JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 65-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__65_0>

Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Si on se propose de trouver le mouvement de la température dans un cylindre droit dont la base est donnée, ainsi que la hauteur, et dont la surface est entretenue à une même température ou rayonne dans un milieu d'une température donnée, on commencera par résoudre ce problème dans la supposition que ce cylindre est indéfini, et que la température initiale est la même tout le long d'une droite parallèle aux génératrices. Alors on passera de ce cas particulier au cas proposé en suivant constamment la même marche, quelle que soit la nature de la section, et comme Poisson a traité ce problème dans toute sa généralité pour le cylindre de révolution, dans le XIX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* il a donné cette méthode très-simple d'ailleurs, sur laquelle il est inutile de revenir.

Ainsi, voulant étudier le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres droits circulaires excentriques, ou entre deux cylindres droits dont les bases sont des lemniscates de mêmes pôles, il nous suffit de les imaginer indéfinis, et de supposer dans l'intérieur de ce corps la température la même sur une droite parallèle aux génératrices.

Dans toutes les questions de distribution de la chaleur, on commence par chercher une solution dite *simple,* qui ne dépend du temps que par un facteur qui le renferme en exposant, et qui satisfait au problème, abstraction faite des conditions initiales; la solution générale est toujours la somme d'une infinité de ces solutions particulières.

Or, dans tous les problèmes traités jusqu'à présent, la solution simple jouit d'une propriété très-remarquable; en effet, dès que l'on adopte les coordonnées thermométriques de M. Lamé, cette solution simple est le produit de deux ou trois facteurs qui contiennent chacun une seule des deux ou trois coordonnées thermométriques. C'est ce que l'on reconnaît quand on considère la distribution de la chaleur dans une sphère ou dans un cylindre de révolution; questions traitées par Fourier dans un cas particulier, et étudiées dans toute leur généralité par Laplace et Poisson. C'est le résultat auquel est arrivé M. Lamé, quand il a résolu le problème de l'équilibre de température dans l'ellipsoïde; c'est ce que l'on trouverait encore pour le mouvement de la température dans le cylindre elliptique [*] et dans l'ellipsoïde, si on suppose toutefois dans ces deux dernières questions que les surfaces sont entretenues à une même température, mais non plus si elles rayonnent dans leur milieu; ce qui amène une distinction que l'on n'avait pas à faire pour la sphère et le cylindre de révolution.

Cette propriété de la solution simple donne une grande facilité pour la déterminer; car dès que cette forme est admise, on reconnaît que les facteurs qui la composent satisfont chacun à une équation différentielle du second ordre, et l'étude de la solution simple est ramenée à celle de ces équations différentielles et à la détermination de certaines constantes qui y entrent, et qu'on obtient par des conditions relatives à la surface du corps, ou par l'obligation de la solution à satisfaire à certaine lois de périodicité.

Mais, lorsqu'on considère d'autres corps, la solution simple n'a plus cette forme élégante, même lorsque la surface est entretenue à une même température, et sa recherche présente une difficulté d'un genre nouveau, que nous allons résoudre pour les deux corps cités.

Comme ce sujet ne peut pas être appliqué à la recherche des lois de

[*] La solution du problème de la distribution de la chaleur dans un cylindre elliptique dont la surface est entretenue à une même température, est la même que celle qui concerne le mouvement vibratoire d'une membrane elliptique, avec cette seule différence que les exponentielles relatives au temps sont remplacées par des sinus et cosinus. Si la surface du cylindre rayonne, la solution se déterminera d'après la méthode de ce Mémoire.

la nature, et que les solutions n'ont pas besoin d'être confirmées par l'expérience, nous ne développerons les calculs que jusqu'au point nécessaire pour faire comprendre les méthodes.

Distribution de la chaleur dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques.

1. Prenons trois axes rectangulaires des x, y, z, et l'axe des z parallèle aux génératrices du cylindre; la température v, si elle ne varie pas avec z, satisfait à l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=k\frac{dv}{dt}.$$

Pour obtenir une solution simple, posons

$$v=ue^{-\frac{m^2}{k}t},$$

u sera donné par l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=-m^2u. \tag{1}$$

Aux coordonnées x et y substituons les deux autres α et β, au moyen des équations

$$x=c\frac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta},\quad y=\frac{2c\sin\beta}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta}, \tag{2}$$

employées par M. Lamé dans ses *Leçons sur les Coordonnées curvilignes*, XII^e leçon. $\alpha=$ const. représente une famille de cercles qui passent tous par deux mêmes points imaginaires; $\beta=$ const. représente une autre famille de cercles orthogonaux aux premiers, et qui passent par deux mêmes points réels. Nous supposons que la section droite du corps cylindrique est composée de deux des cercles α.

Par la substitution indiquée, l'équation (1) devient

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}+\frac{d^2u}{d\beta^2}=-\frac{4m^2c^2}{(e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta)^2}u, \tag{3}$$

et u devra satisfaire aussi à cette condition, de reprendre la même valeur pour des valeurs de α et de β, qui désignent un même point : or, d'après les formules (2), x et y restent les mêmes quand on augmente β de 2π; donc u doit être périodique par rapport à β, et avoir la période 2π.

Posons

$$\alpha = -\varepsilon + a,$$

a étant positif, et faisons

$$e^{-a} = \tau, \quad 2c\tau = f;$$

cette équation deviendra

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2 f^2 e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^2}\,u. \tag{4}$$

Si on fait la même transformation sur les équations (2), et qu'on transporte l'origine des coordonnées au point dont l'abscisse est c, et l'ordonnée o, on verra qu'en supposant $\tau = 0$ et $c = \infty$, de manière que $2c\tau = f$ soit fini, les cercles α deviennent concentriques.

Changer le signe de α revient à changer la direction des x positifs; on peut donc regarder α comme positif pour tous les points situés dans l'intervalle des deux cercles; prenons pour le cercle intérieur de la section

$$\varepsilon = 0,$$

nous fixons ainsi la valeur de a qui sera la valeur de α pour ce cercle. a est la plus grande valeur que prenne α dans l'intervalle des deux cercles de contour, donc ε est positif dans cet intervalle.

On doit remarquer qu'en faisant ε nul sur le contour intérieur, nous obtenons pour τ, qui est déjà au-dessous de l'unité, une valeur plus petite que si nous avions pris ε égal à zéro sur le contour extérieur.

2. Nous avons à imaginer que les deux surfaces cylindriques qui limitent le corps soient entretenues à une même température, ou qu'elles rayonnent dans un milieu dont la température est invariable.

Commençons par la première supposition, pour laquelle les calculs se présentent un peu plus simplement; la surface cylindrique $\varepsilon = 0$ est entretenue à une température que l'on peut prendre pour le zéro de l'échelle thermométrique; u sera donc nul pour $\varepsilon = 0$, et en le développant suivant les puissances de ε, nous pouvons poser

$$(5) \qquad u = H_1 \varepsilon + H_2 \varepsilon^2 + H_3 \varepsilon^3 + H_4 \varepsilon^4 + \ldots,$$

en regardant H_1, H_2,... comme des fonctions de β seul. Développons

$$Z = e^{2\varepsilon}(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-2},$$

suivant les puissances de ε, et écrivons

$$(6) \qquad Z = Z_0 + Z'_0 \varepsilon + Z''_0 \frac{\varepsilon^2}{1.2} + \ldots.$$

Or, on a

$$(1 - 2z\cos\beta + z^2)^{-2} = \left(1 - ze^{\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2}\left(1 - ze^{-\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2},$$

puis

$$\left(1 - ze^{\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2} = 1 + 2ze^{\beta\sqrt{-1}} + 3z^2 e^{2\beta\sqrt{-1}} + \ldots + nz^{n-1} e^{(n-1)\beta\sqrt{-1}} + \ldots,$$
$$\left(1 - ze^{-\beta\sqrt{-1}}\right)^{-2} = 1 + 2ze^{-\beta\sqrt{-1}} + \ldots + nz^{n-1} e^{-(n-1)\beta\sqrt{-1}} + \ldots.$$

En faisant le produit de ces deux séries, on obtient

$$(1 - 2z\cos\beta + z^2)^{-2} = Q_0 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \ldots,$$

si l'on pose

$$\frac{1}{2} Q_n = (n+1)\cos n\beta + 2n\cos(n-2)\beta$$
$$+ 3(n-1)\cos(n-4)\beta + 4(n-2)\cos(n-6)\beta + \ldots,$$

où $\frac{(n+2)^2}{8}$ est le dernier terme, si n est pair, et $\frac{(n+1)(n+3)}{4}\cos\beta$, si n est impair. Les premières valeurs de Q_n sont

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 4\cos\beta, \quad Q_2 = 6\cos 2\beta + 4,$$
$$Q_3 = 8\cos 3\beta + 12\cos\beta, \quad Q_4 = 10\cos 4\beta + 16\cos 2\beta + 9, \ldots.$$

On a alors

$$Z = Q_0 e^{2\varepsilon} + Q_1 \tau e^{3\varepsilon} + Q_2 \tau^2 e^{4\varepsilon} + Q_3 \tau^3 e^{5\varepsilon} + \ldots,$$

et on en déduit, pour les coefficients du développement de Z,

$$Z_0 = Q_0 + Q_1 \tau + Q_2 \tau^2 + Q_3 \tau^3 + \ldots,$$

et, en général,

$$Z_0^{(n)} = 2^n Q_0 + 3^n Q_1 \tau + 4^n Q_2 \tau^2 + 5^n Q_3 \tau^3 + \ldots.$$

Substituons les développements (5) et (6) dans l'équation (4), et nous en déduirons

$$H_2 = 0, \quad 3.2 H_3 + \frac{d^2 H_1}{d\beta^2} = - m^2 f^2 Z_0 H_1,$$

$$4.3 H_4 + \frac{d^2 H_2}{d\beta^2} = - m^2 f^2 (Z_0 H_2 + Z'_0 H_1),$$

$$5.4 H_5 + \frac{d^2 H_3}{d\beta^2} = - m^2 f^2 \left(Z_0 H_3 + Z'_0 H_2 + \frac{Z''_0 H_1}{1.2}\right),$$

$$6.5 H_6 + \frac{d^2 H_4}{d\beta^2} = - m^2 f^2 \left(Z_0 H_4 + Z'_0 H_3 + \frac{Z''_0 H_2}{1.2} + \frac{Z'''_0 H_1}{1.2.3}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il résulte de ces formules que H_1, H_2, H_3,... dépendent d'une seule fonction de β, qui est H_1, et nous allons la déterminer par les conditions que u ait la période 2π, et satisfasse à une seconde condition aux limites.

5. Supposons d'abord que τ soit très-petit, en sorte que l'on puisse négliger son carré; alors les deux cylindres seront très-peu excentriques.

Remarquons que pour $\tau = 0$, H_1 peut se réduire à $A \sin g\beta$, et posons

$$H_1 = A \sin g\beta + \tau [a \sin (g+1)\beta + b \sin (g-1)\beta].$$

Comme H doit avoir la période 2π, il faut que g soit un nombre entier, et nous allons prouver que l'on peut choisir a et b de manière que u satisfasse à la seconde condition aux limites.

Dès que nous admettons pour H_1 l'expression précédente, il nous est aisé de former H_2, H_3, $H_4, \ldots$, et comme dans leur calcul nous devons réduire les fonctions Z_0, Z'_0, $Z''_0, \ldots$ aux termes en τ^0 et τ, elles seront de la forme

$$2^n + 4 \cdot 3^n \tau \cos\beta.$$

Il en résulte que les expressions de H_2, H_3, $H_4, \ldots$ seront toutes de la forme

$$A' \sin g\beta + \tau[a' \sin(g+1)\beta + b' \sin(g-1)\beta],$$

aussi bien que H. En faisant les calculs, on trouve

$$\begin{aligned}
6H_2 &= A(g^2 - m^2 f^2) \sin g\beta \\
&\quad + \tau\left[\left(\overline{g+1}^2 - m^2 f^2\right) a - 2m^2 f^2 A\right] \sin(g+1)\beta \\
&\quad + \tau\left[\left(\overline{g-1}^2 - m^2 f^2\right) b - 2m^2 f^2 A\right] \sin(g-1)\beta, \\
6H_3 &= -A m^2 f^2 \sin g\beta - \tau m^2 f^2 (a + 3A) \sin(g+1)\beta \\
&\qquad - \tau m^2 f^2 (b + 3A) \sin(g-1)\beta, \\
20 H_4 &= A \frac{(m^2 f^2 - g^2)^2 - 12 m^2 f^2)}{6} \sin g\beta \\
&\quad + \frac{\tau}{6}\left\{\left[\left(\overline{g+1}^2 - m^2 f^2\right)^2 - 12 m^2 f^2\right] a \right. \\
&\qquad \left. - m^2 f^2 (4g^2 - 4m^2 f^2 + 4g + 56) A\right\} \sin(g+1)\beta \\
&\quad + \frac{\tau}{6}\left\{\left[\left(\overline{g-1}^2 - m^2 f^2\right)^2 - 12 m^2 f^2\right] b \right. \\
&\qquad \left. - m^2 f^2 (4g^2 - 4m^2 f^2 - 4g + 56) A\right\} \sin(g-1)\beta,
\end{aligned}$$

. . . .

Comme la surface extérieure $\varepsilon = h$ est entretenue à la température zéro, de même que la surface intérieure, nous aurons à satisfaire à l'équation

$$(7) \qquad H_1 h + H_3 h^3 + \ldots = 0,$$

et si on remplace H_1, H_3, H_4,... par leurs valeurs, on aura une équation de cette forme

$$L \sin g\beta + M \sin(g+1)\beta + M' \sin(g-1)\beta = 0,$$

qui entraîne les trois suivantes

$$L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0.$$

De la première on tirera l'inconnue m, puis des deux autres les inconnues a et b.

Supposons ensuite que τ ne soit pas assez petit pour que l'on puisse négliger τ^2, mais qu'il soit permis de ne point tenir compte des termes en τ^3; puis posons

$$\begin{aligned} H_1 = A \sin g\beta &+ \tau\,[a_1 \sin(g+1)\beta + b_1 \sin(g-1)\beta] \\ &+ \tau^2[a_2 \sin(g+2)\beta + b_2 \sin(g-2)\beta], \end{aligned}$$

a_1, b_1, a_2, b_2,... pouvant dépendre de τ, mais ne le contenant ni en facteur, ni en diviseur.

Dans le calcul de H_2, H_3,..., on réduira les fonctions Z_0, Z'_0,... à leurs trois premiers termes qui seront de la forme

$$l_0 + l_1 \cos\beta . \tau + (l_2 + l_3 \cos 2\beta)\tau^2,$$

l_0, l_1, l_2, l_3 désignant des nombres constants; on en conclut aisément que H_2, H_3,... seront encore de même forme que H_1. Et en portant leurs expressions dans l'équation (7), on aura une équation telle que

$$\begin{aligned} L \sin g\beta &+ M \sin(g+1)\beta + M' \sin(g-1)\beta \\ &+ N \sin(g+2)\beta + N' \sin(g-2)\beta = 0, \end{aligned}$$

de laquelle on déduit

$$L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0.$$

Ces équations sont du premier degré par rapport à a_1, a_2, b_1, b_2, on les tirera des quatre dernières pour les porter dans la première, qui donnera m; de sorte que l'on en déduira aisément la valeur de H_1.

Cependant, dans ce qui précède, il faut supposer que g soit > 2. Si g était égal à l'unité, on prendrait pour l'expression de H_1

$$H_1 = A\sin\beta + \tau a_1 \sin 2\beta + \tau^2 a_2 \sin 3\beta,$$

H_2, H_3,... seraient de même forme, et la condition (7) conduirait à une équation qui renfermerait des termes en $\sin\beta$, $\sin 2\beta$ et $\sin 3\beta$, et qui se décomposerait en trois autres. Au moyen de ces trois équations on déduira les inconnues m, a_1, a_2.

Si g est égal à 2, on prendra pour l'expression de H_1

$$H_1 = A\sin 2\beta + \tau(a_1 \sin 3\beta + b\sin\beta) + \tau^2 a_2 \sin 4\beta.$$

4. Maintenant on reconnaît sans peine que H peut toujours se mettre sous la forme d'une série infinie

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} H_1 = A\sin g\beta &+ \tau[a_1 \sin(g+1)\beta + b_1 \sin(g-1)\beta] \\ &+ \tau^2[a_2 \sin(g+2)\beta + b_2 \sin(g-2)\beta] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \tau^{g-1}[a_{g-1}\sin(2g-1)\beta + b_{g-1}\sin\beta] \\ &+ \tau^g a_g \sin 2g\beta + \tau^{g+1} a_{g+1}\sin(2g+1)\beta + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et on voit en même temps comment on pourra obtenir H_1 et la fonction u avec telle approximation qu'on voudra, d'après l'équation (7). Comme toute fonction impaire de β, continue et qui a la période 2π, peut être représentée pour une valeur quelconque de β par une série de sinus de multiples de β, et d'une seule manière, il est aisé de comprendre que la série qui donne H_1 est toujours convergente.

Dans l'expression de H_1 il n'entre que des sinus; en supposant que H_1 se réduise à $A\cos g\beta$ pour $\tau = 0$, on mettra de même cette fonction sous cette forme

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} H_1 = A\cos g\beta &+ \tau[a_1 \cos(g+1)\beta + b_1 \cos(g-1)\beta] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \tau^{g-1}[a_{g-1}\cos(2g-1)\beta + b_{g-1}\cos\beta] \\ &+ \tau^g a_g \cos 2g\beta + \tau^{g+1} a_{g+1}\cos(2g+1)\beta + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et on sera conduit aux mêmes calculs que lorsqu'on prend pour cette fonction une série de sinus.

Si τ est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en τ^g et les puissances supérieures de τ, il est aisé de reconnaître que l'on trouvera pour m et les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{g-1}, b_{g-1}$ les mêmes valeurs, soit qu'on adopte pour H l'expression (a), soit au contraire l'expression (b). Mais si l'on doit tenir compte de ces termes, la quantité m et les coefficients $a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots$ ont des valeurs différentes; de sorte que l'on ne peut prendre la somme des deux valeurs correspondantes de u pour en faire une solution de l'équation (4).

5. Supposons maintenant que l'une des deux surfaces ou toutes les deux rayonnent dans un milieu à la température zéro; nous allons voir que la méthode de solution reste la même.

Le flux de chaleur qui traverse la surface est proportionnel à l'excès de la température du corps sur celle du milieu ambiant, et ce flux a aussi pour expression $-dv$ divisé par l'élément de la normale à la surface; cet élément a pour valeur

$$-\frac{d\alpha}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2}}=\frac{-2c\,d\alpha}{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta},$$

s'il est mené en dehors de la surface; il doit être pris avec un signe contraire, s'il est mené à l'intérieur. On a donc

$$\frac{e^\alpha+e^{-\alpha}-2\cos\beta}{2c}\,\frac{dv}{d\alpha}\mp lv=0,$$

suivant qu'il s'agit de la surface extérieure ou de la surface intérieure.

Remettons la variable ε dans cette équation; puis mettons, comme il est permis, u au lieu de v, nous obtiendrons

$$(8)\qquad (e^{-\varepsilon}-2\tau\cos\beta+\tau^2e^{\varepsilon})\frac{du}{d\varepsilon}\pm flu=0.$$

Si cette équation a lieu à la surface $\varepsilon=0$, posons

$$u=U+U_1\varepsilon+U_2\varepsilon^2+U_3\varepsilon^3+\ldots,$$

et nous aurons pour la première condition des limites

$$(9)\qquad (1 - 2\tau \cos\beta + \tau^2) U_1 - f l U = 0.$$

Substituons cette série à la place de u dans l'équation (4), et nous aurons

$$2U_2 + \frac{d^2U}{d\beta^2} = -m^2 f^2 U,$$
$$3.2U_3 + \frac{d^2U_1}{d\beta^2} = -m^2 f^2 (Z_0 U_1 + Z'_0 U),$$
$$4.3U_4 + \frac{d^2U_2}{d\beta^2} = -m^2 f^2 \left(Z_0 U_2 + Z'_0 U_1 + Z''_0 \frac{U}{1.2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il résulte encore de ces équations et de l'équation (9) que toutes les fonctions U, U_1, U_2,... peuvent être exprimées au moyen de la seule U_1. On prendra pour U_1 ou la série (a) ou la série (b), et les fonctions U, U_2, U_3,... seront des séries toutes semblables.

Restera à satisfaire à l'équation (7) ou à l'équation (8), dans laquelle on met h au lieu de ε; or on pourra agir comme dans la solution précédente et calculer les coefficients de U_1 avec l'approximation que l'on voudra.

6. L'état calorifique du corps résulte de la superposition d'une infinité des états simples que nous venons de calculer.

Soient u et u' deux solutions simples qui satisfont aux équations

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = \frac{-m^2 f^2 e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^2} u,$$
$$\frac{d^2u'}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u'}{d\beta^2} = \frac{-m'^2 f^2 e^{2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^2} u'.$$

Multiplions ces équations par u' et u et retranchons; nous aurons

$$u'\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} - u\frac{d^2u'}{d\varepsilon^2} + u'\frac{d^2u}{d\beta^2} - u\frac{d^2u'}{d\beta^2}$$
$$= -f^2(m^2 - m'^2)\frac{e^{2\varepsilon}uu'}{(1 - 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^2}.$$

Multiplions par $d\varepsilon d\beta$ et intégrons par rapport à ε de o à h, et par rapport à β de o à 2π; nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\left[u'\frac{du}{d\varepsilon}-u\frac{du'}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=h}d\beta+\int_0^h\left[u'\frac{du}{d\beta}-u\frac{du'}{d\beta}\right]_{\beta=0}^{\beta=2\pi}d\alpha$$
$$=-f^2(m^2-m'^2)\int_0^h\int_0^{2\pi}e^{2\varepsilon}uu'(1-2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta+\tau^2e^{2\varepsilon})^{-2}d\varepsilon d\beta.$$

Le seconde quantité entre crochets est nulle, parce que u et u' ont la période 2π, et la première quantité entre crochets est nulle aussi, soit qu'aux limites u et u' s'annulent, soit qu'ils satisfassent à l'équation (8).

Les aires représentées par les intégrales du premier membre sont donc nulles aussi, et on a

$$(10)\qquad \int_0^h\int_0^{2\pi}e^{2\varepsilon}uu'(1-2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta+\tau^2e^{2\varepsilon})^{-2}d\varepsilon d\beta=0.$$

On prendra pour v

$$v=\sum\sum \mathrm{A}u(g,m)e^{\frac{-m^2}{k}t}+\sum\sum \mathrm{B}u'(g,m')e^{\frac{-m'^2}{k}t},$$

en désignant par $u\,(g,m)$ la solution en série de sinus qui dépend des deux quantités g et m, par $u'\,(g,m')$ la solution en série de cosinus qui dépend de g et m', et les deux signes de sommation se rapportent l'un aux valeurs entières de g depuis zéro jusqu'à l'infini, l'autre au nombre infini de valeurs que prend m pour chaque valeur de g. On déterminera les coefficients A, B par un calcul bien connu d'après l'état initial et en s'appuyant sur la formule (10).

7. Faisons quelques remarques au sujet des expressions trouvées pour u.

Il est bon d'abord de noter que pour $g=0$ la série de sinus qui donne u s'annule.

Si on considère une membrane dont les deux contours soient des cercles excentriques, le déplacement vibratoire des points de cette membrane sera exprimé par le produit de u du n° **2** par le sinus ou le cosinus d'un arc proportionnel au temps.

Les lignes nodales de cette membrane rencontrent les deux contours circulaires à angle droit. En effet, $\varepsilon = 0$ étant l'équation du cercle intérieur, u est de la forme

$$u = H_1 \varepsilon + H_3 \varepsilon^3 + \ldots,$$

$U_1, U_3, \ldots$ désignant des fonctions de β. Supposons ε très-petit, u s'annulera pour les racines β de l'équation

$$H_1 + H_3 \varepsilon^2 + \ldots = 0,$$

et pour avoir la direction de la tangente à une ligne nodale sur le cercle $\varepsilon = 0$, il faudra négliger les termes en ε^2, et, comme les termes en ε manquent, l'équation se réduit à

$$H_1 = 0$$

et ne contient que β. Donc les éléments de ces courbes se confondent près du cercle $\varepsilon = 0$ avec ceux des cercles β et sont normaux au premier cercle.

Comme le cercle du contour extérieur pourrait être aussi représenté par $\varepsilon = 0$, on a à son égard les mêmes conclusions.

Dans le cas où les deux cercles de contour ont le même centre, on sait que les lignes nodales se confondent avec des cercles α qui deviennent concentriques et avec des cercles β qui deviennent des diamètres des premiers. Il est naturel de se demander si la même propriété subsiste dans le cas général, mais elle n'existe plus; toutefois il nous suffit d'indiquer cette absence de propriété.

Cylindre circulaire plein.

8. On ne peut appliquer les calculs précédents lorsque le cylindre circulaire cesse d'être annulaire pour devenir plein. Il est vrai que l'on sait trouver le mouvement de la température dans un cylindre de révolution et que les coordonnées polaires habituelles sont alors de beaucoup les plus commodes. Mais il est important pour la philosophie de la science de voir comment on traiterait cette question en conservant les coordonnées α et β et de rechercher ce que devient la solution simple. Nous ne nous occuperons toutefois que du cas où la surface extérieure est entretenue à une même température; c'est alors la même question que si on cherchait le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire dont on aurait fixé et rendu horizontal un élément ailleurs qu'au centre. Enfin nous verrons que la solution que nous allons donner est immédiatement applicable au cylindre dont la section droite est une lemniscate ovoïde.

Dans l'équation (3) du n° **1**, faisons

$$\alpha = \varepsilon + a, \quad e^{-a} = \tau, \quad mc\tau = n,$$

elle deviendra

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{4n^2e^{-2\varepsilon}}{(1 - 2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2e^{-2\varepsilon})^2}u.$$

Posons

$$e^{-\varepsilon} = r,$$

nous aurons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dr^2}r^2 + \frac{du}{dr}r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -4n^2r^2(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^{-2}u,$$

dans laquelle τ et r sont < 1.

Ensuite, d'après ce qu'on a vu au n° **2**, on a

$$(2) \qquad (1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2r^2)^{-2} = Q_0 + Q_1\tau r + Q_2\tau^2r^2 + Q_3\tau^3r^3 + \ldots$$

avec

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 4\cos\beta, \quad Q_2 = 6\cos2\beta + 4,$$
$$Q_3 = 8\cos3\beta + 12\cos\beta, \ldots,$$

et cette série est toujours convergente parce que τr est < 1.

Prenons pour g un nombre entier et faisons

$$(3) \qquad u = Pr^g + P_1r^{g+1} + P_2r^{g+2} + \ldots,$$

puis portons cette expression et le second membre de (2) dans l'équation (1), nous obtiendrons cette suite d'équations

$$\frac{d^2P}{d\beta^2} + g^2 P = 0,$$

$$\frac{d^2P_1}{d\beta^2} + (g+1)^2 P_1 = 0,$$

$$\frac{d^2P_2}{d\beta^2} + (g+2)^2 P_2 - 4n^2 P = 0,$$

$$\frac{d^2P_3}{d\beta^2} + (g+3)^2 P_3 - 4n^2 P_1 - 4n^2\tau P Q_1 = 0,$$

$$\frac{d^2P_4}{d\beta^2} + (g+4)^2 P_4 - 4n^2 P_2 - 4n^2\tau P_1 Q_1 - 4n^2\tau^2 P Q_2 = 0,$$

. . . .

De la première on tire

$$P = A \sin g\beta + A' \cos g\beta;$$

mais pour simplifier l'écriture, réduisons d'abord cette expression à

$$P = A \sin g\beta;$$

et quand nous aurons obtenu l'expression qui en résulte pour u, il nous sera aisé de revenir à l'expression générale. De la seconde équation on tirera

$$P_1 = B \sin (g+1)\beta,$$

B étant un coefficient arbitraire. La troisième donnera

$$P_2 = a \sin g\beta, \quad a = -\frac{n^2 A}{g+1}.$$

Pour résoudre la quatrième, on posera

$$P_3 = b \sin (g+1)\beta + c \sin (g-1)\beta,$$

et on aura

$$b = -\frac{2n^2\tau A + n^2 B}{g+2}, \quad c = -\frac{n^2\tau A}{g+1}.$$

Avant d'aller plus loin, faisons une simplification. Dans ces formules, g désigne un nombre entier comme dans les numéros précédents où nous avons vu que l'expression de u s'annule pour $g = 0$, quand elle se rapporte à un cylindre dont la section droite est composée de deux cercles; cette propriété, devant subsister quelque petit que soit le cercle intérieur, doit avoir encore lieu quand il disparaît. Or, pour arriver à ce résultat, il faut faire $B = 0$; on a donc

$$P = A \sin g\beta, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = -\frac{n^2 A}{g+1} \sin g\beta,$$
$$P_3 = -\frac{2n^2\tau A}{g+2} \sin(g+1)\beta - \frac{n^2\tau A}{g+1} \sin(g-1)\beta.$$

On aura ensuite

$$P_4 = R_1 \sin(g+2)\beta + R_2 \sin g\beta + R_3 \sin(g-2)\beta,$$

avec

$$R_1 = -\frac{3n^2\tau^2 A}{g+3}, \quad R_2 = -\frac{4n^2\tau^2 A + n^2 a}{2(g+2)}, \quad R_3 = -\frac{n^2\tau^2 A}{g+1}.$$

On voit comment on peut calculer successivement les termes de la série qui donne u. Ensuite, si nous reprenons pour P sa première valeur, il faudra à l'expression de u en ajouter une autre qui se déduit de la première en changeant le facteur A en A′ et les sinus en cosinus.

9. Quand on aura poussé le développement assez loin, on n'aura plus qu'une condition à remplir, celle qui est relative à la surface, et il reste une seule indéterminée n pour y satisfaire.

Si on borne u à la serie des sinus, son expression pourra se mettre sous la forme

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{cases} u = U \sin g\beta + \tau\,[U_1 \sin(g+1)\beta + U'_1 \sin(g-1)\beta] \\ \qquad + \tau^2[U_2 \sin(g+2)\beta + U'_2 \sin(g-2)\beta] \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$U, U_1, U'_1, \ldots$ étant des fonctions de r seul, qui dépendent de τ, mais ne le renferment ni en facteur, ni en diviseur, et on a

$$U = A r^g \left\{ 1 - \frac{n^2}{g+1} r^2 + \left[\frac{n^4}{1.2(g+1)(g+2)} - \frac{2n^2\tau^2}{g+2} \right] r^4 - \ldots \right\}.$$

u doit être nul sur le contour extérieur $r = \rho$, quel que soit β; donc, désignant en général U par $U(r, n)$, si on peut satisfaire à cette condition, c'est qu'en choisissant n de manière à satisfaire à

$$U(\rho, n) = 0,$$

on aura une valeur de n qui pour $r = \rho$ annulera toutes les fonctions U_1, U'_1, U_2, $U'_2, \ldots$. Nous allons démontrer cette propriété.

10. Posons, pour simplifier,

$$4n^2 = \varphi,$$

u est donné par l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2u}{dr^2} r^2 + \frac{du}{dr} r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = - \frac{\varphi r^2}{(1 - 2\tau r \cos\beta + \tau^2 r^2)^2} u,$$

et de plus il est assujetti à la condition d'être nul pour $r = \rho$.

Si τ est nul, l'équation précédente devient, en remplaçant φ par Φ,

$$\frac{d^2u}{dr^2} r^2 + \frac{du}{dr} r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = - \Phi r^2 u,$$

et u se réduit au produit de $A \sin g\alpha + A' \cos g\alpha$ par une fonction de r, $Q(r, \Phi)$ qui satisfait à l'équation

$$\frac{d^2Q}{dr^2} r^2 + \frac{dQ}{dr} r + (g^2 - \Phi r^2) Q = 0,$$

et exprimée par la série

$$r^g \left[1 - \frac{\Phi r^2}{4(g+1)} + \frac{\Phi^2 r^4}{1.2.4^2(g+1)(g+2)} - \frac{\Phi^3 r^6}{1.2.3.4^3(g+1)(g+2)(g+3)} + \ldots \right].$$

Comme Q est de plus assujetti à s'annuler pour $r = \rho$, Φ est susceptible d'une infinité de valeurs

$$(a) \qquad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \Phi_3, \ldots,$$

que nous supposerons rangées par ordre de grandeur croissante, et qui sont les racines de l'équation

$$Q(\rho, \Phi) = 0.$$

Imaginons que l'on fasse croître τ à partir de zéro, que l'on se donne la valeur du nombre entier g, et la valeur initiale de φ qui se trouve dans la série (a), enfin que u satisfasse constamment à l'équation (4), et à la condition

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho.$$

Donnons à τ supposé quelconque l'accroissement infiniment petit $\delta\tau$, φ subira une variation $\delta\varphi$, et désignons par $u' = u + \delta u$ ce que devient u.

Nous obtenons l'équation en u' en augmentant le second membre de l'équation (4) de ses différentielles δ par rapport à τ et à φ, et il en résulte

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u'}{dr^2} r^2 + \frac{du'}{dz} r + \frac{d^2u'}{d\beta^2} \\ &\quad = -\left[\frac{(\varphi + \delta\varphi) r^2}{(1 - 2\tau r \cos\beta + \tau^2 r^2)^2} + \frac{4\varphi(r^3\cos\beta - \tau r^4)}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^3} \delta\tau\right] u'. \end{aligned}$$

Multiplions cette équation par u, l'équation (4) par u', et retranchons l'une de l'autre, nous aurons

$$\begin{aligned} &\left(u\frac{d^2u'}{dr^2} - u\frac{d^2u'}{dr^2}\right) r^2 + \left(u\frac{du'}{dr} - u'\frac{du}{dr}\right) r + u\frac{d^2u'}{d\beta^2} - u'\frac{d^2u}{d\beta^2} \\ &\quad = -\frac{r^2uu'}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^2}\delta\varphi - \frac{4\varphi(r^3\cos\beta - \tau r^4)uu'}{(1 - 2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^3}\delta\tau. \end{aligned}$$

Multiplions cette équation par $\frac{dr}{r} d\beta$, et intégrons par rapport à r

de o à ρ, et par rapport à β de o à 2π, nous obtiendrons

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\left(ru\frac{du'}{dr}-ru'\frac{du}{dr}\right)_0^{\rho}d\beta+\int_0^{\rho}\left(\frac{u}{r}\frac{du'}{d\beta}-\frac{u'}{r}\frac{du}{d\beta}\right)_0^{2\pi}dr\\ &\quad=-\delta\varphi\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{uu'r\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}\\ &\quad\quad-4\varphi\delta\tau\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2\cos\beta-\tau r^3)\,uu'\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^3}.\end{aligned}\right.$$

u et u' sont nuls pour $r=\rho$; donc la première quantité entre parenthèses est nulle; u et u' ont par rapport à la variable β la période 2π; la seconde quantité entre parenthèses est donc nulle aussi, car, si on se reporte à l'expression de u et à celle de u' qui s'en déduit par le changement de τ en $\tau+\delta\tau$ et de φ en $\varphi+\delta\varphi$, on reconnaît qu'elle ne devient pas ∞ pour $r=0$; donc le second membre seul subsiste. Il en résulte l'équation

$$(6)\quad 0=\frac{d\varphi}{d\tau}\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{u^2r\,dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}+4\varphi\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{(r^2\cos\beta-\tau r^3)\,u^2dr\,d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^3};$$

car on peut dans le second membre remplacer u' par u, qui en diffère infiniment peu.

On sait que φ a pour $\tau=0$ la valeur Φ, et d'après cette équation on peut calculer la valeur que prend φ pour une valeur quelconque de τ.

Il est aisé de se convaincre que φ est déterminé au moyen de cette équation. En effet, posons

$$\varphi=\Phi+p_1\tau+p_2\tau^2+p_3\tau^3+\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=p_1+2p_2\tau+3p_3\tau^2+\ldots;$$

remplaçons u par son expression (3), qui renferme $4n^2$ ou φ, que nous remplaçons à son tour par la série qui le représente. Enfin imaginons que l'on développe l'équation (6) suivant les puissances de τ. Si on veut calculer seulement p_1, il suffit d'employer les termes en τ^0 de l'équation (6), et de mettre dans u Φ au lieu de φ. Si on veut ensuite calculer p_2, il suffit d'employer les termes en τ, et de remplacer dans u φ par $\Phi+p_1\tau$. Et ainsi de suite.

11. Considérons la fonction u donnée par l'expression (3); pour $\tau = 0$ elle se réduit à

$$(\mathrm{A} \sin g\alpha + \mathrm{A}' \cos g\alpha)\mathrm{Q}(r, \Phi),$$

qui est nul pour $r = \rho$; or supposons que l'équation (6) ait lieu, et nous allons prouver que u sera nul pour $r = 0$, quel que soit τ.

Pour arriver à cette démonstration, au lieu de supposer que u est nul pour $r = \rho$ lorsque $\tau = 0$, concevons qu'il le soit lorsque τ a une certaine valeur, et, laissant toutes les autres choses les mêmes, cherchons à démontrer que u restera encore nul pour $r = \rho$ lorsque τ s'accroîtra de $\delta\tau$. On en déduira immédiatement la proposition dont il s'agit, en imaginant que l'on fasse successivement croître τ depuis zéro par degrés infiniment petits.

Or, d'après l'hypothèse, l'équation (5) se réduit à

$$\int_0^{2\pi} r u' \frac{du}{dr} d\beta = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho,$$

ou, en observant que u' est égal à $u + \frac{du}{d\tau}\delta\tau$, à cette autre

$$\int_0^{2\pi} \left(r \frac{du}{d\tau}\frac{du}{dr}\right) d\beta = 0 \quad \text{pour} \quad r = \rho,$$

Je dis que $\frac{du}{d\tau}$ est nul pour $r = \rho$. En effet u s'annule pour $r = \rho$; si, lorsque τ s'accroît de $\delta\tau$, u qui devient u' n'est pas nul pour $r = \rho$, il le sera pour $r = \rho + \delta\rho$, $\delta\rho$ étant peut-être variable avec β, et en tout cas donné par

$$\frac{du}{dr}\delta\rho + \frac{du}{d\tau}\delta\tau = 0,$$

ou

$$\delta\rho = -\frac{\frac{du}{d\tau}}{\frac{du}{dr}}\delta\tau.$$

Il suit de là que $\frac{du}{dr}$ ne peut s'annuler pour aucune valeur de β, sans que $\frac{du}{d\tau}$ s'annule aussi; car il est impossible que $\delta\rho$ soit infini.

Supposons au contraire que u étant nul pour $r=\rho$ on donne à ρ un accroissement $\delta\rho$ indépendant de β; si u reste nul pour $r=\rho+\delta\rho$, τ subit une variation $\delta\tau$ donnée par

$$\delta\tau = -\frac{\frac{du}{dr}}{\frac{du}{d\tau}}\delta\rho;$$

or, $\delta\tau$ ne pouvant être infini pour aucune valeur de β, il est encore impossible que $\frac{du}{d\tau}$ s'annule sans que $\frac{du}{dr}$ s'annule en même temps.

Donc, si on fait varier β de zéro à 2π, les deux fonctions dérivées $\frac{du}{dr}$, $\frac{du}{d\tau}$ s'annuleront pour les mêmes valeurs de β, et elles changeront de signe en même temps. Il s'ensuit que tous les éléments de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} r\frac{du}{d\tau}\frac{du}{dr}d\beta \quad \text{pour} \quad r=\rho,$$

seraient de même signe, tandis qu'elle doit être nulle. Donc il faut bien admettre que $\frac{du}{d\tau}$ est nul quel que soit β, et u reste nul pour $r=\rho$ après la variation de τ; ce qu'il fallait démontrer.

D'après ce qui précède, toute quantité φ qui se réduit pour $\tau=0$ à un terme Φ_s de la série (a), et qui est assujettie à l'équation (6), a une valeur parfaitement déterminée que nous représenterons par

$$(7) \qquad \varphi = \varphi_s(g, \tau, \rho),$$

afin d'indiquer les grandeurs dont elle dépend. Ensuite si on a $u=0$ pour $r=\rho$, φ est donné par l'équation (7), et réciproquement, si φ est donné par l'équation (7), on a $u=0$ pour $r=\rho$.

12. Il est bon d'indiquer une vérification de ce qui précède.

Si on calcule les fonctions U, U_1, U'_1, U_2, U'_2 qui entrent dans l'expression (A) de u en négligeant dans cette dernière le puissances de τ

supérieures à la deuxième, on a

$$U = A r^g \left\{ 1 - \frac{n^2}{g+1} r^2 + \left[\frac{n^4}{1.2(g+1)(g+2)} - \frac{2 n^2 \tau^2}{g+2} \right] r^4 \right.$$
$$- \left[\frac{n^6}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)} - \frac{2 n^4 (2g+3) \tau^2}{(g+1)(g+2)(g+3)} \right] r^6$$
$$+ \left[\frac{n^8}{2.3.4(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} - \frac{3 n^6 \tau^2}{(g+1)(g+3)(g+4)} \right] r^8$$
$$\left. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\},$$

$$U_1 = A r^{g+3} \left\{ - \frac{n^2 (2g+2)}{(g+1)(g+2)} + \frac{n^4 (2g+3)}{(g+1)(g+2)(g+3)} r^2 \right.$$
$$- \frac{n^6 (2g+4)}{1.2(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^4$$
$$+ \frac{n^8 (2g+5)}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)(g+5)} r^6$$
$$\left. - \frac{n^{10} (2g+6)}{2.3.4(g+1)\ldots(g+6)} r^8 + \ldots \right\},$$

$$U'_1 = A r^{g+3} \left\{ - \frac{n^2}{g+1} + \frac{n^4}{1(g+1)(g+2)} r^2 - \frac{n^6}{1.2(g+1)(g+2)(g+3)} r^4 \right.$$
$$\left. + \frac{n^8}{1.2.3(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^6 + \ldots \right\},$$

$$U_2 = n^2 A r^{g+4} \left\{ - \frac{3}{g+3} + \frac{5g^2 + 20g + 18}{(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} n^2 r^2 \right.$$
$$- \frac{21g^2 + 105g + 120}{2.3(g+1)\ldots(g+5)} n^4 r^4 + \frac{3g^2 + 18g + 25}{2(g+1)\ldots(g+6)} n^6 r^6$$
$$\left. - \frac{11g^2 + 77g + 126}{24(g+1)\ldots(g+7)} n^8 r^8 + \ldots \right\},$$

$$U'_2 = n^2 A r^{g+4} \left\{ - \frac{1}{g+1} + \frac{3n^2}{2(g+1)(g+2)} r^2 - \frac{n^4}{(g+1)(g+2)(g+3)} r^4 \right.$$
$$\left. + \frac{5n^6}{12(g+1)(g+2)(g+3)(g+4)} r^6 - \ldots \right\}.$$

Divisons U_1, U'_1, U_2, U'_2 par U, et comme nous négligeons dans u les termes en τ^3, on n'a pas à avoir égard dans la division aux termes de U qui multiplient τ^2. Si l'on désigne par V_1, V'_1, V_2, V'_2 les quotients de U_1 U'_1, U_2, U'_2 par U, on trouve que V_1 et V'_1 ne présentent aucune variation de signes, et que V_2 et V'_2 en offrent une seulement. Donc $U_1 = o$, $U'_1 = o$ perdent toutes leurs racines réelles n quand on divise leur premier membre par U, et n'ont pour racines que celles de $U = o$. V_2 et V'_2 n'ont qu'une variation de signe; $U_2 = o$ et $U'_2 = o$ ont donc aussi toutes les racines n de $U = o$. Par conséquent on peut trouver une valeur de n qui satisfasse aux équations

$$U(\rho, n) = o,\ U_1(\rho, n) = o,\ U'_1(\rho, n) = o,\ U_2(\rho, n) = o,\ U'_2(\rho, n) = o,$$

en cherchant seulement une racine de la première. Nous nous dispensons d'écrire les séries qui représentent V_1, V'_1, V_2, V'_2, à cause de leur complication.

13. Nous allons maintenant démontrer que la fonction u donnée par la série (3) qui est nulle pour $r = \rho$, quel que soit β, est nulle aussi pour une infinité de valeurs de r, dont quelques-unes en général sont plus petites que ρ.

Lemme I. — Les quantités

$$\Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \Phi_3,\ldots,\quad \Phi_s,\ldots,\quad \Phi_t,\ldots$$

étant rangées par ordre de grandeur croissante, je dis que les valeurs correspondantes de φ

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\ldots,\quad \varphi_s,\ldots,\quad \varphi_t,\ldots,$$

le sont aussi, quel que soit τ.

En effet, admettons que le contraire ait lieu, et que pour une valeur de τ, φ_t soit $< \varphi_s$. Or Φ_t est $> \Phi_s$, c'est-à-dire que φ_t est $> \varphi_s$ pour $\tau = o$; entre zéro et cette valeur de τ il existerait donc une autre valeur τ' de τ pour laquelle φ_t serait égal à φ_s. Dans l'équation (6) u ne dépend que de φ et de τ, et si on calcule

$$\delta\varphi_t = \frac{d\varphi_t}{d\tau}\delta\tau \quad \text{et} \quad \delta\varphi_s = \frac{d\varphi_s}{d\tau}\delta\tau,$$

d'après cette équation, en faisant varier τ à partir de τ', on obtient deux variations constamment égales, et φ_t et φ_s seraient toujours égaux; ce qui est absurde.

Lemme II. — D'après l'équation (7), φ est une quantité qui varie non-seulement avec τ, mais encore avec ρ. Or, supposons τ fixe et faisons croître ρ à partir de zéro, je dis que φ_s, qui sera d'abord infini, ira constamment en décroissant.

Considérons une valeur de u donnée par la formule (3) et qui satisfait par conséquent à l'équation

$$(8)\qquad \frac{d^2u}{dr^2}r^2 + \frac{du}{dr}r + \frac{d^2u}{d\beta^2} = \frac{-\varphi r^2}{(1-2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^2}u;$$

de plus, n ou φ est choisi de manière que u s'annule pour $r=\rho$. Si on suppose que ρ reçoive une très-petite variation, la quantité φ qui se trouve dans u subira elle-même une très-petite variation indépendante de β. Or, inversement, nous pouvons supposer que φ subisse une très-petite variation et chercher l'accroissement de ρ, qui sera indépendant de β.

u se changera alors en $u_1 = u + \delta u$ donné par l'équation

$$(9)\qquad \frac{d^2u_1}{dr^2}r^2 + \frac{du_1}{dr}r + \frac{d^2u_1}{d\beta^2} = \frac{-(\varphi+\delta\varphi)r^2}{(1-2\tau r\cos\beta + \tau^2 r^2)^2}u_1;$$

on a d'abord

$$u = 0 \text{ pour } r = \rho,$$

et puisqu'on donne à φ l'accroissement $\delta\varphi$, u_1 n'est nul qu'autant qu'on accroît ρ de

$$\delta\rho = -\frac{du}{d\varphi}\delta\varphi : \frac{du}{dr},$$

quantité indépendante de β; elle est de même signe que

$$-\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{dr},$$

dont le signe est par conséquent le même quel que soit β; donc, pour connaître le sens de la variation de ρ, il suffit de chercher le signe de

$$-\int_0^{2\pi}\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{dr}d\beta \text{ pour } r=\rho.$$

Des équations (8) et (9), on tire

$$\left(u_1\frac{d^2u}{dr^2}-u\frac{d^2u_1}{dr^2}\right)r^2+\left(u_1\frac{du}{dr}-u\frac{du_1}{dr}\right)r+\left(u_1\frac{d^2u}{d\beta^2}-u\frac{d^2u_1}{d\beta^2}\right)$$
$$=\frac{r^2\delta\varphi}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}uu_1,$$

Multiplions les deux membres par $\frac{1}{r}\,dr d\beta$, puis intégrons par rapport à r de o à ρ, et par rapport à β de o à 2π, et nous obtenons

$$\int_0^{2\pi}\left(ru_1\frac{du}{dr}-ru\frac{du_1}{dr}\right)_0^\rho d\beta+\int_0^\rho\left[\frac{u_1}{r}\frac{du}{d\beta}-\frac{u}{r}\frac{du_1}{d\beta}\right]_0^{2\pi}d\beta$$
$$=\delta\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{uu_1 r dr d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2},$$

u_1 est égal à $u+\frac{du}{d\varphi}\delta\varphi$, et d'après les conditions auxquelles u et u_1 doivent satisfaire, il reste

$$\rho\int_0^{2\pi}\left(\frac{du}{d\varphi}\frac{du}{d\beta}\right)_{r=\rho}d\beta=\delta\varphi\int_0^\rho\int_0^{2\pi}\frac{u^2 r dr d\beta}{(1-2\tau r\cos\beta+\tau^2r^2)^2}.$$

Le second membre est essentiellement positif; donc, quand φ grandit, $\delta\rho$ est négatif et ρ diminue, et inversement quand on fait diminuer ρ, φ grandit; ce qu'il fallait démontrer.

Ces deux lemmes établis, construisons, r étant l'abscisse et y l'ordonnée, les courbes données par les équations

$$(10)\qquad y=\varphi_1(r),\quad y=\varphi_2(r),\ldots,\quad y=\varphi_s(r),\ldots,\quad y=\varphi_t(r),\ldots,$$

$\varphi_1, \varphi_2,\ldots$ étant la fonction (7) dans laquelle ρ est remplacé par r, et les deux quantités g et τ sont les mêmes dans toutes ces fonctions. Il résulte du second lemme que les ordonnées de chaque courbe vont en décroissant à mesure que l'abscisse r croît de zéro à l'infini, et il résulte du premier lemme que si t est $> s$, les ordonnées de la $t^{ième}$ courbe sont toujours plus grandes que celles de la $s^{ième}$.

D'après cela, supposons que la valeur de φ qui se trouve dans u

soit φ_t; prenons sur l'axe des r l'abscisse ρ et à son extrémité élevons l'ordonnée $\varphi_t(\rho)$ de la $t^{ième}$ courbe; soit M le point correspondant. Menons par le point M une parallèle à l'axe des abscisses; elle rencontrera les courbes (10) chacune en un point dont l'abscisse a les valeurs croissantes

$$\rho_1,\ \rho_2,\ldots,\ \rho_{t-1},\ \rho,\ \rho_{t+1},\ldots,$$

et u s'annulera, quel que soit β pour le nombre infini de valeurs $r=\rho_1$, $r=\rho_2,\ldots$, dont les $t-1$ premières sont plus petites que ρ.

En effet, φ pouvant être regardé, par exemple, comme ayant la valeur

$$\varphi=\varphi_s(\rho_s),$$

on déduit du théorème qui termine le n° **11**, que u s'annule pour $\rho=\rho_s$.

14. En multipliant u par le sinus ou le cosinus d'un arc proportionnel au temps, on aura le déplacement vibratoire d'une membrane pleine dont le contour fixe est un cercle et dont un élément de la surface (au point qui a pour coordonnée $r=0$) est maintenu horizontal. En outre, φ_t étant la valeur de φ qui entre dans u, on a t cercles nodaux

$$r=\rho_1,\quad r=\rho_2,\ldots,\quad r=\rho_{t-1},\quad r=\rho,$$

en comptant le cercle de contour.

Il résulte aussi de là que si une telle membrane est donnée et que le nombre entier g soit fixe, le son s'élèvera en même temps que le nombre des cercles nodaux augmentera d'une unité [*].

---

[*] En terminant le n° 28 du Mémoire de la membrane elliptique, nous avons dit que $\frac{dR}{dh}$ est $<4h$, parce que le nombre des lignes nodales elliptiques augmente quand la hauteur du son s'élève, le nombre des lignes nodales hyperboliques restant le même. Cette dernière assertion peut se démontrer par des raisonnements identiques à ceux du n° 13 actuel.

Il existe ensuite g autres lignes nodales rectangulaires sur ces t cercles. Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si r est très-petit, l'expression de u se réduit à

$$(\mathrm{A}\sin g\beta + \mathrm{A}'\cos g\beta)\left(r^g - \frac{n^2}{g+1}r^{g+2}\right),$$

en négligeant r^{g+3} et si on l'égale à zéro, on voit que l'on a g lignes nodales passant par le point dont la coordonnée r est nulle et que chaque tangente menée en ce point à ces lignes fait avec la suivante un angle égal à $\frac{\pi}{g}$. Il est aisé de voir que ces lignes sont osculatrices aux cercles β; mais comme $\mathrm{A}\sin g\beta + \mathrm{A}'\cos g\beta$ cesse d'être en facteur dans l'expression de u, aussitôt que l'on a égard à r^{g+3}, il est évident que ces lignes ne peuvent se confondre avec ces cercles.

Enfin ces lignes nodales sont normales sur les cercles

$$r = \rho_1, \quad r = \rho_2, \ldots;$$

car nous pouvons limiter la membrane à deux de ces cercles, et d'après ce que nous avons vu au n° **7**, ces lignes doivent être orthogonales sur les deux contours.

Remarquons, en terminant, qu'il serait utile, pour compléter cette démonstration, de prouver que ces g lignes qui se croisent au point $r = 0$ ne peuvent se rencontrer en aucun autre point, et que chacune d'elles est rencontrée deux fois seulement par un des cercles compris dans l'équation

$$\alpha = \text{const.} \quad \text{ou} \quad r = \text{const.}$$

Distribution de la chaleur dans des cylindres lemniscatiques.

15. Nous allons maintenant nous occuper du mouvement de la température dans une autre famille de cylindres.

Si nous prenons l'axe des z suivant la direction des génératrices du cylindre, la température V est donnée par l'équation

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} + \frac{d^2\mathrm{V}}{dy^2} = k\frac{d\mathrm{V}}{dt},$$

et on a pour la solution simple

$$V = ue^{-\frac{m^2}{k}t},$$

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = -m^2u.$$

Aux coordonnées x et y, substituons les coordonnées α et β données par les formules

$$\alpha = \log \frac{c^2}{\sqrt{(x+c)^2+y^2}\sqrt{(x-c)^2+y^2}},$$

$$\beta = \text{arc tang}\frac{y}{x+c} + \text{arc tang}\frac{y}{x-c},$$

qui ont été considérées par M. Lamé dans la XIII^e leçon de ses *Coordonnées curvilignes*. $\alpha =$ const. désigne une famille de lemniscates, $\beta =$ const. une famille d'hyperboles orthogonale à la première. Par le changement de variables, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{d\alpha^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2c^2e^{-2\alpha}}{4\sqrt{1+2e^{-\alpha}\cos\beta + e^{-2\alpha}}}u.$$

Si p est un nombre négatif, $\alpha = p$ désigne une lemniscate formée d'une seule ligne fermée; si p est nul, $\alpha = 0$ désigne la lemniscate à laquelle on donne particulièrement ce nom et pour laquelle l'origine des coordonnées qui est un centre est aussi un point double. Enfin si p est positif, $\alpha = p$ représente deux lignes convexes fermées qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des y; elles se réduisent à deux points $\alpha = \infty$.

Nous allons employer l'équation (2) à déterminer le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres indéfinis dont la base est $\alpha = p$, lorsque p est de même signe pour tous les deux.

16. Résolvons d'abord cette question, lorsque p est positif. Comme $\alpha = p$ représente deux lignes identiques, on a deux tuyaux de forme identique séparés l'un de l'autre, et il suffit de traiter celui qui est du côté des x positifs. Toutefois, pour faciliter les calculs, il conviendra de rétablir par la pensée le second tuyau et d'imaginer, comme il est évidemment permis, que les températures sont les mêmes dans l'un et l'autre aux points symétriques (x, y) et $(-x, -y)$.

Si on se reporte à l'expression de β et qu'on se représente géométriquement les deux arcs qui y entrent, on verra que, par le changement de x et y en $-x$ et $-y$, ces deux arcs ne se permutent pas simplement, mais qu'ils prennent les valeurs résultant de cette transposition augmentées de π, en sorte que β s'accroît de 2π. Donc, par l'artifice employé, u devient une fonction qui reste invariable quand β augmente de 2π et que α reste le même.

Faisons dans l'équation (2)

$$\alpha = -\varepsilon + a,$$

et posons

$$e^{-a} = \tau, \quad \frac{c\tau}{2} = f,$$

en supposant a positif et par suite $\tau < 1$. Nous aurons

$$\frac{d^2 u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2 u}{d\beta^2} = -m^2 f^2 e^{2\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{2}} u. \tag{3}$$

Nous prenons pour la surface intérieure $\alpha = a$ ou $\varepsilon = 0$, et comme α sera plus petit pour la surface extérieure, elle est représentée par $\varepsilon = b$, b désignant une quantité positive.

L'équation des lemniscates est

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2 x^2 = c^4 e^{-2\alpha} = c^4 \tau^2 e^{2\varepsilon},$$

et si on transporte l'origine des coordonnées au point $x = c$, $y = 0$, on reconnaîtra que si on fait tendre τ vers zéro en regardant $c\tau$ ou f comme fini, le système des lemniscates se change en cercles concentriques.

Si les surfaces rayonnent dans un milieu dont la température est zéro, on remarquera que l'élément de la normale à la surface α menée dans son intérieur a pour valeur

$$\frac{c}{2}(e^{4\alpha} + 2e^{3\alpha}\cos\beta + e^{2\alpha})^{-\frac{1}{4}} d\alpha = -\frac{c\tau}{2} e^{\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{4}} d\varepsilon$$

et que si cet élément est extérieur à la surface, il change de signe. On en conclura que l'on a les deux équations aux limites en faisant successivement $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = b$ dans l'équation

$$-\frac{dv}{d\varepsilon}e^{-\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{\frac{1}{4}} \pm flv = 0,$$

et prenant le signe + dans le premier cas et le signe − dans le second cas devant le dernier terme.

Cette question se résoudra ensuite d'une manière toute semblable à celle des cinq premiers numéros. Ainsi on posera

$$(4) \qquad u = U + U_1\varepsilon + U_2\varepsilon^2 + \ldots;$$

on remarquera que l'on a

$$(1 + 2z\cos\beta + z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + Q_1 z + Q_2 z^2 + \ldots + Q_n z^n + \ldots$$

avec

$$(-1)^n \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} Q_n = \cos n\beta + \frac{n}{2n-1}\cos(n-2)\beta$$
$$+ \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\beta + \ldots,$$

puis on en déduira le développement de

$$e^{2\varepsilon}(1 + 2\tau e^{\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{2\varepsilon})^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de ε. On le portera, ainsi que le développement (4), dans l'équation (3), et en ayant égard à la condition pour la limite $\varepsilon = 0$

$$U_1(1 + 2\tau\cos\beta + \tau^2)^{\frac{1}{4}} + flU = 0,$$

on trouvera que toutes les fonctions $U, U_1, U_2, \ldots$, s'expriment au moyen d'une seule U_1.

Pour obtenir U_1, on posera soit

$$U_1 = A\sin g\beta + \tau[a_1\sin(g+1)\beta + b_1\sin(g-1)\beta] + \ldots$$
$$+ \tau^{g-1}[a_{g-1}\sin(2g-1)\beta + b_{g-1}\sin\beta] + \tau^g a_g \sin 2g\beta$$
$$+ \tau^{g+1}a_{g+1}\sin(2g+1)\beta + \ldots,$$

soit une série semblable de cosinus, et on prendra pour g un nombre entier, puisque n a la période 2π. U, U_2, U_3,... seront de même forme que U_1, et la dernière condition de limite déterminera les coefficients a_1, a_2,..., b_1, b_2,..., ainsi que la quantité m.

17. Supposons que la surface intérieure disparaisse et que le corps soit un cylindre ovoïde lemniscatique plein dont la surface est entretenue à la température zéro. Posons

$$\alpha = \varepsilon + a, \quad e^{-\varepsilon} = r, \quad \frac{c\tau}{2} = f,$$

et l'équation (2) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} r^2 + \frac{du}{dr} r + \frac{d^2 u}{d\beta^2} = -m^2 f^2 r^2 (1 + 2\tau r \cos\beta + \tau^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} u.$$

Nous emploierons pour u la série

$$u = P r^g + P_1 r^{g+1} + P_2 r^{g+2} + \ldots,$$

dans laquelle g désigne un nombre entier, et nous substituerons son expression ainsi que le développement de

$$(1 + 2\tau r \cos\beta + \tau^2 r^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tau r Q_1 + \tau^2 r^2 Q_2 + \ldots + \tau^n r^n Q_n + \ldots$$

dans l'équation précédente. Le calcul se continuera comme aux n^{os} **8** et suivants, on sera conduit à des conclusions semblables et on pourra déterminer la constante m d'après la condition à la surface.

On pourrait aussi démontrer que si on fait vibrer une membrane dont le contour est une lemniscate ovoïde, il se forme deux systèmes de lignes nodales orthogonaux entre eux et que l'un de ces systèmes est composé de lemniscates dont l'équation est α ou $r =$ const.

18. Enfin considérons un tuyau dont les deux surfaces cylindriques ont pour bases des lemniscates dont le paramètre α est négatif. Posons

$$\alpha = -\varepsilon - a, \quad e^{-a} = \tau, \quad \frac{c\tau^{-\frac{1}{2}}}{2} = h,$$

l'équation (2) se change en la suivante

$$\frac{d^2u}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2u}{d\beta^2} = -\frac{m^2h^2e^{\varepsilon}}{\sqrt{1 + 2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{-2\varepsilon}}}\,u$$

Le contour intérieur sera représenté par $\varepsilon = 0$ et le contour extérieur par $\varepsilon = b$, b étant positif. Si ces deux surfaces sont entretenues à la température zéro, on y aura

$$u = 0;$$

si elles rayonnent dans un espace dont la température est zéro, on aura sur ces deux surfaces l'équation

$$-\frac{du}{d\varepsilon}e^{-\frac{\varepsilon}{2}}(1 + 2\tau e^{-\varepsilon}\cos\beta + \tau^2 e^{-2\varepsilon})^{\frac{1}{4}} \pm lhu = 0,$$

en prenant pour le signe $\pm$ le signe $+$ sur la surface intérieure et le signe $-$ sur la surface extérieure. Enfin u doit satisfaire à la condition d'avoir par rapport à β la période 4π.

Nous avons vu jusqu'à présent qu'en faisant $\tau = 0$, on pouvait changer le système des cercles excentriques ou celui des lemniscates en cercles concentriques; on peut reconnaître qu'il en est encore de même ici, pourvu que l'on conçoive que $c\tau^{-\frac{1}{2}} = h$ reste fixe.

Les équations precédentes étant posées, la question se résout d'une manière toute semblable à celle du n° **16**, où l'on remplacera dans U g par $\frac{g}{2}$, g étant encore un nombre entier, parce que cette fonction doit avoir maintenant pour période 4π au lieu de 2π.

Il resterait à traiter le même problème pour le corps renfermé entre deux cylindres lemniscatiques, dont l'un a son paramètre α positif et l'autre ce paramètre négatif. Mais le centre de la section droite, qui a pour coordonnées $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$, fait alors partie du corps, et en ce point le second membre de l'équation (2) devient infini; il est donc aisé de comprendre que la méthode de solution que nous avons précédemment employée cesse d'être applicable.

Mais il se présente alors une autre difficulté, et comme on la rencontre aussi pour l'équilibre de température de ce corps, c'est dans cette question beaucoup plus simple que nous allons l'examiner.

Réflexions sur l'équilibre de température des cylindres lemniscatiques.

19. Considérons l'équilibre de température du corps limité par deux cylindres α, en supposant toujours la température la même sur une parallèle aux génératrices, et comme la question ne peut présenter de difficulté qu'autant que les deux paramètres sont de signe contraire, examinons ce seul cas.

L'équation qui régit la température se réduit à

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0. \tag{1}$$

Les deux surfaces sont entretenues à des températures données qui varient d'une génératrice à l'autre. Mais comme l'état du corps est la superposition de deux états dont chacun proviendrait de la température donnée sur une des surfaces, l'autre surface étant à zéro, nous supposerons que la température est zéro sur la surface intérieure au paramètre positif $\alpha = \alpha''$, et qu'elle est égale à $f(\beta)$ sur la surface extérieure au paramètre négatif $\alpha = \alpha'$.

On a une solution de l'équation (1) qui s'annule pour $\alpha = \alpha''$ en posant

$$V = \mathcal{E}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha)\right]\left(A \sin\frac{n\beta}{2} + B\cos\frac{n\beta}{2}\right); \tag{2}$$

$\mathcal{E}(u)$ désigne en général le sinus hyperbolique de u, et n est un nombre entier, afin que v possède par rapport à β la période 4π. Ensuite, pour satisfaire à la condition de la surface $\alpha = \alpha'$, on prend la somme d'une infinité de ces expressions en posant

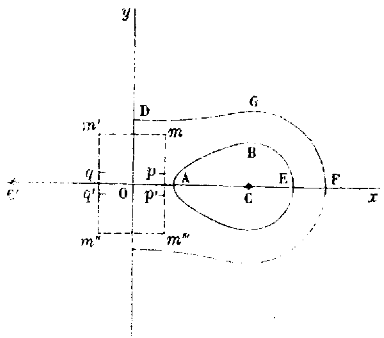
$$V = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathcal{E}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha)\right]}{\mathcal{E}\left[\frac{n}{2}(\alpha'' - \alpha')\right]}\left(A_n \sin\frac{n\beta}{2} + B_n\cos\frac{n\beta}{2}\right), \tag{3}$$

et on détermine, comme on sait, les coefficients A_n et B_n d'après l'équation

$$(4) \qquad \sum\left(A_n \sin\frac{n\beta}{2} + B_n \cos\frac{n\beta}{2}\right) = f(\beta).$$

Telle semble être la solution cherchée; et cependant elle est inexacte, comme il est aisé de le reconnaître.

Désignons par C et C′ les deux points dont le produit des distances aux points d'une des lemniscates est constant et qui ont les mêmes coordonnées, savoir : $\alpha = \infty$, $\beta = \pi$. Considérons deux points p et p' symétriques par rapport à la droite qui joint les points C et C′, très-voisins de la partie de cette droite comprise entre C et C′, et supposons, de plus, ces deux points situés entre les deux lemniscates de contour.



Pour ces deux points, la coordonnée α est la même et la coordonnée β est $\pi - \varepsilon$ pour p et $3\pi + \varepsilon$ pour p', ε désignant une quantité très-petite, et il résulte de la formule (3) que V aurait en général une valeur fort différente pour les deux points p et p', tandis qu'elles doivent évidemment différer infiniment peu. Si on considère au contraire les deux points p et q très-rapprochés de la droite CC′ qui ont la même coordonnée α et dont la coordonnée β est $\pi - \varepsilon$ pour l'un et $\pi + \varepsilon$ pour l'autre et diffère infiniment peu, la formule (3) donnerait pour la température de ces deux points des valeurs qui différeraient infiniment peu, bien qu'ils soient à une distance finie, et cela quelle que soit la température $f(\beta)$ de la surface extérieure; ce qui est impossible.

20. Il reste à savoir d'où vient cette contradiction, après que nous avons satisfait à l'équation (1), aux conditions aux limites et à la condition voulue de périodicité.

Or, si l'on exprime l'équilibre de température d'un cylindre élémentaire dont la section droite est comprise entre deux courbes α et deux courbes β infiniment voisines, on est bien conduit en général à l'équation (1); mais si cet élément est situé sur la droite CC′ entre les points C et C′, en sorte que cette droite remplace l'une des courbes β, la coordonnée β varie brusquement pour des points infiniment voisins et l'équation n'a plus lieu sur CC′. Toutefois cette équation disparaissant, il faut qu'une autre condition la remplace. Or, sur la droite CC′, la coordonnée β est à volonté π ou 3π; donc la condition est que la fonction V ait la même valeur pour toute valeur positive de α comprise de o à α'', soit qu'on fasse $\beta = \pi$ ou $\beta = 3\pi$.

Cherchons maintenant à obtenir la véritable solution. Remarquons d'abord qu'il ne se présente plus de difficulté dans le cas où la température $f(\beta)$ donnée sur la surface extérieure est symétrique par rapport au centre, et où l'on a

$$f(\beta + 2\pi) = f(\beta).$$

Dans ce cas, la série (4) qui exprime $f(\beta)$ ne conserve que les termes pour lesquels n est pair, et dès que l'équation (3) ne renferme que des valeurs paires de n, les contradictions que nous avons signalées tout à l'heure disparaissent.

Dans le cas le plus général, $f(\beta)$ est une fonction qui a 4π pour période, de sorte que l'on a

$$f(\beta + 4\pi) = f(\beta),$$

et en posant

$$f(\beta) = \frac{f(\beta) + f(\beta + 2\pi)}{2} + \frac{f(\beta) - f(\beta + 2\pi)}{2},$$

on décompose $f(\beta)$ en deux parties $f_1(\beta)$ et $f_2(\beta)$, dont l'une reste invariable quand on remplace β par $\beta + 2\pi$, et dont l'autre change seulement de signe. Donc l'état d'équilibre de température du corps est la superposition de deux états, dont l'un symétrique par rapport au centre correspond à $f_1(\beta)$ et vient d'être examiné, et dont l'autre correspondant à $f_2(\beta)$ donne des températures égales et de signe contraire pour deux points symétriques par rapport au centre.

Ainsi cherchons la température V d'un corps en supposant qu'elle soit égale et de signe contraire pour deux points m et m'' symétriques par rapport au centre.

Nous pouvons considérer cet état de température comme la superposition de deux états V_1 et V_2 ainsi définis.

Soient m un point quelconque dans l'angle yOx, et m', m'', m''' les trois points dont les coordonnées rectilignes ont la même valeur absolue dans les trois autres angles de coordonnées. 1° V_1 est une fonction qui a la même valeur en m et m', des valeurs égales et de signe contraire en m et m'', et en m et m'''; 2° V_2 est une fonction qui a des valeurs égales et de signe contraire en m et m' ou en m et m'', et la même valeur en m et m'''.

En effet, désignons V par $F(\alpha, \beta)$; cette fonction satisfait par hypothèse à l'équation

$$F(\alpha, \beta + 2\pi) = -F(\alpha, \beta) \tag{5}$$

quel que soit β; partageons-la en deux parties de cette sorte :

$$F(\alpha, \beta) = \frac{F(\alpha, \beta) + F(\alpha, 2\pi - \beta)}{2} + \frac{F(\alpha, \beta) - F(\alpha, 2\pi - \beta)}{2}. \tag{6}$$

La première partie remplit les conditions de la fonction V_1, et la seconde celles de la fonction V_2, comme il résulte de (5), en observant que si b est la coordonnée β de m, celles de m', m'', m''' sont respectivement $2\pi - b$, $2\pi + b$, $4\pi - b$.

D'ailleurs pour examiner ces deux états de température, il est clair qu'il faudra partager la température $f(\beta)$ relative à la surface extérieure en deux parties, d'après la formule (6).

21. L'avantage que nous obtenons à considérer les deux états V_1 et V_2 résulte de ce que, pour les étudier, il suffit de s'occuper du quart du corps, et que l'équation (1) y est exacte dans toute son étendue.

En effet, considérons le quart du corps OABEFGD. La température V_1 est donnée sur ABE et DGF qui sont des parties des surfaces $\alpha = \alpha''$ et $\alpha = \alpha'$; elle est nulle sur OA et EF, et $\frac{dV_1}{d\beta}$ est nul sur OD, en sorte que cette surface peut être regardée comme imperméable à la chaleur. Ces conditions aux limites déterminent évidemment la température du corps OABEFGD.

Dans l'état V_2, cette température est nulle sur OD, tandis que OA et EF peuvent être supposés imperméables à la chaleur.

Cherchons la température V_1. Désignons par $\varphi(\alpha)$ la température inconnue le long de OD, on a

$$\begin{aligned} V_1 = {} & \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha)]}{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha')]} \sin n\beta \\ & + \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m \frac{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'}\beta\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)} \sin\left[\frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'}(\alpha-\alpha')\right], \end{aligned}$$

n et m désignant des nombres entiers auxquels se rapporte le signe sommatoire $\sum$ et les coefficients A et B ayant pour valeurs

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\beta)\sin n\beta\, d\beta, \quad B_m = \frac{2}{\alpha''-\alpha'}\int_0^{\alpha'} \varphi(\alpha)\sin m(\alpha-\alpha')\, d\alpha.$$

Donc les coefficients A_n sont connus, tandis que les coefficients B_m sont à déterminer. Comme $\frac{dV}{d\beta}$ est nul pour $\beta = \pi$ entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha'$, on a entre ces limites

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=\infty} B_m \frac{m\pi}{\alpha''-\alpha'} \frac{E\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)}{\mathcal{E}\left(\frac{m\pi^2}{\alpha''-\alpha'}\right)} \sin\frac{m\pi(\alpha-\alpha')}{\alpha''-\alpha'} \\ & = -\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \frac{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha)]}{\mathcal{E}[n(\alpha''-\alpha')]} n\cos n\pi, \end{aligned} \right.$$

E désignant un cosinus hyperbolique; le second membre de cette équation est connu, et comme V_1 est nul sur OA, on a

$$\sum B_m \sin m(\alpha - \alpha') = 0, \tag{8}$$

entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \alpha''$. La détermination des coefficients B au moyen de ces deux équations offre de la difficulté; mais pour résoudre la question par approximation, on pourra réduire ces deux séries à leurs g premiers termes, g étant un nombre suffisamment grand; puis diviser la ligne AOD en $g + 1$ parties égales, et on supposera que les points de division situés sur OD satisfont à la première équation, et les points de division sur OA à la seconde; il en résultera g équations pour déterminer un même nombre de coefficients.

Le calcul de V_2 se ferait d'une manière toute semblable.

Le principal intérêt de ces dernières considérations est de prouver que lorsqu'on transformera en coordonnées curvilignes les équations aux différences partielles qui régissent l'équilibre et le mouvement de la température des corps ou leurs mouvements vibratoires, ces équations transformées pourront cesser d'avoir lieu sur certaines lignes ou certaines surfaces de l'intérieur de ces corps, et que si on les intégrait sans y prendre attention, on arriverait à des formules tout à fait inexactes. Or, ces remarques n'avaient pas encore été faites.