JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5\ (\textbf{mod.}12)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 7-8.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__7_0>

Théorème concernant les nombres entiers $\equiv 5 \pmod{12}$;

Par M. J. LIOUVILLE.

Il s'agit encore cette fois de la fonction

$$F(k)$$

par laquelle s'exprime le nombre des classes de formes quadratiques binaires (primitives ou non) de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

Soient m un entier donné $\equiv 5 \pmod{12}$, d un quelconque des diviseurs de m et δ le diviseur conjugué à d, en sorte que l'on ait

$$m = d\delta.$$

Introduisons la notation connue

$$\left(\frac{a}{b}\right)$$

de Legendre, en lui attribuant la signification plus étendue admise depuis Jacobi, et calculons la somme

$$\sum \left(\frac{3}{\delta}\right) d. \tag{1}$$

Ensuite considérons cette autre somme

$$\sum{}' F\left(\frac{2m - i^2}{3}\right), \tag{2}$$

où l'on devra prendre pour i les valeurs impaires $1, 5, 7, 11, \ldots$, toutes premières à 3 (circonstance que j'indique par un accent sur le signe sommatoire), en s'arrêtant au moment où l'entier placé sous le signe F deviendrait négatif; je dis *l'entier*, car dans les circonstances où l'on se place la division par 3 s'effectue toujours.

Cela étant, notre théorème consiste en ce que la somme (1) est quadruple de la somme (2). En d'autres termes, on a toujours, sous les conditions énoncées :

$$\text{(A)} \qquad \sum{}' F\left(\frac{2m - i^2}{3}\right) = \frac{1}{4}\sum\left(\frac{3}{\delta}\right) d.$$

Je me bornerai aux deux exemples les plus simples, en faisant $m = 5$, puis $m = 17$.

Pour $m = 5$, la formule (A) donne $F(3) = 1$, résultat exact. Pour $m = 17$, on en déduit

$$F(11) + F(3) = \frac{1}{4}(17 - 1) = 4,$$

partant $F(11) = 3$, ce qui est exact aussi. Le lecteur peut continuer tant qu'il lui plaira ces vérifications faciles.