', O'', O''', et auxquels appartiennent respectivement les trois couples O'' et O''', O''' et O', O' et O''. Ces involutions sont complétement déterminées.

Je prends arbitrairement un point a_1 sur la droite, et je construis les points a_2, a_3, a_4 qui lui sont conjugués dans les trois involutions. On a

$$O'a_1 . O'a_2 = O'O''.O'O''',$$
$$O''a_1 . O''a_3 = O''O'''.O''O',$$
$$O'''a_1 . O'''a_4 = O'''O'.O'''O''.$$

Les deux dernières égalités peuvent être écrites comme il suit :

$$O''a_1 (O'a_3 - O'O'') = - O'O''.O''O''',$$
$$(O''a_1 - O''O''')(O'a_4 - O'O''') = O'O'''.O''O'''.$$

Éliminant $O''a_1$ entre ces relations, j'obtiens

$$O'a_3 . O'a_4 = O'O''.O'O'''.$$

Cette équation montre que les points a_3 et a_4 sont conjugués dans la première involution.

On reconnaît de la même manière que a_2 et a_4, a_2 et a_3 sont respectivement conjugués dans les deuxième et troisième involutions; d'où il suit qu'un quelconque des points a_1, a_2, a_3, a_4 est conjugué des trois autres dans les trois involutions quadratiques, et que leurs centres d'inversion sont O', O'', O'''. Nous avons ainsi un moyen très-simple de déterminer les trois points qui sont conjugués à un point donné dans une involution spéciale du quatrième ordre dont on connaît les centres d'inversion.

J'appellerai *involutions composantes* les involutions quadratiques qui viennent d'être définies. En considérant l'une d'elles, je dirai que deux couples de points, ou deux segments, sont *conjugués*, lorsqu'ils appartiennent à un même groupe de l'involution du quatrième ordre. Les segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$ sont conjugués dans la première involution composante.

7. Je désigne les points doubles des trois involutions composantes par e' et f', e'' et f'', e''' et f'''.

O″ et O‴ forment un couple de la première involution, et sont par conséquent conjugués harmoniques des points e' et f'. Il suffit donc pour avoir ces derniers points de construire le segment qui a son milieu en O′, et qui est conjugué harmonique de O″O‴.

On obtient de la même manière les points doubles de la seconde involution, et ceux de la troisième.

8. Je suppose maintenant que l'on connaisse les trois centres d'inversion, et le centre G des moyennes distances des points qui composent un groupe, et je vais me proposer de déterminer ces points.

En prenant le centre G pour origine, les points du groupe et les centres d'inversion peuvent être représentés par les équations (2) et (3). Je conserverai toutes les notations du n° **1**.

Je rapporte les points du groupe à l'une des involutions composantes, à la première; ils y déterminent deux segments conjugués $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$, dont les milieux a_{12} et a_{34} sont situés de part et d'autre, et à égales distances du centre G.

En vertu de l'équation (4) nous aurons

$$Ga_1 + Ga_2 = -\sqrt{\frac{s}{2\lambda}},\quad Ga_3 + Ga_4 = +\sqrt{\frac{s}{2\lambda}};$$
$$-Ga_{12} = +Ga_{34} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{2\lambda}}.$$

λ', λ'', λ''' étant les abscisses des centres d'inversion, leur produit est de signe contraire et égal au dernier terme de l'équation (3) :

$$s = 8\lambda'\lambda''\lambda'''.$$

La quantité λ sous le radical est la première de ces abscisses, c'est-à-dire λ'; l'expression trouvée devient en conséquence

$$(10) \qquad -\mathrm{G}a_{12} = +\mathrm{G}a_{34} = \sqrt{\mathrm{GO}''.\mathrm{GO}'''}.$$

Il résulte de cette équation que *les milieux* a_{12} *et* a_{34} *sont conjugués harmoniques des points* O' *et* O''. Comme d'ailleurs on connaît le milieu G du segment $a_{12}a_{34}$, on peut facilement construire ses extrémités.

Le segment $a_1 a_2$ appartenant à la première involution composante est conjugué harmonique du segment $e'f'$. Nous avons son milieu a_{12}, nous pouvons donc le déterminer. On opère de la même manière pour les points a_3 et a_4.

9. D'après ce que nous venons de voir, les segments analogues à $a_{12}a_{34}$, pour les différents groupes de l'involution spéciale, sont conjugués harmoniques de O''O'''; ils forment, par suite, une involution quadratique dont O'' et O''' sont les points doubles.

Dans l'une quelconque des trois involutions composantes, les milieux des segments conjugués forment une involution quadratique dont les points doubles sont les points centraux des deux autres involutions composantes.

Points doubles de l'involution spéciale.

10. En appliquant la construction exposée au n° **8**, on trouve immédiatement que le groupe dont le centre des moyennes distances coïncide avec le point O', se compose des deux points doubles e' et f'. De même les couples de points doubles e'' et f'', e''' et f''' forment chacun un groupe de l'involution du quatrième ordre.

D'après un théorème dû à M. de Jonquières, une involution de l'ordre n possède $2(n-1)$ points doubles. Une involution du quatrième ordre a par conséquent six points doubles. *Dans l'involution spéciale du quatrième ordre les six points doubles sont réunis deux par deux en trois groupes, et coïncident avec les points doubles des involutions composantes.*

Le point e' est conjugué avec lui-même dans la première des trois involutions, et avec le point f' dans les deux autres; il en résulte que les points e' et f' sont conjugués harmoniques des couples de points doubles e'' et f'', e''' et f'''.

Les six points doubles de l'involution spéciale du quatrième ordre forment trois couples de points conjugués harmoniques.

11. Il est important de savoir si une involution du quatrième ordre dans laquelle les six points doubles sont réunis deux à deux en trois groupes, est une involution spéciale telle que je l'ai définie aux nos **4** et **5**.

Cette question peut être résolue assez facilement par des considérations sur le nombre des conditions qui déterminent soit une involution spéciale, soit une involution ayant ses points doubles répartis en trois groupes. Mais, pour rendre le raisonnement rigoureux, il serait nécessaire d'entrer dans des détails un peu minutieux, et je préfère examiner directement le problème en comparant les équations.

12. Je considère une involution du quatrième ordre déterminée par deux groupes composés de points doubles, et je vais chercher la condition pour qu'elle possède un troisième groupe également formé de points doubles.

En plaçant l'origine au milieu du segment compris entre les deux points de l'un des deux groupes donnés, l'involution peut être représentée par l'équation

$$(a) \qquad (x^2 + fx + g^2)^2 + k(x^2 + g'^2)^2 = 0.$$

Pour que l'involution ait un troisième groupe formé des deux points doubles, il faut qu'une valeur de k autre que zéro et l'infini rende cette équation un carré parfait tel que

$$(b) \qquad x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta^2)x^2 + 2\alpha\beta^2 x + \beta^4 = 0.$$

Égalant les coefficients des différents termes dans les deux équations (a) et (b), j'ai

$$(c) \qquad \begin{cases} \alpha(1+k) = f, \\ (\alpha^2 + 2\beta^2)(1+k) = f^2 + 2g^2 + 2kg'^2, \\ \alpha\beta^2(1+k) = fg^2, \\ \beta^4(1+k) = g^4 + kg'^4. \end{cases}$$

On obtient par l'élimination de α et de β^2

$$(d) \qquad 1 + k = \frac{f^2}{2(g^2 - g'^2)}, \quad g^4 - g'^4 = 0.$$

La seconde de ces équations donne la condition pour qu'il y ait un troisième groupe composé de deux points doubles; la première fait connaître la valeur de k qui détermine ce groupe.

On satisfait à l'équation de condition en faisant g'^2 égal à $+ g^2$ ou à $- g^2$. Lorsque g'^2 est égal à $+ g^2$, k est infini, et le troisième groupe coïncide avec un des deux premiers; à moins toutefois que f ne soit nul, auquel cas ce sont les deux groupes donnés qui se confondent. Si l'on suppose que g'^2 est égal à $- g^2$, c'est-à-dire si les deux groupes donnés sont harmoniques [*], on aura

$$1 + k = \frac{f^2}{4g^2}.$$

Cette expression de $(1 + k)$ introduite dans la première et la troisième des relations (c) donne les valeurs de α et de β^2 qui déterminent le troisième groupe. L'équation (b) devient alors

$$\left(x^2 + \frac{4g^2}{f} x + g^2\right)^2 = 0.$$

Les trois couples de points doubles sont conjugués harmoniques.

Lorsqu'une involution du quatrième ordre possède deux groupes composés chacun de deux points doubles, si ces points sont conjugués harmoniques, l'involution comprend un troisième groupe formé de points doubles; s'ils ne sont pas conjugués harmoniques, les deux derniers points doubles de l'involution appartiennent à des groupes distincts.

---

[*] Deux couples de points représentés par les équations

$$x^2 + fx + g^2 = 0, \quad x^2 + g'x + g'^2 = 0,$$

sont conjugués harmoniques lorsque l'on a

$$g^2 + g'^2 = \frac{ff'}{2}.$$

(*Géométrie supérieure*, p. 45.)

13. Les abscisses des milieux des segments formés par les trois couples de points doubles sont

$$-\frac{f}{2}, \quad 0, \quad -\frac{2g^2}{f}.$$

Il est facile, à l'aide de la formule (8), de déterminer l'involution spéciale qui a ces trois points milieux pour centres d'inversion. On trouve

$$x^4 - 2g^2x^2 + g^4 - 4p\left(x^3 + \frac{f^2+4g^2}{2f}x^2 + g^2x\right) = 0.$$

Cette équation représente précisément la même involution que l'équation (a) lorsqu'on y a fait g'^2 égal à $(-g^2)$. La relation qui existe entre les coefficients arbitraires k et p, est

$$2p(1+k) = -f.$$

Quand une involution du quatrième ordre a trois groupes composés de points doubles, tous ses groupes ont pour centres d'inversion les milieux des segments compris par les trois couples de points doubles.

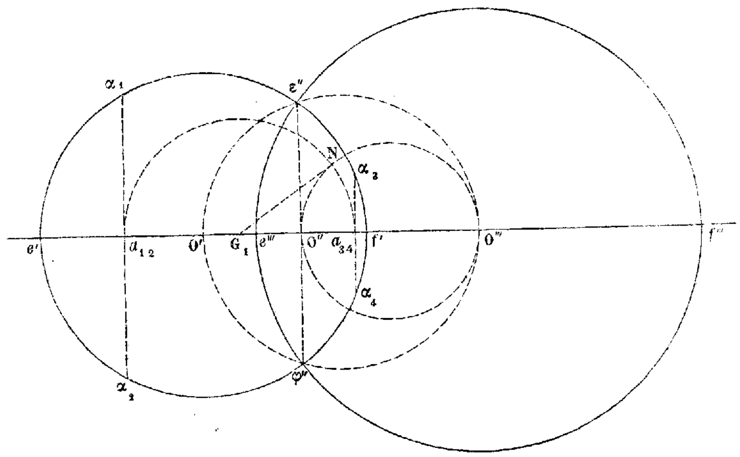
14. Nous savons qu'un groupe est déterminé par la position du centre des moyennes distances des points qui le composent, et que quand ce centre coïncide avec un des centres d'inversion, le groupe se réduit aux deux points doubles correspondants. Comme d'ailleurs dans la série des groupes chaque point double est la transition de deux points réels à un couple de points imaginaires, on voit que lorsque le centre des moyennes distances supposé mobile sur la droite passe par un centre d'inversion, si les points doubles sont réels, les points réels des groupes deviennent imaginaires, tandis que les points imaginaires sont remplacés par des points réels.

Discussion de l'involution spéciale.

15. *Cas où les centres d'inversion sont tous réels, distincts, et à distance finie.* — 1° Je suppose les points O′, O″, O‴ placés dans l'ordre où je les désigne.

Je décris un cercle sur O′O‴ comme diamètre, et j'élève en O″ une perpendiculaire à l'axe O′O″O‴. Cette droite rencontre le cercle en deux points ε'' et φ''.

Fig. 1.



Si l'on fait passer par ε'' et φ'' une série de cercles, leurs intersections avec l'axe formeront une involution quadratique ayant son point central en O″. Cette involution est la seconde des involutions composantes, car les points O′ et O‴ en forment un couple.

Les points e' et f' d'une part, e''' et f''' de l'autre, appartiennent à cette involution, parce qu'ils sont conjugués harmoniques de e'' et f'' (n° **10**); les segments qu'ils déterminent ont leurs milieux aux points O′ et O‴ : ces points sont donc les intersections de l'axe avec les cercles qui passent par les points ε'' et φ'', et qui ont respectivement pour centres les points O′ et O‴. Les deux cercles se coupent à angle droit.

2° Le groupe dont le centre G des moyennes distances est en O″, se compose des deux points doubles imaginaires e'' et f''. Si le centre G quitte le point O″ et s'avance vers la gauche, les points du groupe se séparent, mais ils ne peuvent devenir réels tant que le point G n'a pas atteint le point O′ (n° **14**) : à ce moment, le groupe se compose des points doubles réels e' et f'. Si le point G va de O′ à l'infini, l'un des points qui étaient en e' s'éloigne aussi à l'infini, l'autre se transporte en O′, et les deux qui étaient en f' se rendent l'un en O″, l'autre en O‴. Lorsque le centre G vient de l'infini en O‴, le point qui se trouvait à l'infini, et celui qui coïncidait avec O‴, se rejoignent en f'''; les deux autres vont en e'''. Enfin quand le centre G dépasse O‴, les points deviennent imaginaires.

Quand les trois centres d'inversion sont réels et distincts, les quatre points d'un groupe sont tous imaginaires ou tous réels, suivant que le centre de leurs moyennes distances est sur le segment de l'axe compris entre les centres d'inversion extrêmes, ou en dehors de ce segment.

3° Arrêtons-nous quelques instants au cas où les points du groupe sont imaginaires. Le centre des moyennes distances est alors entre O′ et O‴. Je le suppose au point G_1 sur le segment O′O″.

Je rapporte à la première involution composante les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 du groupe considéré. Alors pour déterminer les milieux a_{12} et a_{34} des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$, j'ai l'équation (n° **8**)

$$-G_1 a_{12} = +G_1 a_{34} = \sqrt{G_1 O''.G_1 O'''}.$$

Je trace un cercle sur O″O‴ comme diamètre; je lui mène la tangente $G_1 N$, et je décris le demi-cercle $a_{12} N a_{34}$ dont le centre est en G_1. Le point G_1 étant placé entre O″ et O‴, la construction est possible; elle donne les points a_{12} et a_{34} situés sur le segment $e'f'$.

Nous avons

$$O'a_1 + O'a_2 = 2O'a_{12}, \quad O'a_1.O'a_2 = \overline{O'e}^2.$$

$O'a_1$ et $O'a_2$ sont donc les racines de l'équation

$$x^2 - 2O'a_{12}x + \overline{O'e}^2 = 0,$$

d'où

$$O'a_1 = O'a_{12} + \sqrt{\overline{O'e'}^2 - \overline{O'a_{12}}^2}\sqrt{-1},$$
$$O'a_2 = O'a_{12} - \sqrt{\overline{O'e'}^2 - \overline{O'a_{12}}^2}\sqrt{-1}.$$

Si nous considérons $\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité, ces valeurs détermineront les points α_1 et α_2 du cercle $e'f'$. En raisonnant de la même manière sur a_{34}, on trouve les points α_3 et α_4. Je dirai que les quatre points α_1, α_2, α_3, α_4 sont *figuratifs* des points imaginaires qui composent le groupe. On peut regarder les points réels sur l'axe comme ayant des figuratifs qui coïncident avec eux.

4° Quand le centre G est en O', les points du groupe sont réunis à leurs figuratifs en e' et en f'. Si le point G avance de O' en O'', les points du groupe deviennent imaginaires, leurs points figuratifs parcourent le cercle $e'f'$, et finissent par se rejoindre deux à deux en ε'' et en φ''. Le centre G continuant à se mouvoir de O'' en O''', les points figuratifs se séparent, et décrivent le cercle $e'''f'''$: deux d'entre eux vont en e''', et les autres en f'''.

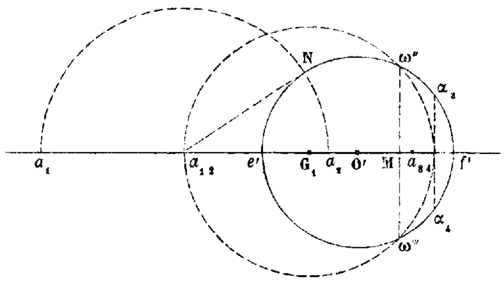
Les points ε'' et φ'' sont les figuratifs des points doubles imaginaires e'' et f'' de la seconde involution composante [*].

Chacun des cercles $e'f'$ et $e'''f'''$ doit être considéré comme orthogonal au cercle imaginaire décrit sur $e''f''$ comme diamètre, car le carré de la distance des centres est égal à la somme des carrés des rayons. Ainsi on a

$$\overline{O'O''}^2 = \overline{O'\varepsilon''}^2 + \left(-\overline{O''\varepsilon''}^2\right).$$

16. *Cas où deux des centres d'inversion sont imaginaires.* — 1° Soient O' le point central réel, ω'' et ω''' les points figuratifs des centres d'inversion imaginaires O'' et O'''.

Fig. 2.



Pour déterminer les points doubles e' et f' de la première involution

[*] M. Transon a déjà remarqué que les deux points d'où l'on voit sous des angles égaux et formés dans le même sens, les segments compris entre les points homologues de deux divisions homographiques sur une même droite, sont donnés par l'expression analytique des abscisses des points doubles, lorsque l'on y considère $\sqrt{-1}$ comme un signe de perpendicularité. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868, p. 258.)

composante, nous avons l'équation

$$\overline{O'e'}^2 = \overline{O'f'}^2 = O'O''.O'O'' = (O'M + M\omega''\sqrt{-1})(O'M - M\omega''\sqrt{-1});$$

d'où

$$-O'e' = +O'f' = O'\omega''.$$

Je décris un cercle du point O' comme centre avec $O'\omega''$ pour rayon; ses intersections avec la droite sont les points doubles e' et f' de la première involution composante.

2° Je suppose maintenant qu'on veuille déterminer les quatre points a_1, a_2, a_3, a_4 d'un groupe dont le centre des moyennes distances G_1 est connu. Je rapporte les points à la première involution composante, et je vais chercher par la méthode expliquée au n° **8** les milieux a_{12} et a_{34} des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$.

On a immédiatement

$$\overline{G_1 a_{12}}^2 = \overline{G_1 a_{34}}^2 = G_1 O''.G_1 O''' = \overline{G_1 \omega''}^2.$$

Le cercle décrit du point G_1 comme centre avec $G_1\omega''$ pour rayon détermine les points a_{12} et a_{34}. Quelle que soit la position G_1 du centre G, l'un de ces points est sur le segment $e'f'$, et l'autre en dehors.

Les segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$ sont conjugués harmoniques de $e'f'$, et ont respectivement pour milieu a_{12} et a_{34}. On construit le premier sans difficulté, puis, raisonnant comme au n° **15**, 3°, on trouve que a_3 et a_4 sont imaginaires, et que leurs figuratifs α_3 et α_4 se trouvent aux intersections du cercle $e'f'$ avec la perpendiculaire élevée à l'axe par le point a_{34}.

Chacun des groupes contient deux points réels et deux points imaginaires.

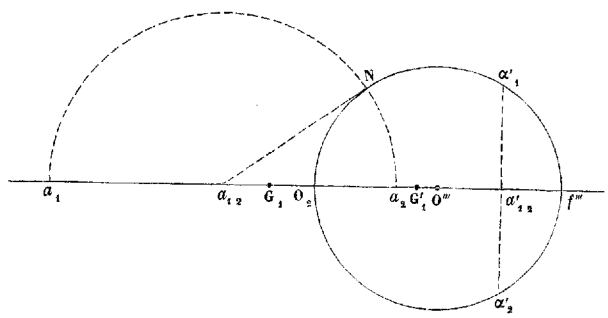
3° Quand le centre G parcourt la droite, les points réels la parcourent également, et les points figuratifs des points imaginaires se meuvent sur le cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les deux points doubles réels de l'involution. Le groupe se compose de ces points lorsque le centre G est en O'. Si le centre G se rend à l'infini, en décrivant la partie de la droite sur laquelle est le point e', les deux points qui étaient en e' se séparent et restent réels; ils vont l'un à l'infini, et l'autre en O'. Les deux points qui se trouvaient en f' deviennent imaginaires; leurs figuratifs décrivent les arcs $f'\omega''$, $f'\omega'''$.

Lorsque le point G revient de l'infini en O' par le côté où se trouve le point f', les points réels parcourent les segments $\infty f'$ et $O'f'$, tandis que les points figuratifs des imaginaires se rendent en e' par les arcs $\omega''e'$ et $\omega'''e'$.

17. 1° *Cas où deux des centres d'inversion coïncident.* — L'involution n'a en réalité que deux centres d'inversion, l'un double O_2, l'autre simple O'''. On trouve immédiatement que les points doubles des deux premières involutions composantes, et l'un de ceux de la troisième, sont en O_2, et que le second point double f''' de cette dernière est placé à une distance de O''' égale à O_2O''', de manière que le point O''' se trouve au milieu du segment O_2f'''.

Considérons sur la droite un point quelconque a_1 : ses conjugués sont un point a_2 dans la troisième des involutions composantes, et le point O_2 dans les deux premières. *L'involution du quatrième ordre se réduit donc à une involution quadratique, à chacun des groupes de laquelle on ajoute un de ses points doubles qui compte pour deux.* Un groupe particulier est formé de ce seul point pris quatre fois.

Fig. 3.



2° Si l'on donne le centre G des moyennes distances des points a_1, a_2, O_2 et O_2 d'un groupe, on aura immédiatement le milieu a_{12} du segment a_1a_2.

Lorsque le centre G se meut sur la droite, tant qu'il n'est pas entre les points O_2 et O''', le point a_{12} est en dehors du segment O_2f''', et les points a_1 et a_2 sont réels. Mais quand G va de O_2 en f''', a_{12} parcourt le segment O_2f''', les points a_1 et a_2 sont imaginaires, et leurs points figuratifs α_1 et α_2 décrivent le cercle qui a pour diamètre O_2f'''.

18. *Cas où les trois centres d'inversion sont réunis en un seul.* — Lorsque les centres d'inversion coïncident en un point O_3, les points doubles des involutions composantes sont en O_3, et on forme un groupe de l'involution du quatrième ordre, en associant un point quelconque de la droite, au point O_3 pris trois fois. Le groupe ne contient jamais de points imaginaires, quelle que soit la position du centre G.

19. *Cas où deux des centres d'inversion sont distincts (réels ou imaginaires), et où le troisième est à l'infini.* — Soit O''' le point à l'infini. On trouve immédiatement que les points doubles e', f', e'', f'' coïncident à l'infini. Les points e''', f''' sont conjugués harmoniques de $e'f'$, et puisque ces derniers sont réunis, un des premiers f''' est confondu avec eux à l'infini. Comme d'ailleurs les points e''', f''' sont aussi conjugués harmoniques de O', O'', le point e''' est au milieu du segment compris entre ces deux centres d'inversion.

D'après cela, si nous prenons arbitrairement un point a_1, ses conjugués a_2 et a_3 dans les deux premières involutions composantes seront à l'infini, et son conjugué a_4, dans la troisième, se trouvera de l'autre côté de e''' et à la même distance. En résumé, *chaque groupe comprend deux points à l'infini, et deux autres réels ou imaginaires dont le milieu est e'''. Le centre* G *des moyennes distances est fixe à l'infini.*

20. *Cas où deux des centres d'inversion coïncident et où le troisième est à l'infini.* — Prenons arbitrairement les abscisses x_1 et x_2 de deux points d'un groupe, et déterminons les abscisses x_3 et x_4 des deux autres par les relations

$$x_1 + x_4 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0.$$

Les équations (1) donnent

$$\lambda' = \lambda'' = 0, \quad \lambda''' = \infty.$$

Nous voyons que *quand deux des centres d'inversion coïncident, et que le troisième est à l'infini, on peut composer un groupe en associant à deux points choisis arbitrairement ceux qui leur sont symétriques par rapport au centre d'inversion double*. Dans ce cas, il n'y a plus d'involution.

Propriétés d'un groupe de points figuratifs.

21. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points d'un groupe d'une involution spéciale et x_1, x_2, x_3, x_4 leurs abscisses. Si les deux premiers sont imaginaires conjugués, et les deux derniers également imaginaires conjugués, les coordonnées de leurs points figuratifs seront

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y' = \pm \frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{-1};$$

$$x'' = \frac{x_3 + x_4}{2}, \quad y'' = \pm \frac{x_3 - x_4}{2}\sqrt{-1}.$$

On a immédiatement

$$x'^2 + y'^2 = x_1 x_2, \quad x''^2 + y''^2 = x_3 x_4.$$

Je place l'origine au point central O′ de l'involution composante dans laquelle a_1 et a_2, a_3 et a_4 sont deux couples de points conjugués. Les quantités $x_1 x_2$ et $x_3 x_4$ sont alors égales entre elles et au carré du rayon du cercle qui a pour diamètre le segment $e'f'$ compris entre les points doubles de l'involution composante dont le point central est O′. Les quatre points figuratifs se trouvent donc sur ce cercle, ainsi que nous l'avons reconnu au nº **15**, 3°.

22. La droite qui passe par les deux points (x', y') et (x'', y'') rencontre l'axe O′O″O‴ en un point dont l'abscisse est

$$x = \frac{x'y'' - y'x''}{y'' - y'}.$$

En portant dans cette expression les valeurs ci-dessus de x', y', x'' et y'', on trouve, suivant qu'on adopte pour y' et y'' des signes différents ou le même signe,

$$x = \frac{x_1 x_3 - x_2 x_4}{x_1 + x_3 - x_2 - x_4}, \quad x = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_4 - x_2 - x_3}.$$

Ces abscisses déterminent les points O″ et O‴ (nº **1**). Ainsi les droites $\alpha_1 \alpha_4$ et $\alpha_2 \alpha_3$ (*fig.* 1) se croisent en O″; les droites $\alpha_1 \alpha_3$ et $\alpha_2 \alpha_4$ se rencontrent en O‴.

23. Les trois cercles $e'f'$, $e''f''$ et $e'''f'''$ étant rectangulaires (nº **15**), deux points de l'un d'eux situés sur une droite passant par le centre d'un des deux autres sont réciproques par rapport à ce dernier. En conséquence, et d'après la proposition du numéro précédent, les points α_1, α_2, α_3, α_4 (*fig.* 1) sont deux à deux réciproques par rapport aux cercles $e''f''$ et $e'''f'''$, de telle sorte que l'on a

$$O''\alpha_1 . O''\alpha_4 = \overline{O''e''}^2 = -\overline{O''\varepsilon''}^2,$$

$$O'''\alpha_1 . O'''\alpha_3 = \overline{O'''e'''}^2.$$

24. On peut résumer comme il suit les propositions établies dans ce paragraphe.

Dans une involution spéciale du quatrième ordre, lorsque les points d'un groupe deviennent imaginaires, leurs points figuratifs sont sur le cercle qui a pour diamètre le segment compris entre les points doubles de l'involution composante à laquelle appartiennent les deux couples de points conjugués imaginaires qui constituent le groupe. Ces points figuratifs sont réciproques deux à deux par rapport aux cercles qui ont respectivement pour diamètre les segments compris entre les points doubles des deux autres involutions composantes.

J'appellerai ces cercles *cercles d'inversion.*

On conclut de ce qui précède et par les propriétés des quadrilatères, que *les deux points de l'axe sur lesquels se projettent les quatre points d'un groupe appartenant au cercle d'inversion* O′, *sont conjugués harmoniques des points* O″ *et* O‴. Cette proposition peut être déduite immédiatement du théorème du nº **9**.

J'appellerai *involution spéciale complète* l'involution spéciale dans laquelle on considère, outre les points réels, les points figuratifs des points imaginaires des groupes, pour toutes les positions du centre des moyennes distances.

Le groupe α_1, α_2, α_3, α_4 (*fig.* 1) appartient à l'involution spéciale complète déterminée par les centres d'inversion O', O'', O'''.

Application de l'involution spéciale à la résolution de l'équation du quatrième degré.

25. Les formules relatives à l'involution spéciale peuvent servir à résoudre l'équation générale du quatrième degré : il suffit de considérer cette équation comme représentant un groupe de quatre points. En choisissant une des racines de l'équation du troisième degré qui fait connaître les abscisses des centres d'inversion, on détermine celle des involutions composantes à laquelle on veut rapporter les points du groupe; ils y forment deux couples conjugués et dépendent par conséquent de deux équations du second degré dont les coefficients sont faciles à déterminer.

Les formules sont simples quand on a eu le soin de faire disparaître le second terme de l'équation. Je les ai données dès le commencement de ce travail, au n° **2**.

Les calculs auxquels on est conduit sont analogues à ceux des méthodes adoptées pour la résolution de l'équation du quatrième degré; mais les équations ont une signification géométrique bien déterminée, et les singularités qu'elles présenteraient dans diverses questions pourraient indiquer des théorèmes intéressants.

26. Il est facile d'appliquer à l'équation du quatrième degré les résultats géométriques que j'ai obtenus dans le paragraphe précédent. Les énoncés qui suivent s'appliquent à l'équation (2) dont le second terme est nul, et à la résolvante (3).

Quand les racines de la résolvante sont réelles et distinctes, suivant qu'elles ont ou qu'elles n'ont pas toutes les trois le même signe, les racines de la proposée sont toutes réelles ou toutes imaginaires, et d'ailleurs inégales (n° **15**).

Lorsque deux racines de la résolvante sont imaginaires, deux des racines de la proposée sont imaginaires et les deux autres réelles (n° **16**).

Quand la résolvante a une racine double, cette même racine est double dans la proposée; les deux autres racines de la proposée sont réelles ou imaginaires, suivant que la racine simple de la résolvante est ou non de même signe que la racine double (n° **17**).

Si la résolvante a une racine triple, la proposée possède cette même racine triple (n° **18**).

Lorsque le coefficient s est nul, deux des racines de la résolvante sont nulles et la troisième infinie. Les formules deviennent illusoires, mais l'équation proposée ne contenant l'inconnue qu'à des puissances paires, sa résolution ne présente aucune difficulté.

27. On peut modifier l'équation (4) de manière à avoir les racines de la proposée en fonction des abscisses des trois centres d'inversion. En vertu de l'équation (3), j'ai

$$s = 8\lambda'\lambda''\lambda''', \quad q = -2(\lambda'\lambda'' + \lambda''\lambda''' + \lambda'''\lambda').$$

Je porte ces valeurs dans l'équation (4), et, résolvant, je trouve

$$x = \sqrt{\lambda''\lambda'''} \pm \sqrt{\lambda'(\lambda'' + \lambda''') - 2\lambda'\sqrt{\lambda''\lambda'''}}. \tag{11}$$

Les deux points que l'on obtient en donnant successivement les deux signes au grand radical et un seul au petit sont conjugués dans l'involution dont le point central a pour abscisse λ'.

Cette formule nous sera utile.

§ II. — Involution sur un cercle.

28. On reporte sur une conique une involution rectiligne en prenant pour projetantes des droites qui divergent d'un point de cette courbe. Quand la conique est un cercle, on peut représenter l'involution par une équation analogue à l'équation générale des involutions rectilignes, mais dans laquelle la tangente de la moitié de l'angle au centre remplace l'abscisse inconnue.

Les involutions circulaires sont utiles dans diverses questions, notamment dans celles où l'on est conduit à transformer par rayons vecteurs réciproques une figure sur laquelle se trouve une involution rectiligne.

Involution quadratique circulaire.

29. On obtient avec la plus grande facilité les résultats suivants :

1° *Dans une involution quadratique circulaire, les points conjugués sont situés sur des droites qui divergent d'un point fixe* P. J'appellerai ces lignes *rayons d'involution. Les points doubles sont ceux où la tangente du cercle est un rayon d'involution. Le produit des distances de* P *à deux points conjugués est constant, et par suite le point* P *est un centre d'inversion.*

2° *Une série de cercles passant par deux points* M *et* N *déterminent sur un cercle fixe une involution quadratique. Le centre d'inversion* P *est sur la droite* MN.

3° *Si l'on transforme* (*) *un cercle* C *portant une involution quadratique, on obtient un cercle* C_1 *ayant une involution du même genre. Les centres d'inversion* P *et* P_1 *sont en ligne droite avec le pôle* Ω *de la transformation.*

Involution quadratique circulaire complète.

30. On peut facilement déterminer les points figuratifs des points conjugués imaginaires dans une involution quadratique circulaire.

Soit C le cercle qui porte l'involution, P son centre, R la longueur de son rayon, P′ le point de convergence, e et f les points doubles. La droite menée par P′ et faisant avec P′P un angle ω coupe le cercle en deux points conjugués a_1 et a_2. On a

$$P'a_1 = P'P\cos\omega \pm \sqrt{R^2 - \overline{P'P}^2\sin^2\omega}.$$

Si le rayon d'involution déterminé par l'azimut ω ne coupe pas le cercle C, la quantité soumise au radical est négative. Je porte alors la

(*) Toutes les transformations dont il est ici question sont *par rayons vecteurs réciproques*.

longueur donnée par ce radical sur la droite H perpendiculaire au rayon d'involution et passant par le milieu a_{12} du segment imaginaire $a_1 a_2$. La ligne H fait avec PP' un angle complémentaire de ω. Appelant α_1 et α_2 les points figuratifs des conjugués imaginaires a_1 et a_2, on a

$$P\alpha_1 = PP' \sin\omega \pm \sqrt{\overline{PP'}^2 \sin^2\omega - R^2}.$$

Cette équation montre que le lieu des points α_1 est un cercle C' qui a son centre en P', et qui coupe orthogonalement le cercle C aux points e et f. La droite $\alpha_1 \alpha_2$ passe par le point P.

Quand deux cercles se coupent à angle droit, les involutions quadratiques déterminées sur eux par les rayons issus réciproquement de leurs centres sont telles, que dans chacune d'elles les points conjugués réels sont figuratifs des points conjugués imaginaires de l'autre. Les deux involutions ont les mêmes points doubles. Je dirai qu'elles sont *complémentaires figuratives*, et qu'elles forment une *involution quadratique circulaire complète.*

31. *La transformation des cercles* C *et* C' *donne deux autres cercles rectangulaires* C_1 *et* C'_1*; les couples de points des involutions formées sur chacun d'eux par les rayons divergeant du centre de l'autre correspondent aux couples de points des involutions des premiers cercles.*

Si le pôle de transformation était sur C*, le cercle réciproque* C_1 *se réduirait à une droite portant une involution quadratique, et* C'_1 *serait un cercle ayant pour diamètre le segment compris entre les points doubles.*

Involution circulaire spéciale du quatrième ordre.

32. Quatre points sur un cercle peuvent être considérés comme les sommets d'un quadrilatère : je dirai que les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales de ce quadrilatère, sont les *trois centres d'inversion* relatifs au groupe des quatre points donnés.

1° *En général, dans une involution circulaire du quatrième ordre les centres d'inversion varient pour les différents groupes; mais si deux groupes ont les mêmes centres d'inversion, ces points sont les* *centres d'inversion pour tous les groupes, et l'involution comprend tous les groupes dont ces points sont les centres d'inversion.*

J'appellerai cette involution *circulaire spéciale;* les trois involutions quadratiques qui correspondent aux centres d'inversion seront les involutions composantes.

2° *Les trois centres d'inversion d'une involution circulaire spéciale sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle qui porte l'involution.*

3° *Dans une involution circulaire spéciale, il existe trois groupes composés chacun de deux points doubles. Réciproquement, quand les six points doubles que possède une involution circulaire du quatrième ordre sont répartis deux à deux en trois groupes, l'involution est du genre de celles que j'appelle* spéciales.

4° *Les droites dirigées d'un point quelconque du cercle aux points doubles de deux des involutions composantes, forment un faisceau harmonique.*

5° *Une involution circulaire spéciale est déterminée sur un cercle par ses trois centres d'inversion* P′, P″, P‴ *qui doivent être trois points conjugués.*

Les trois points a_2, a_3, a_4 qui forment un groupe avec un point donné a_1 sont les intersections du cercle avec les droites $P'a_1$, $P''a_1$ *et* $P'''a_1$. *Quand les centres d'inversion et le point choisi a_1 sont réels, les quatre points du groupe sont réels, mais si deux centres d'inversion étaient imaginaires, deux des quatre points du groupe seraient également imaginaires.*

33. J'appelle *rayons d'involution conjugués* les deux rayons d'une involution composante qui déterminent les quatre points d'un même groupe.

Deux rayons d'involution conjugués issus du point P′ coupent harmoniquement le segment P″P‴. D'après cela, *on obtient une involution circulaire spéciale en coupant un cercle par deux faisceaux de droites en involution quadratique, sous la seule condition que les rayons doubles soient conjugués par rapport au cercle.*

On déduit de là que *quand les trois points* P', P'', P''' *sont réels, tout groupe est composé de quatre points réels ou de quatre points imaginaires,* ce qui est conforme à la proposition 5° du numéro précédent.

Quand les points P'' *et* P''' *sont imaginaires, si un rayon issu de* P' *coupe le cercle, le rayon qui lui est conjugué dans l'involution composante ne le rencontre pas, et réciproquement. Chaque groupe est alors composé de deux points réels et de deux points imaginaires.*

34. *Deux centres d'inversion* P' *et* P'' *peuvent coïncider en un point* P_2 *du cercle; le troisième point* P''' *est alors sur la tangente en* P_2. *L'involution spéciale est formée de l'involution composante* P''', *à chacun des points de laquelle le point* P_2 *est ajouté deux fois.*

Lorsque le point P''' *se réunit à* P_2, *chaque groupe se compose d'un point du cercle et de trois fois le point* P_2.

Involution spéciale circulaire complète.

35. Soit un cercle C ayant son centre en un point P, et portant une involution spéciale dont les centres d'inversion sont P', P'', P'''; j'appelle C', C'', C''' les cercles qui ont respectivement pour centre ces trois points, et qui coupent orthogonalement C. La droite $P''P'''$ est la sécante commune de C et de C'; les cercles C'' et C''' ayant leurs centres sur cette droite, et coupant C à angle droit, sont également orthogonaux à C'.

La droite $P''P'''$ est la polaire P' dans le cercle C et de P dans le cercle C'.

Il résulte de ces observations, que chacun des cercles C, C', C'', C''' coupe les autres à angle droit, et que les centres de trois d'entre eux sont les sommets d'un triangle conjugué au quatrième.

La droite qui joint les centres de deux cercles est perpendiculaire à celle qui passe par les centres des deux autres.

Les quatre cercles jouissent les uns par rapport aux autres de propriétés symétriques.

36. Si nous considérons l'involution sur C comme produite par des rayons divergeant du point P′ (n° **33**), nous aurons les points figuratifs des points imaginaires, en prenant l'intersection de C′ avec un faisceau ayant son centre en P, et dont les rayons seront respectivement perpendiculaires aux rayons d'involution divergeant de P′ (n° **30**). On obtient ainsi une involution spéciale sur C′.

Les rayons doubles du faisceau P sont les droites PP″ et PP‴ respectivement perpendiculaires aux rayons doubles P′P‴ et P′P″ du faisceau P′. Comme d'ailleurs P″ et P‴ se trouvent sur la polaire de P′ par rapport au cercle C, nous voyons que ces points sont, avec P, les centres d'inversion de l'involution figurative complémentaire sur le cercle P′.

Si l'on considère l'involution sur C comme obtenue par un faisceau ayant son centre en P″, on aura sur C″ une involution spéciale complémentaire ayant pour centres d'inversion P, P′, P‴.

En résumé, *nous avons sur chaque cercle une involution spéciale dont les centres d'inversion sont les centres des autres cercles. Deux quelconques de ces involutions peuvent être regardées comme complémentaires figuratives.*

J'appellerai *involution spéciale circulaire complète,* l'ensemble de quatre involutions de ce genre sur quatre cercles orthogonaux.

37. Une transformation par rayons vecteurs réciproques ne fait pas perdre ses propriétés au système que je viens de décrire, car des cercles orthogonaux sont changés en cercles orthogonaux.

Si le pôle de transformation est sur un des cercles, on obtient trois cercles qui se coupent à angle droit, et dont les centres sont sur une ligne droite qui remplace le quatrième cercle. C'est le système que j'ai étudié dans le premier paragraphe. Les différents groupes de l'involution sur la droite ne peuvent pas être donnés par les rayons conjugués de l'un quelconque des trois faisceaux. Je les ai déterminés par la position du centre de leurs moyennes distances, ce qui introduit quelques différences.

Quand le pôle de transformation est à l'intersection de deux cercles, on obtient deux droites rectangulaires et deux cercles dont les centres coïncident au point de rencontre de ces lignes. Les carrés des rayons des cercles sont égaux et de signes contraires.

§ III. — Groupes de points réciproques sur un plan.

38. Revenons au cas où l'on a sur une droite une involution spéciale du quatrième ordre avec ses trois cercles d'inversion dont les centres sont O′, O″ et O‴ (n° **24**). Je prends arbitrairement un point M_1, et je détermine d'abord ses réciproques M_2, M_3, M_4 par rapport aux trois cercles, puis les symétriques M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 des quatre premiers points par rapport à l'axe O′O″O‴. *Les huit points ainsi obtenus sont réciproques deux à deux par rapport à l'un quelconque des cercles.* Si l'on considère le cercle O′, les couples de points réciproques sont

$$M_1 \text{ et } M_2,\quad M'_1 \text{ et } M'_2,\quad M_3 \text{ et } M'_4,\quad M'_3 \text{ et } M_4.$$

Pour démontrer ce théorème, il suffit de vérifier que les points M_3 et M'_4, sont réciproques par rapport au cercle O′.

Je choisis pour axes la droite O′O″O‴ et sa perpendiculaire en O′. J'appelle λ'' et λ''' les abscisses des points O″ et O‴. Je désigne par x_1 et y_1 les coordonnées du point M_1; celles des points M'_1, M_2, etc., seront x'_1 et y'_1, x_2 et y_2, etc.

On obtient sans difficulté

$$x_3 = \lambda'' \frac{(x_1-\lambda'')(x_1-\lambda''')+y_1^2}{(x_1-\lambda'')^2+y_1^2},\quad y_3 = \lambda'' \frac{(\lambda''-\lambda''')y_1}{(x_1-\lambda'')^2+y_1^2},$$

$$x'_4 = \lambda''' \frac{(x_1-\lambda'')(x_1-\lambda''')+y_1^2}{(x_1-\lambda''')^2+y_1^2},\quad y'_4 = \lambda''' \frac{(\lambda'''-\lambda'')y_1}{(x_1-\lambda''')^2+y_1^2}.$$

Ces expressions donnent immédiatement

$$\frac{x_3}{y_3} = \frac{x'_4}{y'_4}.$$

Nous voyons que les points M_3, M'_4 et O′ sont en ligne droite. Pour que les deux premiers soient réciproques par rapport au cercle O′, il faut de plus qu'on ait

$$\sqrt{x_3^2+y_3^2}\sqrt{x'^2_4+y'^2_4} = \lambda''\lambda''',$$

car les points O″ et O‴ sont conjugués par rapport au cercle d'inversion O′ (n° **6**). Or cette équation se réduit à une identité, quand on y porte les valeurs ci-dessus de x_3, y_3, x'_4 et y'_4. Le théorème énoncé est donc démontré.

Tout cercle mené par le point M_1 et normal au cercle O′ passe par M_2. Réciproquement, tout cercle passant par M_1 et M_2 est normal au cercle O′.

Lorsque le point primitif M_1 est sur la droite O′O″O‴ ou sur un des trois cercles, les points se confondent deux à deux, et on obtient un groupe de quatre points du genre de ceux qui ont été étudiés dans le premièr paragraphe.

39. Quand on a deux courbes réciproques par rapport à un cercle, si l'on transforme tout le système, on obtient deux nouvelles courbes réciproques par rapport au cercle transformé. Il suit de là que le théorème du n° **38** peut être étendu au cas d'une involution spéciale circulaire complète, et qu'on peut sur le plan d'une involution de ce genre déterminer des groupes de huit points réciproques deux à deux par rapport aux quatre cercles.

SECONDE PARTIE.

QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ANALLAGMATIQUES.

Définition et génération des anallagmatiques.

40. Adoptant une expresssion introduite par M. Moutard, je dirai qu'une courbe plane est *anallagmatique* quand elle est sa propre transformée par rapport à un certain *cercle d'inversion*.

Toute anallagmatique est l'enveloppe d'un cercle orthogonal à un cercle fixe (qui est précisément le cercle d'inversion), dont le rayon est variable et dont le centre parcourt une courbe donnée. J'appellerai cette ligne *courbe déférente* eu égard à l'analogie qu'elle présente avec les cercles déférents de l'ancienne astronomie.

Soient IT une tangente de la courbe déférente, et I son point de contact : la perpendiculaire OK abaissée du centre O du cercle d'inversion sur la droite IT passe par les deux points x et x' où le cercle enveloppé qui a son centre en I touche l'anallagmatique.

Les points réciproques x et x' sont conjugués harmoniques de ceux où la droite OK rencontre le cercle d'inversion, et le segment xx' a son milieu K sur la tangente IT. Les points x et x' sont par suite indépendants de la position du point de contact I sur la tangente IT; ils sont imaginaires ou réels suivant que la tangente IT coupe le cercle d'inversion ou ne le rencontre pas.

Une sécante menée par le point O coupe l'anallagmatique en des couples de points réciproques. Les perpendiculaires élevées à la sécante par les milieux des segments compris entre les points d'un même couple, sont tangentes à la déférente.

Cercles enveloppés dans une anallagmatique considérés comme formant un système de coniques.

41. Les cercles qui ont pour enveloppe une anallagmatique forment un système de coniques dont il nous sera utile d'avoir les caractéristiques μ et ν.

J'appelle n et m l'ordre et la classe de la courbe déférente.

Les cercles du système qui passent par un point M_1 du plan se croisent aussi au point réciproque M_2; les centres de ces cercles sont les n intersections de la déférente avec la perpendiculaire élevée à la droite $M_1 M_2$ par son milieu. On voit ainsi que la caractéristique μ est égale à n; en d'autres termes, *le nombre des cercles du système qui passent par un point du plan est égal à l'ordre de la déférente.*

42. Les coniques exceptionnelles sont ici les cercles dont le rayon est nul ou infini.

Les $2n$ intersections de la déférente avec le cercle d'inversion donnent les cercles qui ont un rayon nul. Chacun d'eux doit être considéré comme l'intersection de deux droites dirigées vers les points circulaires à l'infini.

La déférente possède n points à l'infini. A chacun d'eux correspond un cercle d'un rayon infini, c'est-à-dire l'ensemble de deux droites dont une est à l'infini.

Le système comprend donc $3n$ coniques décomposées en deux droites, et ne contient aucune conique infiniment aplatie. Nous avons en conséquence d'après les formules de M. Chasles

$$2\mu - \nu = 0, \quad 2\nu - \mu = 3n.$$

μ étant égal à n (n° **41**), ces relations donnent toutes les deux pour ν la valeur $2n$. *Le nombre des cercles du système qui touchent une droite quelconque est donc égal au double de l'ordre de la déférente.*

D'après un théorème de M. Chasles, l'ordre de la courbe lieu des centres des coniques d'un système est égal à la caractérisque ν; mais il faut remarquer qu'ici nous avons n coniques composées de deux droites dont une à l'infini, et que dans chacune d'elles, tout point à l'infini peut être considéré comme le pôle de la droite de l'infini, c'est-à-dire comme un centre. Le lieu des centres comprend ainsi, outre la déférente, n fois la ligne de l'infini, et par suite l'ordre de ce lieu est $2n$ ou ν.

43. Chaque cercle d'un rayon infini est une droite passant par le centre du cercle d'inversion et perpendiculaire à une asymptote de la déférente; comme d'ailleurs tous les cercles du système touchent l'enveloppe en deux points, on voit que *n tangentes doubles de l'anallagmatique se croisent au centre du cercle d'inversion, et sont respectivement perpendiculaires aux asymptotes de la déférente.*

J'examinerai plus loin le cas où cette courbe a des branches paraboliques.

Ordre de l'anallagmatique.

44. Une droite menée par le centre O du cercle d'inversion rencontre l'anallagmatique en autant de couples de points que la déférente a de tangentes qui lui sont perpendiculaires (n° **40**). *L'ordre de l'anallagmatique est donc double de la classe de la courbe déférente.*

On arrive au même résultat en considérant une droite quelconque D du plan de l'anallagmatique. Par un point x de D je fais passer un cercle du système : la droite qui contient les deux points où ce cercle touche l'anallagmatique coupe D en un point u. A un point x correspondent n points u (n° **41**).

Je joins au centre O du cercle d'inversion un point u pris arbitrairement sur D; la courbe déférente a m tangentes perpendiculaires à Ou : soit I le point de contact de l'une d'elles; le cercle enveloppé qui a son centre en I coupe D en deux points x. A un point u correspondent $2m$ points x.

Les coïncidences sont au nombre de $(n + 2m)$; il y en a une sur chacune des n tangentes doubles qui passent par le point O. Les $2m$ autres déterminent les points de l'anallagmatique sur la droite D.

45. Quand la courbe déférente a une branche parabolique, deux cercles consécutifs se décomposent chacun en deux droites, une passant par le centre du cercle d'inversion, et l'autre à l'infini. Il résulte de là que l'anallagmatique passe par le centre du cercle d'inversion et que la droite de l'infini fait partie de l'enveloppe dont l'ordre a été déterminé au numéro précédent.

Chaque branche parabolique de la déférente abaisse d'une unité l'ordre de l'anallagmatique, et détermine dans cette courbe une branche passant par le centre du cercle d'inversion.

Si la déférente avait une branche parabolique avec inflexion à l'infini, l'ordre de l'anallagmatique serait abaissé de deux unités, et cette courbe aurait au centre du cercle d'inversion un point double formé par la superposition de deux points consécutifs, c'est-à-dire un point de rebroussement.

46. D'après ce qui précède, quand la déférente est une conique, l'anallagmatique est, en général, du quatrième ordre, mais elle s'abaisserait au troisième ordre si la déférente était une parabole.

Il y a une seconde anallagmatique du quatrième ordre ; elle a pour déférente une courbe de la troisième classe, ayant une branche parabolique avec inflexion à l'infini.

Foyers de l'anallagmatique.

47. Adoptant la définition de Plücker, j'appelle *foyers* d'une courbe les intersections mutuelles des tangentes qui lui sont menées des points circulaires à l'infini, ou, ce qui revient au même, les centres des cercles de rayon nul qui ont un double contact avec la courbe. *Les $2n$ intersections de la déférente avec le cercle d'inversion sont donc des foyers de l'anallagmatique* (n° **42**).

En prenant les intersections mutuelles des droites qui passent par les foyers situés sur le cercle d'inversion et par les points circulaires à l'infini, on obtient de nouveaux foyers. *Ceux-ci sont deux à deux réciproques par rapport au cercle d'inversion.*

Pour établir ce théorème, je remarque qu'en choisissant convenablement les axes, on peut représenter par a et $\pm\sqrt{R^2-a^2}$ les coordonnées x et y de deux foyers situés sur le cercle d'inversion, mais d'ailleurs quelconques. Les quatre droites dirigées de ces foyers aux points circulaires sont représentées par l'équation

$$y \pm (x-a)\sqrt{-1} \pm \sqrt{R^2-a^2} = 0.$$

Les rencontres des couples de droites non parallèles ont une ordonnée nulle et des abscisses x' et x'' dont les valeurs sont

$$x' = a - \sqrt{a^2-R^2}, \quad x'' = a + \sqrt{a^2-R^2};$$

d'où

$$x'x'' = R^2.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

Je donnerai au numéro suivant une nouvelle proposition sur les foyers des anallagmatiques.

Points multiples des anallagmatiques.

48. Supposons que l'on ait un système de cercles passant tous par un même point E; de ce point je mène une tangente au lieu des centres des cercles : les deux points communs au lieu et à la tangente sont les centres de deux cercles consécutifs qui se touchent en E. Chacune des tangentes menées par le point E au lieu des centres est donc normale en ce point à une branche de l'enveloppe des cercles.

Revenons maintenant à l'anallagmatique, et appliquons les considérations qui précèdent aux points circulaires à l'infini : en remarquant que les droites dirigées vers ces points sont perpendiculaires à elles-mêmes, on voit que *les points circulaires à l'infini appartiennent à l'anallagmatique, et y ont un ordre de multiplicité égal à la classe de la déférente. Les tangentes des différentes branches en un de ces points coïncident avec les tangentes menées de ce point à la déférente, et par suite les foyers de cette dernière courbe sont des foyers quadruples de la première* [*].

[*] M. Laguerre a donné ce théorème dans le cas où la courbe déférente est une conique.

Quand la déférente a des branches paraboliques, des droites à l'infini se détachent, et l'ordre de multiplicité des points circulaires est diminué d'un nombre égal d'unités.

Si la courbe déférente passe par les points circulaires à l'infini, deux des tangentes qui lui sont menées de chacun d'eux coïncident; l'anallagmatique a par conséquent, en ces points, des points doubles formés par la superposition de deux points consécutifs, c'est-à-dire des points de rebroussement.

M. Laguerre appelle *foyers singuliers* d'une courbe passant aux points circulaires à l'infini, les intersections mutuelles des tangentes de la courbe en ces points. J'adopterai cette expression.

49. D'après ce que nous avons vu au n° **39**, le cercle d'inversion étant donné, on peut déterminer deux points de l'anallagmatique lorsqu'on connaît une tangente de la déférente. Il résulte de là qu'*à chaque tangente double de la déférente correspondent sur l'anallagmatique deux points doubles réciproques l'un de l'autre.* Ces points sont imaginaires ou réels suivant que la tangente coupe le cercle ou ne le rencontre pas. Quand la tangente double est idéale les points sont isolés.

Si une tangente double de la déférente touche le cercle d'inversion, deux branches de l'anallagmatique passent par le point de contact, l'une et l'autre normales au cercle.

50. Supposons qu'une droite touche le cercle d'inversion et la déférente en des points B et C : le cercle enveloppé dont le centre est C a un contact du troisième ordre avec l'anallagmatique parce que ses deux points de tangence sont réunis en B. Le point B est donc un *sommet* sur l'anallagmatique. La normale de cette courbe est la tangente BC de la déférente.

51. Quand la déférente touche le cercle d'inversion en un point G, deux tangentes communes sont confondues en une seule, et le rayon du cercle enveloppé a une longueur nulle; l'anallagmatique possède par conséquent un point double en G. Ce point serait isolé, si, près de lui, la déférente était dans l'intérieur du cercle d'inversion, ou si les courbures de la déférente et du cercle étaient de sens contraires. Quand il y a osculation entre ces lignes, l'anallagmatique possède un point de rebroussement.

52. Lorsque la déférente est une ellipse ou une hyperbole touchant le cercle d'inversion en deux points, l'anallagmatique est une courbe du quatrième ordre ayant des points doubles aux deux points de contact et aux points circulaires à l'infini, c'est-à-dire l'ensemble de deux cercles.

On obtient encore deux cercles en prenant pour déférente une conique décomposée en deux points. Les cercles ont respectivement leurs centres en ces points, et coupent orthogonalement le cercle d'inversion.

En général, quand la déférente est un être géométrique formé d'une courbe double Σ divisée par des points (*voir* les communications faites par M. Chasles à l'Académie des Sciences les 22 avril et 27 mai 1867), l'anallagmatique comprend les cercles qui ont pour centres les points de division et qui sont orthogonaux aux cercles d'inversion, et, en outre, la ligne qui correspond à la courbe Σ.

Si la déférente était une parabole ayant avec le cercle d'inversion un double contact réel ou idéal, l'anallagmatique serait une ligne du troisième ordre ayant deux points doubles réels ou imaginaires, et passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire le système d'un cercle et d'une droite.

53. On a quelquefois à considérer des anallagmatiques pour lesquelles le cercle d'inversion a un rayon nul. Une courbe de ce genre est l'enveloppe de cercles qui passent par un point fixe. En conséquence, et par les considérations présentées au commencement du n° **48**, on reconnaît que le centre d'inversion est sur l'anallagmatique, et qu'il y a un ordre de multiplicité égal à la classe de la déférente. Les tangentes des différentes branches de l'anallagmatique, au centre d'inversion, sont respectivement perpendiculaires aux tangentes menées de ce point à la déférente.

Dans ce cas, si le centre d'inversion est sur la déférente, l'anallagmatique a un rebroussement.

Le rayon du cercle d'inversion étant nul, on obtient les points de l'anallagmatique en abaissant du centre d'inversion des perpendiculaires sur les tangentes de la déférente, et prolongeant chacune d'elles d'une longueur égale à elle-même (n° **40**). L'anallagmatique est alors la podaire d'une courbe homothétique à la déférente et de dimensions doubles. Le centre d'inversion est le pôle de similitude des deux courbes.

L'étude que nous venons de faire des points multiples des anallagmatiques, bien qu'incomplète, nous suffira pour la discussion des spiriques.

Transformation d'une anallagmatique.

54. Dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, les cercles orthogonaux sont remplacés par d'autres cercles orthogonaux; il en résulte que la transformée d'une anallagmatique est une anallagmatique; les deux cercles d'inversion sont réciproques.

Les deux systèmes de cercles enveloppés ont les mêmes caractéristiques.

55. Les déférentes sont des courbes de même ordre (n° **41**). Elles se correspondent point à point. Deux points homologues sont les centres de deux cercles enveloppés réciproques, et se trouvent par conséquent sur une droite passant par le pôle Ω de la transformation.

Il y a trois cercles d'inversion à considérer : ceux qui sont propres aux anallagmatiques, et celui par rapport auquel les deux anallagmatiques sont réciproques. Ces trois cercles se coupent en deux mêmes points e et f. Tout cercle ayant son centre sur la droite ef, et rencontrant à angle droit un des premiers, sera orthogonal aux deux autres. Il résulte de là que les deux déférentes coupent aux mêmes points l'axe radical des trois cercles. Nous voyons que les deux déférentes sont homologiques; le centre et l'axe d'homologie sont le pôle Ω de la transformation et la sécante commune des cercles d'inversion.

Si le pôle général de la transformation est sur le cercle d'inversion de la première figure, le cercle d'inversion de la seconde devient un axe de symétrie, et la déférente se réduit à un être géométrique composé de plusieurs fois cet axe et de points placés sur lui. Le cercle d'inversion et la déférente étant confondus sur une droite ne suffisent plus pour déterminer l'anallagmatique, car tout cercle dont le centre est sur la droite pourrait être considéré comme appartenant au système des cercles enveloppés. Dans ce cas on ne doit pas chercher à appliquer les théorèmes que j'ai exposés plus haut.

Indications sur les différents genres d'anallagmatiques.

56. Toute courbe ayant un axe de symétrie est une anallagmatique dont le centre d'inversion se trouve à l'infini. On obtient, en la transformant, une anallagmatique ordinaire.

Certaines courbes ont deux, quatre, huit, etc., axes de symétrie qui se croisent en un point; leurs transformées sont anallagmatiques par rapport à deux, quatre, huit, etc., cercles passant par deux mêmes points et comprenant entre eux des angles égaux.

La sinusoïde et diverses autres courbes transcendantes ont une infinité d'axes de symétrie parallèles entre eux; leurs transformées sont anallagmatiques par rapport à une infinité de cercles tangents à une droite en un même point.

Revenons aux lignes algébriques, et supposons qu'on ait une déférente symétrique par rapport à deux diamètres rectangulaires du cercle d'inversion; la courbe obtenue est anallagmatique, non-seulement par rapport à ce cercle, mais encore par rapport au cercle imaginaire qui a le même centre que lui, et qui lui est orthogonal. Elle a de plus deux axes de symétrie qui se croisent à angle droit au centre commun des cercles. Ses transformées sont par conséquent anallagmatiques par rapport à quatre cercles orthogonaux. Leurs points forment des groupes analogues à ceux dont je me suis occupé au n° **39**.

On peut prendre pour déférente une courbe symétrique par rapport à quatre, huit, seize, etc. diamètres du cercle d'inversion, et ensuite, par une transformation, on aura des courbes anallagmatiques par rapport à quatre, huit, seize, etc., cercles passant par deux points fixes et comprenant entre eux des angles égaux, et par rapport à deux cercles, l'un réel, l'autre imaginaire, orthogonaux entre eux et aux premiers.

A chaque cercle d'inversion d'une anallagmatique correspond une déférente. Toutes les déférentes ont pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique (n° **48**).

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DE LA SPIRIQUE.

Considérations générales.

57. Lorsqu'une surface est coupée par un plan, la courbe d'intersection appartient à la surface symétrique de la première par rapport au plan. Il résulte de là que le nombre des surfaces d'une même définition qui passent par une courbe plane, est pair quand il n'est pas infini. On conçoit, en conséquence, que pour certaines valeurs des paramètres de la courbe, les surfaces considérées puissent devenir toutes imaginaires. Il semble, d'après cela, qu'il n'est pas sans quelque inconvénient de définir une courbe plane par la propriété d'appartenir à des surfaces déterminées, si leur nombre est limité, et qu'on doit préférer prendre pour définition une propriété caractéristique de la courbe sur le plan.

Par ces considérations, j'ai cru devoir abandonner l'ancienne définition de la spirique. Nous verrons que les tores qui passent par une spirique réelle sont souvent tous imaginaires.

58. *La spirique est une courbe plane du quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et deux points doubles situés à l'infini sur un cercle.*

En remarquant qu'un tore contient un cercle à l'infini sur une sphère, et que sa section par un plan a un axe de symétrie, on reconnaît que cette section est une spirique.

J'établirai plus loin que toute spirique appartient à un nombre déterminé de tores.

La spirique possède sur son axe de symétrie quatre sommets que je désignerai par a_1, a_2, a_3, a_4.

J'appellerai *plan principal* de la spirique le plan qui est perpendiculaire à celui de cette courbe et qui contient son axe de symétrie.

59. On trouve, par les formules de Plücker, que *la spirique est, en général, une courbe de la huitième classe ayant huit tangentes doubles.*

Puisqu'elle est de la huitième classe, on peut lui mener huit tangentes perpendiculaires à son axe : quatre d'entre elles la touchent à ses sommets; les quatres autres se confondent deux à deux.

Deux des tangentes doubles de la spirique sont perpendiculaires à son axe; les six autres occupent deux à deux des positions symétriques.

60. Quand on fait tourner une spirique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace, la surface engendrée est du huitième ordre, car sa section par le plan de la spirique se compose d'abord de cette courbe, puis d'une spirique égale et placée symétriquement par rapport à la projection de l'axe de révolution. Si cependant cet axe est dans le plan principal de la spirique, les points de la courbe décrivent deux à deux les mêmes parallèles, et on obtient deux fois une surface du quatrième ordre.

Dans le mouvement de révolution, les points circulaires qui sont à l'infini sur le plan de la spirique engendrent chacun deux fois le cercle d'intersection du plan de l'infini avec une sphère. Il suit de là que ce cercle est double sur la surface du quatrième ordre, et que la section plane de cette surface possède deux points doubles aux points circulaires; elle est d'ailleurs symétrique par rapport à un axe, c'est donc une spirique.

Si l'on fait tourner une spirique autour d'une droite située dans son plan principal et d'ailleurs quelconque, la surface engendrée sera telle, que toutes ses sections planes seront des spiriques.

61. La méridienne de cette surface est une spirique comme ses autres sections planes; elle admet donc six tangentes doubles non perpendiculaires à l'axe de révolution (n° **59**). Tout plan passant par une de ces droites et perpendiculaire au plan méridien touche la surface en deux points et, par suite, la coupe suivant une spirique qui a deux nouveaux points doubles sur son axe de symétrie. Comme d'ailleurs une ligne du quatrième ordre ne peut pas avoir plus de trois points doubles, cette spirique se décompose en deux coniques qui se croisent aux points circulaires à l'infini, c'est-à-dire en deux cercles.

Les six tangentes doubles obliques à l'axe ont deux à deux des positions symétriques. Elles engendrent par leur révolution trois cônes qui ont le même axe que la surface et qui lui sont doublement circonscrits. Tout plan tangent à l'un d'eux coupe la surface suivant deux cercles égaux [*]. J'appellerai cette surface *tore oblique* dans le cas général, *tore droit* et *tore ordinaire* quand les plans des cercles de l'un des systèmes seront parallèles à l'axe de révolution, et quand ils contiendront cet axe.

Les centres des cercles donnés par les sections planes des trois systèmes sont dans un même plan que je désignerai sous le nom de *plan équatorial*. L'intersection de ce plan avec l'axe de révolution sera le *point central* de la surface. Dans le tore droit et le tore ordinaire, le point central est un véritable centre.

D'après ce qui précède, nous pouvons modifier l'énoncé du théorème obtenu au n° **60**, et dire que *la surface engendrée par la révolution d'une spirique autour d'une droite située dans son plan principal est un tore généralement oblique.*

Le tore oblique a un parallèle double à l'infini sur une sphère, et, par suite, en raisonnant comme au n° **58**, on trouve que *toute section plane d'un tore oblique est une spirique.*

62. Lorsqu'on fait tourner une spirique autour d'une droite située dans son plan principal, les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie (n° **59**) décrivent des plans qui touchent le tore

---

[*] Divers théorèmes ont été obtenus sur cette surface par M. J.-A. Serret et par moi. *Voir* le Mémoire de M. Mannheim *Sur la cyclide* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1860), et mon *Mémoire sur le tore général* ou surface engendrée par la révolution d'une conique autour d'une droite située d'une manière quelconque dans l'espace (*Journal de l'École Polytechnique*, XL[e] Cahier).

oblique engendré, chacun le long d'un parallèle. Le plan équatorial du tore oblique est parallèle à ces plans, et situé à des distances égales de l'un et de l'autre. Son intersection avec le plan de la spirique est donc la droite qui forme le diamètre du système des deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie. J'appellerai cette droite l'*équatoriale* de la spirique, et le point où elle rencontre l'axe de symétrie le *point équatorial* de la courbe. Je désignerai toujours le point équatorial par la lettre E.

Les plans équatoriaux de tous les tores obliques qui passent par une même spirique se coupent suivant l'équatoriale de cette courbe.

63. L'ovale de Descartes satisfait à la définition de la spirique, avec cette circonstance, qu'il possède des rebroussements aux points doubles à l'infini, ainsi que M. Cayley l'a démontré [*]. J'appellerai cette ligne *cartésienne*, et je réserverai le mot *ovale* pour désigner toute branche fermée d'une courbe. Le nom d'*ovale de Descartes* a l'inconvénient de rappeler, pour les rayons vecteurs issus des foyers, des propriétés qui disparaissent quand deux des foyers sur l'axe sont imaginaires.

En tournant autour d'une droite située dans son plan principal, la cartésienne engendre une surface qui a un parallèle de rebroussement à l'infini sur une sphère, et dont, par suite, les sections planes ont deux rebroussements à l'infini sur un cercle : ce sont des cartésiennes. Quand le plan tangent est perpendiculaire à l'axe de révolution, on a deux cercles concentriques.

La cartésienne est une courbe de la sixième classe; elle possède une seule tangente double qui est perpendiculaire à son axe. Quand, par suite de modifications apportées à ses paramètres, une spirique se transforme en cartésienne, la seconde tangente double perpendiculaire à l'axe et l'équatoriale sont transportées à l'infini; les six autres tangentes doubles sont remplacées par les tangentes menées à la courbe de ses points de rebroussement.

---

[*] *Journal de Mathématiques*, 1850, p. 355.

Formules fondamentales.

64. Il résulte de la définition même de la spirique que si on la rapporte à deux axes rectangulaires dont un, celui des abscisses, coïncide avec son axe de symétrie, on pourra la représenter par l'équation

$$(1) \qquad (x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) + qx^2 + ry^2 + sx + t = 0.$$

L'origine n'a pas de position déterminée sur l'axe de symétrie; nous pouvons la placer de manière à faire disparaître de l'équation de la courbe les termes du troisième degré. Il suit de là que *la spirique possède sur son axe de symétrie un point qui est le centre des moyennes distances des quatre points où une quelconque des droites qui y passent rencontre la courbe.*

Je désignerai ce point par la lettre G.

La courbe étant représentée par l'équation (1), l'abscisse du point G est p.

65. En mettant l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(x^2+y^2-2px+\frac{r}{2}\right)^2 \\ &\quad + (q-r-4p^2)x^2 + (s+2pr)x + \left(t-\frac{r^2}{4}\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

on reconnaît que chacune des deux droites données par l'équation

$$(3) \qquad (q-r-4p^2)x^2 + (s+2pr)x + \left(t-\frac{r^2}{4}\right) = 0$$

touche la spirique aux deux points où elle rencontre le cercle

$$(4) \qquad x^2+y^2-2px+\frac{r}{2} = 0.$$

Ce sont les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe (n° **59**).

Si nous désignons l'abscisse de l'équatoriale par e, nous aurons, d'après la définition même de cette droite (n° **62**), et en vertu de l'équation (3),

$$(5) \qquad e = -\frac{s + 2pr}{2(q - r - 4p^2)}.$$

Lorsque les coefficients satisfont à la relation

$$(6) \qquad q - r - 4p^2 = 0,$$

l'équatoriale et l'une des tangentes doubles perpendiculaires à l'axe s'éloignent à l'infini; l'équation prend d'ailleurs l'une des formes connues de l'équation de la cartésienne.

66. Les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe peuvent coïncider. L'équation (3) est alors un carré parfait, et on voit par l'équation (2) que la spirique se décompose en deux cercles dont les centres sont sur l'axe de symétrie. La sécante commune des deux cercles représente les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe et l'équatoriale.

Indications sur les tores obliques qui passent par une spirique.

67. Considérons un tore oblique : je place l'origine des coordonnées au point central (n° **61**), et je prends, pour axes des X, des Y et des Z, deux droites rectangulaires situées dans le plan équatorial et l'axe de révolution.

J'appelle b le rayon de l'un des cercles par lesquels la surface peut être engendrée;

g la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur celui des diamètres du cercle générateur qui est situé dans le plan équatorial;

a le segment compris sur ce diamètre entre le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine, et le centre du cercle;

γ l'angle que le plan du cercle fait avec le plan équatorial.

L'équation du tore oblique est [*]

$$(7) \quad (X^2 + Y^2 + Z^2 - 2g\cot\gamma.Z - a^2 - b^2 - g^2)^2 + \frac{4a^2}{\sin^2\gamma}(Z^2 - b^2\sin^2\gamma) = 0.$$

[*] Cette équation est facile à obtenir. On peut la déduire de celle que j'ai donnée pour le tore général, au n° 14 de mon Mémoire sur cette surface.

68. Je coupe le tore oblique par un plan, et je rapporte la section à deux axes rectangulaires dont un, celui des abscisses, est la droite du plan sécant contenue dans le plan méridien qui lui est perpendiculaire.

J'appelle x et y les coordonnées d'un point de la section;

e l'abscisse du point E où le plan équatorial du tore coupe l'axe des abscisses;

ρ la distance du point central C du tore au point E;

ω l'angle que le plan équatorial du tore fait avec le plan sécant.

Pour avoir l'équation de la section, il suffit de remplacer dans l'équation (7) X, Y et Z par les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} X &= x\cos\omega - (e\cos\omega + \rho), \\ Y &= y, \\ Z &= -\,x\sin\omega + e\sin\omega. \end{aligned}$$

On trouve

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &[x^2 + y^2 - 2(e + \rho\cos\omega - g\sin\omega\cot\gamma)x \\ &\quad + e^2 + 2e\rho\cos\omega - 2ge\sin\omega\cot\gamma + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2]^2 \\ &\quad + 4\frac{a^2\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}x^2 - 8ea^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}x + 4\frac{a^2}{\sin^2\gamma}(e^2\sin^2\omega - b^2\sin^2\gamma) = 0. \end{aligned} \right.$$

69. Égalant entre eux les coefficients des équations (2) et (8), j'ai

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &p = e + \rho\cos\omega - g\sin\omega\cot\gamma, \\ &\frac{1}{2}r = e^2 + 2e\rho\cos\omega - 2ge\sin\omega\cot\gamma + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2, \\ &q - r - 4p^2 = 4a^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}, \\ &s + 2pr = -\,8ea^2\frac{\sin^2\omega}{\sin^2\gamma}, \\ &t - \frac{r^2}{4} = 4\frac{a^2}{\sin^2\gamma}(e^2\sin^2\omega - b^2\sin^2\gamma). \end{aligned} \right.$$

Les troisième et quatrième de ces équations donnent pour e la valeur déjà obtenue au n° **65**, ce qui fournit une vérification du théorème du n° **62**.

70. En vertu de la relation (5), les équations (9) se réduisent à quatre distinctes. Elles déterminent quatre des six quantités a^2, b^2, g, ρ, ω, γ quand les deux autres sont connues. On peut, par exemple, se donner les deux coordonnées ρ et ω du point central C du tore : l'axe de révolution est alors la perpendiculaire à la droite CE menée par le point C.

Tout point du plan principal d'une spirique est le point central d'un tore oblique passant par cette courbe.

Le point équatorial est le point central d'une infinité de tores obliques qui contiennent la spirique. On détermine les paramètres de ces tores en faisant ρ nul dans les équations (9), et en attribuant diverses valeurs à ω.

71. Si l'on ajoute aux équations (9) une relation arbitraire entre a, b, g, γ, puis qu'on élimine ces quatre quantités et, en outre, e, on aura une équation en ρ et ω qui fera connaître le lieu des points centraux des tores obliques passant par la spirique donnée et satisfaisant à la condition exprimée par la relation arbitraire. Bien que ces recherches présentent quelque intérêt, je me borne à les indiquer.

Indications sur les tores droits qui passent par une spirique.

72. Pour déterminer la position et les paramètres des tores droits qui passent par une spirique donnée, on peut recourir aux équations (9), en y supposant γ égal à 90 degrés. On a alors

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} & p = e + \rho\cos\omega, \\ & \tfrac{1}{2}r = e^2 + 2e\rho\cos\omega + \rho^2 - a^2 - b^2 - g^2, \\ & q - r - 4p^2 = 4a^2\sin^2\omega, \\ & t - \frac{r^2}{4} = 4a^2(e^2\sin^2\omega - b^2). \end{aligned}\right.$$

Je n'ai pas reproduit la quatrième équation parce que, en vertu de la relation (5), elle n'a aucune importance, ainsi que j'en ai déjà fait la remarque (n° **70**).

73. La première des équations (10) montre que les centres des tores sont sur une perpendiculaire au plan de la spirique, coupant son axe au point dont l'abscisse est p, c'est-à-dire au centre G (n° **64**).

Le lieu des centres des tores droits qui passent par une spirique donnée est une perpendiculaire au plan de cette courbe élevée par le centre G *des moyennes distances.*

74. L'axe du tore droit qui a son centre en un point C de cette perpendiculaire coupe à angle droit le rayon vecteur EC (n° **70**). Il suit de là que *les axes des tores droits qui passent par une spirique donnée enveloppent une parabole située dans le plan principal de cette courbe, et dont le foyer et le sommet coïncident, l'un avec le point équatorial, et l'autre avec le centre* G *des moyennes distances.*

Études des tores ordinaires qui passent par une spirique donnée.

75. Pour accommoder les formules (10) au cas où l'on ne considère que des tores ordinaires, il suffit d'y faire g nul; mais j'y annulerai aussi l'abscisse p de manière à placer au centre G des moyennes distances, l'origine qui jusqu'à présent est restée indéterminée sur l'axe de symétrie.

Les équations (10) deviennent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &e+\rho\cos\omega=0,\\ &e^2+2e\rho\cos\omega+\rho^2-a^2-b^2=\frac{1}{2}r,\\ &4a^2\sin^2\omega=q-r,\\ &a^2(e^2\sin^2\omega-b^2)=\frac{4t-r^2}{16}.\end{aligned}\right.$$

Les paramètres b et a sont le rayon du cercle méridien et la distance de son centre à l'axe du tore.

L'équation (5) est remplacée par la suivante

$$(12)\qquad e=-\frac{s}{2(q-r)}.$$

La spirique étant donnée par ses coefficients q, r, s, t, les équations ci-dessus font connaître les paramètres a et b du tore, et les trois quantités e, ρ, ω qui fixent sa position par rapport à la courbe. Toute spirique appartient donc à un nombre déterminé de tores.

76. Si entre les équations (11) et (12), on élimine l'abscisse e et trois quelconques des quantités a, b, ρ, ω, on obtient pour déterminer la quatrième une équation du sixième degré. On trouve de cette manière que la tangente de l'azimut ω est donnée par l'équation

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &s^2 \operatorname{tang}^6\omega + (4t - q^2)(q - r)\operatorname{tang}^4\omega \\ &\quad - 2q(q-r)^2\operatorname{tang}^2\omega - (q-r)^3 = 0; \end{aligned}\right.$$

$\operatorname{tang}\omega$ a six valeurs qui sont deux à deux égales et de signes contraires. A chaque couple correspond un système de valeurs pour a^2, b^2 et ρ^2.

Toute spirique appartient à six tores qui sont deux à deux égaux et placés symétriquement par rapport à son plan.

77. Je considère un de ces tores : je désigne par O le point où son axe rencontre l'axe de symétrie de la spirique, et par λ l'abscisse GO. L'angle ECO est droit, et le point C est sur la perpendiculaire élevée à EO par le point G (nº **73**). Nous avons en conséquence

$$(14)\qquad \operatorname{tang}^2\omega = -\frac{\lambda}{e}.$$

La substitution de cette valeur dans l'équation (13) donne, pour déterminer les abscisses des points où les axes de révolution des six tores rencontrent deux à deux l'axe de symétrie de la spirique, l'équation suivante, qui est précisément l'équation (3) de l'Introduction,

$$(15)\qquad \lambda^3 + \frac{4t - q^2}{2s}\lambda^2 - \frac{q}{2}\lambda - \frac{s}{8} = 0.$$

Les axes des six tores qui passent par une spirique rencontrent l'axe de cette courbe en trois points, qui sont les centres d'inversion du groupe des quatre sommets a_1, a_2, a_3, a_4.

78. On peut obtenir ce résultat par des considérations géométriques très-simples.

Le plan principal de la spirique contient deux cercles méridiens de l'un quelconque des tores. Ces cercles coupent l'axe de symétrie aux sommets a_1, a_2, a_3, a_4; l'axe de révolution du tore est leur sécante commune, et, par conséquent, son intersection O avec l'axe de symétrie est le point central de l'une des involutions quadratiques déterminées par les quatre sommets. Mais on peut combiner deux à deux les points a_1, a_2, a_3, a_4 de trois manières différentes, et d'un autre côté les axes des six tores rencontrent l'axe de la spirique en trois points généralement distincts : ces points sont donc les centres d'inversion des quatre sommets.

79. En portant dans l'équation (1) la valeur du coefficient r déduite de la relation (12), on met l'équation de la spirique sous la forme

$$(16)\qquad (x^2+y^2)^2+qx^2+\left(q+\frac{s}{2c}\right)y^2+sx+t=0.$$

On voit qu'*une spirique est déterminée par ses quatre sommets sur l'axe et par son point équatorial.*

Il est facile de construire les tores quand ces cinq points sont connus. On cherche d'abord les centres d'inversion O', O'', O''' des quatre sommets, et le centre G des moyennes distances de ces mêmes points; puis on élève une perpendiculaire au plan de la courbe par le point G. Pour avoir les deux tores dont les axes se croisent en O', on décrit un cercle sur EO' comme diamètre, et on joint au point O' les points C et C_1 où ce cercle rencontre la perpendiculaire élevée par le point G. Les droites O'C, O'C_1 et EC, EC_1 sont : les premières, les axes des tores, les autres les traces de leurs plans équatoriaux sur le plan principal de la spirique. Les deux points de la ligne EC qui se trouvent à égales distances, l'un de a_1 et a_2, l'autre de a_3 et a_4 sont, pour l'un des deux tores, les centres des cercles méridiens qui passent respectivement par ces sommets.

Génération de la spirique comme anallagmatique.

80. J'appelle *sphères inscrites* dans un tore, les sphères qui touchent cette surface le long des méridiens. Une spirique est l'enveloppe des cercles suivant lesquels son plan coupe les sphères inscrites dans l'un quelconque des tores auxquels elle appartient.

Les différents points de l'axe du tore sont les centres de sphères qui coupent orthogonalement le tore et les sphères inscrites. Le plan de la spirique rencontre à angle droit celle de ces sphères dont il contient le centre : le cercle d'intersection est, par suite, normal aux cercles que les sphères inscrites possèdent dans le plan, et qui ont pour enveloppe la spirique. Les centres de ces cercles sont sur la conique suivant laquelle se projette le cercle lieu des centres des cercles méridiens du tore.

En appliquant ces considérations aux divers tores, on voit que *la spirique est de trois manières différentes l'enveloppe de cercles qui ont leurs centres sur une conique, et qui coupent orthogonalement un cercle fixe, c'est-à-dire qu'elle est anallagmatique par rapport à trois cercles. Les centres de ces cercles sont les centres d'inversion des quatre sommets sur l'axe. Les courbes déférentes sont des coniques.*

Ce résultat est une conséquence des théorèmes généraux connus pour les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle.

81. *Cercles d'inversion.* — Le premier cercle d'inversion a son centre au point O′ où les axes des tores du premier couple rencontrent le plan de la spirique. Son rayon est égal à celui de la sphère orthogonale, c'est-à-dire aux tangentes menées du point O′ du tore. Mais un méridien de ce tore coupe l'axe de la spirique aux points a_1 et a_2; le rayon du cercle d'inversion est donc moyen proportionnel entre $O'a_1$ et $O'a_2$, comme aussi entre $O'a_3$ et $O'a_4$. Nous voyons que le premier cercle d'inversion a pour diamètre le segment $e'f'$ compris entre les points doubles de l'involution quadratique dont a_1 et a_2, a_3 et a_4 sont deux couples.

Les trois cercles d'inversion de la spirique sont les cercles d'inversion *de l'involution spéciale du quatrième ordre déterminée par les quatre sommets que cette courbe possède sur son axe* (n° **24**).

Chaque point de la spirique doit avoir sur la courbe tous ses réciproques et leurs symétriques par rapport à l'axe. Il en résulte que *les points d'une spirique sont répartis huit par huit en groupes semblables à ceux que j'ai définis au n°* **38**.

82. *Coniques déférentes.* — Une conique déférente étant la projection des cercles décrits par les centres des cercles méridiens des tores d'un même couple, son centre est au point G, centre des moyennes distances de la spirique et projection des centres de tous les tores droits qui passent par cette courbe (n° **73**). L'un des axes de la conique est perpendiculaire à l'axe de symétrie de la spirique; sa longueur est égale à $2a$ (n^os **80** et **75**). Si nous appelons l'autre axe $2c$, nous aurons

$$c = a\cos\omega,$$

d'où

$$a^2 - c^2 = a^2\sin^2\omega. \tag{17}$$

En vertu de la troisième des équations (11), la quantité $a^2\sin^2\omega$ a la même valeur pour tous les tores qui passent par une spirique; *les coniques déférentes sont donc homofocales.* Ce théorème est une conséquence de l'observation que j'ai présentée à la fin du n° **56**.

83. On trouve encore immédiatement que *les sommets que les coniques déférentes possèdent sur l'axe de la spirique sont les points milieux des segments interceptés par les sommets de cette courbe* (n° **40**). Ainsi la première conique a ses sommets aux points milieux des segments $a_1 a_2$ et $a_3 a_4$.

J'appellerai les trois coniques Γ', Γ'', Γ''' et leurs demi-axes c' et a', c'' et a'', c''' et a'''. On a

$$\left\{\begin{aligned} c' &= \pm\frac{x_1+x_2}{2} = \mp\frac{x_3+x_4}{2},\\ c'' &= \pm\frac{x_1+x_3}{2} = \mp\frac{x_2+x_4}{2},\\ c''' &= \pm\frac{x_1+x_4}{2} = \mp\frac{x_2+x_3}{2}.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

84. D'après le théorème du n° **8**, et eu égard à la proposition qui précède, *les sommets que les coniques déférentes ont sur l'axe de symétrie sont conjugués harmoniques des centres d'inversion considérés par couples*. On a, par suite,

$$c'^2 = \lambda''\lambda''', \quad c''^2 = \lambda'\lambda''', \quad c'''^2 = \lambda'\lambda''. \tag{19}$$

Les formules (18) et (19) permettent de déterminer les sommets des coniques sur l'axe de symétrie, lorsqu'on connaît les quatre sommets de la spirique, ou bien les centres d'inversion et le point G.

85. Éliminant ω entre les équations (14) et (17), on trouve

$$a^2 = c^2\left(1 - \frac{\lambda}{e}\right). \tag{20}$$

Eu égard aux équations (19), on peut écrire

$$c^2 - a^2 = \frac{\lambda'\lambda''\lambda'''}{e}. \tag{21}$$

Si les sommets d'une spirique variable sont fixes, et que le point équatorial parcoure l'axe de symétrie, une quelconque des coniques déférentes passera d'un genre à un autre quand le point équatorial sera soit au centre d'inversion qui lui correspond, soit au centre G *des moyennes distances; l'abscisse du point équatorial et le binôme* $(c^2 - a^2)$ *qui détermine la position des foyers communs des spiriques changeront de signe en même temps*.

On reconnaît par l'équation (20) qu'*une conique déférente est une hyperbole lorsque le point équatorial est entre le centre d'inversion qui lui correspond et le centre* G *des moyennes distances*.

86. Quand le point équatorial est à l'infini, la spirique est une cartésienne (n° **63**). L'équation (20) montre que, dans ce cas, les coniques déférentes sont des cercles.

L'enveloppe d'un cercle variable dont le centre parcourt un second *cercle, et qui, dans toutes ses positions, coupe normalement un troisième cercle, est une cartésienne.*

Une cartésienne est de trois manières différentes l'enveloppe d'un cercle dont le centre parcourt un second cercle, et qui reste constamment normal à un troisième cercle.

Dans ce mode de génération, on reconnaît que la cartésienne a des rebroussements à l'infini, par l'observation finale du n° **48**.

87. Quand le point équatorial est au centre des moyennes distances, e est nul, et l'équation (20) donne pour a une grandeur infinie. Chaque déférente se compose alors de deux droites perpendiculaires à l'axe de symétrie. Les cercles normaux au cercle d'inversion, et qui ont leur centre sur l'une des deux droites, se coupent en deux points fixes. Un de ces cercles se réduit à l'axe, et la construction du n° **40** montre que cette droite tout entière fait partie de l'enveloppe. En résumé, on trouve deux fois une droite et quatre points situés sur elle.

88. On peut mener quatre tangentes communes à un cercle d'inversion et à la déférente correspondante; leurs points de contact avec le cercle sont des sommets de la spirique (n° **50**). Nous voyons ainsi qu'en outre des sommets qu'elle possède sur son axe, la spirique en a douze autres répartis quatre par quatre sur les trois cercles d'inversion. Chaque point de la spirique ayant tous ses réciproques sur cette courbe, les quatre sommets qui appartiennent à un même cercle d'inversion forment un groupe, et jouissent des propriétés qui ont été signalées aux n^{os} **22**, **23** et **24**.

Étude des cas dans lesquels les tores ordinaires qui passent par une spirique donnée sont réels.

89. Pour que les tores d'un couple soient réels, il faut d'abord que les centres des cercles méridiens situés dans le plan de la spirique aient des projections réelles, et, par suite, que l'abscisse c soit réelle.

Eu égard aux valeurs (18) et à l'expression du coefficient du second terme de l'équation (4) de l'Introduction, lorsque c est réel, l'abscisse λ l'est aussi. Cette abscisse détermine le point O où se croisent les axes des deux tores considérés.

En vertu de l'équation (14), les plans équatoriaux et les axes des tores n'existent que quand le point E et le centre d'inversion O sont de côtés différents du centre G des moyennes distances.

Lorsque les conditions qui viennent d'être indiquées sont satisfaites, les axes des deux tores et les centres des cercles méridiens sont réels; si donc la spirique a des sommets réels, les tores existeront, mais dans le cas contraire, il sera nécessaire de reconnaître si les rayons des cercles méridiens sont réels.

90. Soient b', b'', b''' les rayons des méridiens pour les tores des trois couples; C le centre de l'un des deux cercles qu'un tore du premier couple possède dans le plan principal de la spirique, a_{12} le milieu du segment $a_1 a_2$. On a

$$b'^2 = \overline{Ca_{12}}^2 + \overline{a_1 a_{12}}^2,$$

d'où

$$b'^2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - e\right)^2 \operatorname{tang}^2\omega' + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2;$$

x_1 et x_2 sont les deux valeurs de x données par l'équation (10) du n° **27**. On a, en conséquence,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{\lambda''\lambda'''}, \quad \frac{x_1 - x_2}{2} = \sqrt{\lambda'(\lambda'' + \lambda''') - 2\lambda'\sqrt{\lambda''\lambda'''}}.$$

Introduisant ces valeurs dans l'expression de b'^2, et remplaçant $\operatorname{tang}^2\omega'$ par $-\frac{\lambda'}{e}$ (n° **77**), j'obtiens la première des équations suivantes (les deux autres sont données par des permutations) :

$$(22) \qquad \begin{cases} b'^2 = -\dfrac{\lambda'}{e}(e - \lambda'')(e - \lambda'''), \\ b''^2 = -\dfrac{\lambda''}{e}(e - \lambda')(e - \lambda'''), \\ b'''^2 = -\dfrac{\lambda'''}{e}(e - \lambda')(e - \lambda''). \end{cases}$$

Les sommets sur l'axe étant fixes, si le point équatorial se meut, le carré du rayon des cercles méridiens des tores d'un couple change de signe, quand ce point passe au centre des moyennes distances, à l'infini, et aux centres d'inversion où se croisent les axes des tores des autres couples.

91. Quand le point équatorial est à un centre d'inversion, à O'' par exemple, b' et b''' sont nuls et les tores des premier et troisième couples sont réduits à des cercles réels ou imaginaires. J'examinerai plus loin ces circonstances avec quelques détails; ici je me borne à remarquer que les deux cercles qui forment alors la spirique (n° **66**) peuvent être imaginaires et se couper en deux points réels. Ces points sont les intersections du plan de la courbe par les cercles qui remplacent les tores.

Le point E étant supposé en O'', b'' peut être réel, mais en appliquant la construction du n° **79**, on voit que les axes sont imaginaires. J'éloigne le cas où le centre des moyennes distances G coïnciderait aussi avec O'' (n° **98**).

92. Lorsque le point équatorial est à l'infini, la valeur de ω donnée par l'équation (14) est nulle, et, par suite, les axes des tores sont perpendiculaires au plan de la courbe. On obtient d'ailleurs, par les équations (22), des grandeurs infinies pour les trois rayons b', b'' et b'''.

Chacun des six tores qui passent par une spirique cartésienne, se décompose en quatre fois le plan de cette ligne.

93. Eu égard à l'équation (16), quand e est nul, c'est-à-dire quand le point équatorial coïncide avec le centre G, la courbe se décompose en deux fois son axe et deux fois la ligne de l'infini. Nous avons vu au n° **87** que la spirique comprend de plus quatre points sur son axe, et ce résultat sera établi plus loin d'une nouvelle manière (n° **110**).

L'équation (14) montre que, dans ce cas, les axes des tores sont confondus avec l'axe de symétrie de la courbe. Chaque tore se compose de cet axe considéré comme un cylindre de révolution de rayon nul, et de deux fois le plan de l'infini.

Tangentes doubles.

94. L'équation des tangentes doubles perpendiculaires à l'axe a été donnée au n° **65**. En y faisant p nul, on a

$$(q - r)x^2 + sx + \left(t - \frac{r^2}{4}\right) = 0.$$

Comme nous supposerons la spirique donnée par ses sommets sur l'axe et par son point équatorial, il convient d'éliminer r à l'aide de l'équation (12); on obtient

$$ex^2 - 2e^2x - 2\frac{e^2t}{s} + \frac{1}{8s}(2qe + s)^2 = 0.$$

La condition pour que les deux tangentes coïncident est

$$e^4 + e\left[2\frac{e^2t}{s} - \frac{1}{8s}(2eq + s)^2\right] = 0;$$

en développant, on obtient

$$e\left(e^3 + \frac{4t - q^2}{2s}e^2 - \frac{q}{2}e - \frac{s}{8}\right) = 0;$$

ou bien

$$e(e - \lambda')(e - \lambda'')(e - \lambda''') = 0.$$

Si les sommets sur l'axe sont fixes et le point équatorial mobile, les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe coïncideront lorsque ce point sera confondu avec l'un des trois centres d'inversion, ce que nous avons déjà reconnu (n° **66**), et aussi lorsqu'il sera réuni au point G centre des moyennes distances et origine des abscisses. Dans ce dernier cas, les deux tangentes doubles se trouveront à l'infini.

L'axe est donc divisé par les points O', O'', O''' et G en quatre segments tels, que quand le point équatorial est sur l'un ou l'autre de deux d'entre eux, les tangentes doubles que nous considérons sont réelles, tandis qu'elles deviennent imaginaires quand le pointé quatorial passe sur un des deux autres segments.

95. Les plans qui touchent les tores et qui sont respectivement parallèles aux plans équatoriaux coupent le plan de la spirique suivant les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe de symétrie (n° **59**). Ces tangentes sont nécessairement réelles quand les tores d'un couple sont réels.

96. D'après le théorème du n° **43**, les six tangentes doubles qui ne sont pas perpendiculaires à l'axe (n° **59**), passent deux à deux par les trois centres d'inversion, et sont respectivement perpendiculaires aux asymptotes des coniques déférentes.

97. Je n'examinerai pas les circonstances dans lesquelles une ou plusieurs des tangentes doubles sont réelles et idéales, parce que cette discussion conduit à distinguer dans la spirique un trop grand nombre de variétés, et introduit ainsi dans cette question une complication qui en diminue l'intérêt. Le problème, du reste, ne présente pas de difficulté au point de vue théorique.

Lorsqu'une conique déférente est une hyperbole, si le cercle d'inversion coupe une de ses asymptotes, la tangente double perpendiculaire est réelle et idéale (nº **40**).

En partant de l'équation de la spirique considérée comme une anallagmatique, on obtient une expression simple pour l'abscisse de la position qu'occupe le point équatorial lorsque les deux points de contact d'une tangente double perpendiculaire à l'axe coïncident. On détermine ainsi les segments de l'axe sur l'un desquels se trouve le point équatorial lorsque les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont réelles et idéales.

Observations sur la spirique à centre.

98. Le coefficient p étant nul, si s l'est aussi, la spirique a un centre; elle possède alors deux axes de symétrie et deux plans principaux. Plusieurs des formules que j'ai obtenues ne sont pas applicables à ce cas. Il doit être entendu que p et s ne sont pas nuls en même temps.

Je consacrerai un Chapitre à l'étude des propriétés de la spirique à centre.

D'après l'équation (15) aucune valeur de λ n'est nulle quand s n'est pas nulle. Cette équation a été établie dans la supposition que l'origine se trouve au centre des moyennes distances. Nous voyons donc que, dans la spirique à un seul axe, ce centre ne peut pas coïncider avec un centre d'inversion.

(La suite prochainement.)