JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 378-421.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__378_0>

Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$ *et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide;*

Par M. Émile MATHIEU.

On connaît maintenant plusieurs théorèmes relatifs au potentiel v d'une masse quelconque, qui satisfait en dehors de cette masse à l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

x, y, z étant les trois coordonnées rectangulaires du point auquel se rapporte le potentiel, équation que nous représenterons, pour abréger, par

$$(a) \qquad \Delta v = 0.$$

Je me propose de montrer dans ce Mémoire qu'il existe pareillement des théorèmes généraux sur la fonction u, qui, dans un certain espace, satisfait à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre

$$(b) \qquad \Delta\Delta u = 0,$$

ou

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^4u}{dy^4} + \frac{d^4u}{dz^4} + 2\frac{d^4u}{dy^2dz^2} + 2\frac{d^4u}{dz^2dx^2} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} = 0$$

Cette équation se rencontre en physique mathématique; en effet, quand un corps solide, homogène, et dont l'élasticité est la même dans tous les sens, est soumis à sa surface à des pressions qui le maintiennent en équilibre d'élasticité, les projections du déplacement d'un point quelconque de l'intérieur du corps sur les axes de coordonnées satisfont à l'équation $\Delta\Delta u = 0$; et il en est encore de même des composantes des forces élastiques qui s'exercent sur des éléments plans parallèles aux plans de coordonnées.

Si l'on suppose que u ne dépende pas de z, cette équation se réduit à

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = 0.$$

Or imaginons une plaque plane, homogène, d'épaisseur uniforme et de même élasticité dans tous les sens, et déplaçons-en légèrement les bords d'une manière permanente; le déplacement normal d'un point quelconque de la surface médiane de la plaque sera encore donné par cette équation.

On comprend donc l'intérêt qu'il y a à s'occuper de la fonction qui satisfait à l'équation (b), et nous ferons voir d'ailleurs que cette étude permettra d'intégrer cette équation.

Du potentiel et de l'équilibre de température.

1. La fonction v qui satisfait à l'équation (a) satisfaisant aussi à l'équation (b), on sent bien que l'on ne doit pas aborder l'étude plus compliquée de la fonction u, sans avoir bien présentes à l'esprit les propriétés de la première; nous allons donc résumer certaines propriétés du potentiel, qui nous seront utiles dans la suite de ce Mémoire.

Non-seulement le potentiel v d'une masse quelconque satisfait en dehors de cette masse à l'équation de Laplace

$$(a) \qquad \Delta v = 0;$$

mais dans l'état d'équilibre de température d'un corps isotrope, cette température satisfait à cette équation en un point quelconque du corps. A ce point de vue même, la fonction u de la théorie de l'élasticité semble avoir plus d'analogie avec la température d'équilibre qu'avec le potentiel, puisqu'elle ne se rapporte aussi qu'à l'intérieur d'une surface fermée σ qui limite un corps. Cependant nous allons voir que cette différence entre le potentiel et la température d'équilibre n'a rien d'essentiel.

2. Soit $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et $d\sigma$ l'élément de la surface σ qui le termine; si v et w, ainsi que leurs dérivées, sont des fonctions continues de x, y, z, on a l'équation donnée par Green

$$(c)\qquad \int v\Delta w\, d\varpi - \int w\Delta v\, d\varpi = \int v\frac{dw}{dn}\, d\sigma - \int w\frac{dv}{dn}\, d\sigma \text{ [*]},$$

dn étant l'élément de normale à la surface comptée vers l'extérieur du corps, et les intégrales se rapportant à son volume entier ou à toute sa surface.

Si l'on prend pour w la fonction discontinue $\frac{1}{r}$, r étant la distance d'un point variable (a, b, c) de l'intérieur du corps à un point (x, y, z) fixe qui y est aussi situé, on pourra appliquer cette équation au volume renfermé entre σ et une sphère infiniment petite dont le centre est au point (x, y, z), et on en conclut l'équation

$$(d)\qquad \int \frac{1}{r}\Delta v\, d\varpi = -\int v\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma + \int \frac{1}{r}\frac{dv}{dn}\, d\sigma - 4\pi v.$$

De cette équation Green conclut que, si une fonction v satisfait à l'équation (a), en variant d'une manière continue en dedans et en dehors de la surface σ, qu'elle prenne à cette surface la même valeur à l'intérieur et à l'extérieur, et enfin qu'elle s'annule à l'infini, cette fonction peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

En effet, l'équation (d) donnera

$$0 = \int v\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\, d\sigma - \int \frac{1}{r}\frac{dv}{dn'}\, d\sigma - 4\pi v,$$

dn' étant l'élément de normale comptée vers l'intérieur du corps.

---

[*] Cette formule est démontrée par Green dans son Mémoire sur l'électricité (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 360) et dans la *Théorie de la Chaleur* de M. Lamé, § 58.

Considérons ensuite le volume renfermé entre la surface σ et une autre surface σ' qui renferme la première; $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infini dans cet intervalle, il faudra appliquer l'équation (c) au lieu de (d) en y faisant $w = \frac{1}{r}$, et nous aurons, si nous supposons que la surface σ' aille à l'infini,

$$0 = \int v \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{dv}{dn} d\sigma,$$

en remarquant que les intégrales relatives à la surface infinie s'annulent. Ajoutons ces deux équations, en observant que l'on a

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn'} + \frac{d\frac{1}{r}}{dn} = 0,$$

et nous obtenons

$$(e) \qquad v = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'} \right) d\sigma;$$

donc v peut être considéré à l'intérieur de σ comme le potentiel d'une couche distribuée sur cette surface dont la densité est

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'} \right).$$

On démontre ce théorème de la même manière à l'extérieur de σ.

Cette formule de la densité d'une couche a été reconnue par Poisson et démontrée pour la première fois par Laplace. (*Voir* les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1811, p. 5 et 31.)

3. Il faut ensuite noter ce théorème :

1° *Il existe toujours à l'intérieur de la surface σ une fonction v finie et continue de x, y, z en même temps que ses dérivées, qui satisfait à l'équation*

$$\Delta v = 0,$$

et qui a une valeur donnée à la surface σ, et il n'y en a qu'une seule.

2° *Il existe aussi une fonction, et une seule, qui satisfait en dehors de σ à ces conditions, auxquelles on ajoute que v est nul à l'infini.*

D'après ce que nous venons de voir, si ces deux fonctions existent elles peuvent être assimilées au potentiel d'une même couche, et ce théorème revient à celui-ci :

On peut toujours assigner une couche distribuée sur la surface σ, et une seule, dont le potentiel ait une valeur donnée en chaque point de cette surface, pourvu que cette valeur donnée varie d'une manière continue.

Gauss est, je crois, le seul qui ait donné de cette proposition une démonstration rigoureuse dans son Mémoire sur le potentiel [*]; mais par la considération de l'équilibre de température, ce théorème dans son premier énoncé devient presque évident; car il revient à ces deux autres :

1° *Si un corps homogène est en équilibre de température et que tous les points de sa surface soient entretenus à des températures données et fixes, la température en un point quelconque de ce corps est déterminée;*

2° *Concevons un corps homogène compris entre la surface σ qui est intérieure et la surface S qui le limite extérieurement. On entretient la surface σ à des températures données et fixes et la surface S à zéro. La température dans ce corps sera complétement déterminée, quelque éloignée que soit S et par suite encore si elle va à l'infini.*

4. Imaginons des masses renfermées dans l'intérieur d'une surface fermée σ; le potentiel de ces masses en dehors de σ peut être assimilé à celui d'une couche de matière distribuée sur σ.

En effet, ce potentiel satisfait en dehors de σ à l'équation

$$\Delta v = 0,$$

il y varie d'une manière continue avec ses dérivées, et il s'annule à

[*] *Voir* le cinquième volume des *OEuvres de Gauss*, p. 232-237, ou la traduction dans ce Journal, t. VII, 1re série. Green a aussi donné de ce théorème une démonstration, en s'appuyant sur une considération tirée de la théorie de l'électricité, qui n'est pas préférable à celle de l'équilibre de température. (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 367.)

l'infini. Or, tant que l'on n'a à considérer que les valeurs de v à l'extérieur de σ, on peut imaginer, d'après le théorème du n° **3**, que v satisfait à l'intérieur de σ à la même équation, a la même valeur à cette surface et varie d'une manière continue ainsi que ses dérivées Du n° **2**, on conclut donc le théorème cité.

En supposant des masses à l'extérieur de la surface σ, on démontrera de même que le potentiel de ces masses en dedans de σ peut être assimilé à celui d'une couche de matière distribuée sur σ.

5. Si v représente la température d'équilibre d'un corps, v n'est plus défini qu'à l'intérieur de la surface σ qui limite ce corps; mais, comme on peut alors définir arbitrairement la fonction v en dehors de cet intervalle, nous pouvons supposer qu'en dehors de σ elle satisfasse à $\Delta v = 0$, qu'elle soit nulle à l'infini et qu'elle ait la même valeur sur la surface σ à l'extérieur qu'à l'intérieur; nous déterminons ainsi v à l'extérieur de σ, et il est permis encore d'appliquer la formule (e) du n° **2**.

Mais nous pouvons nous représenter v physiquement à l'extérieur comme à l'intérieur de σ. Imaginons, en effet, que le corps homogène renfermé sous σ soit prolongé en tous sens jusqu'à l'infini, et concevons que le corps T renfermé sous σ soit séparé du corps extérieur T' par une couche infiniment mince qui est le siége d'une source de chaleur; l'intensité de cette source est fixe, mais varie d'un point à un autre de la surface, et, par conséquent, la température est la même à la limite de l'espace T et à la limite de l'espace indéfini T'; supposons de plus que la température soit maintenue à zéro à l'infini. La température d'un point quelconque de l'espace T ou de l'espace T' sera donnée par la formule (e). Examinons donc ce que représente $\frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn'}$.

Soit m un élément de la surface σ. En cet élément, établissons la continuité de la matière entre T et T', et désignons par q le coefficient de conductibilité; alors les flux de chaleur normaux à cet élément seront les mêmes dans T et T'. Écrivons donc

$$q\frac{dv}{dn'} = \mathrm{U}, \quad -q\frac{dv}{dn} = \mathrm{U};$$

ces flux proviennent de la source de chaleur entretenue à la surface σ, diminuée de la portion infiniment petite qui recouvre l'élément m. Or, de plus, la partie de la source de chaleur située en m envoie deux flux normaux de même intensité am, mais de sens contraire : l'un à l'intérieur de σ, l'autre à l'extérieur. On a donc

$$q\frac{dv}{dn'} = \mathrm{U} - a, \quad -q\frac{dv}{dn} = \mathrm{U} + a,$$

et il en résulte

$$\frac{dv}{dn'} + \frac{dv}{dn} = -\frac{2a}{q};$$

d'où l'on voit la signification de la quantité du premier membre.

6. Beaucoup de théorèmes sur le potentiel deviennent intuitifs en leur substituant ceux qui y correspondent dans l'équilibre de température.

Ainsi, par exemple, concevons des masses situées à l'extérieur d'une surface σ; si leur potentiel est constant sur la surface, il aura la même valeur constante en un point intérieur quelconque.

Ce théorème revient à celui-ci :

Si la surface d'un corps est entretenue à une même température et qu'il y ait équilibre de chaleur, la température est la même en un point intérieur quelconque.

Lorsque des masses sont situées dans l'intérieur d'une surface fermée σ ou répandues sur cette surface, si le potentiel a une valeur constante A en chaque point de la surface, il a en tout point extérieur une valeur comprise entre A et zéro. Elle est donc constamment nulle, si A est nul.

Cette proposition est renfermée dans celle-ci :

Concevons un corps homogène entre la surface σ qui est intérieure et la surface S qui le limite extérieurement; on entretient la surface σ à la température A fixe, et la même en chaque point, et la surface S à la température zéro. Alors tous les points intérieurs seront à une température comprise entre A et zéro. Ce qui subsiste encore quand la surface S s'éloigne à l'infini.

Revenons à l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

Théorème sur l'expression $\Delta\Delta u$.

7. Désignons par $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et par $d\sigma$ l'élément de sa surface; d'après l'équation (c) du n° **2**, nous avons

$$(1)\qquad \int v\Delta u\, d\varpi - \int u\Delta v\, d\varpi = \int v\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{dv}{dn}d\sigma,$$

u et v étant deux fonctions qui varient d'une manière continue dans l'intérieur de σ, ainsi que leurs dérivées, et dn l'élément de la normale comptée vers l'extérieur.

Dans cette équation, changeons v en $\Delta u'$, nous aurons

$$\int \Delta u\,\Delta u'\,d\varpi = \int u\Delta\,\Delta u'\,d\varpi + \int \Delta u'\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{d\Delta u'}{dn}d\sigma.$$

Le premier membre de cette formule reste invariable par la permutation des fonctions u et u'; il en doit donc être de même du second, et on a

$$\begin{aligned}&\int u\,\Delta\,\Delta u'\,d\varpi + \int \Delta u'\frac{du}{dn}d\sigma - \int u\frac{d\Delta u'}{dn}d\sigma\\ &= \int u'\Delta\,\Delta u\,d\varpi + \int \Delta u\frac{du'}{dn}d\sigma - \int u'\frac{d\Delta u}{dn}d\sigma\end{aligned}$$

ou

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int u\Delta\,\Delta u'\,d\varpi - \int u'\Delta\,\Delta u\,d\varpi\\ &= \int\left(u\frac{d\Delta u'}{dn} - u'\frac{d\Delta u}{dn}\right)d\sigma + \int\left(\Delta u\frac{du'}{dn} - \Delta u'\frac{du}{dn}\right)d\sigma,\end{aligned}\right.$$

formule qui joue le même rôle dans la théorie de l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

que la formule (1) dans la théorie de l'équation

$$\Delta u = 0.$$

Dans la formule (1), u et v étant assujettis à varier d'une manière continue, ainsi que leurs dérivées premières; dans la formule (2), il faut supposer que u, u' et leurs dérivées premières, deuxièmes et troisièmes jouissent de la continuité.

Au lieu de considérer un volume, concevons une surface plane dont l'élément est $d\omega$ et terminée à un contour dont l'élément est ds; si u et v sont des fonctions de deux coordonnées rectangles x, y d'un point de ce plan, nous aurons la formule entièrement analogue à la formule (1)

$$(3)\qquad \int v\Delta u\, d\omega - \int u\Delta v\, d\omega = \int v \frac{du}{dn} ds - \int u \frac{dv}{dn} ds.$$

Puis, par un calcul tout semblable à celui qui nous a conduit à la formule (2), on arrivera à celle-ci :

$$(4)\qquad \begin{cases} \int u\Delta\Delta u'\, d\omega - \int u'\Delta\Delta u\, d\omega \\ \quad = \int \left(u \frac{d\Delta u'}{dn} - u' \frac{d\Delta u}{dn}\right) ds + \int \left(\Delta u \frac{du'}{dn} - \Delta u' \frac{du}{dn}\right) ds, \end{cases}$$

formule dont nous nous sommes déjà servi dans la théorie des plaques vibrantes. Les fonctions sont assujetties dans les formules (3) et (4) aux mêmes conditions de continuité que dans les formules (1) et (2).

Applications de la formule (2).

8. Désignons par r la distance entre le point (x, y, z) extérieur à la surface σ qui limite le corps et le point variable (a, b, c) situé dans ce corps ou à sa surface, de sorte que l'on peut prendre $d\varpi = da\,db\,dc$, et que l'on a

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2.$$

Faisons dans l'équation (2) $u' = r$; nous avons

$$\frac{d^2 r}{da^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3},$$

et, par suite,

$$\Delta r = \frac{2}{r} \quad \text{et} \quad \Delta\Delta r = 0;$$

l'équation (2) devient en conséquence

$$(5)\quad \int r\,\Delta\Delta u\,d\varpi = \int\left(r\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\frac{dr}{dn}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma,$$

formule dans laquelle le point (x, y, z) est extérieur au corps; u dans cette équation est supposé une fonction de a, b, c.

Lorsque le point (x, y, z) est intérieur à la surface σ, l'équation (2) n'est plus immédiatement applicable, parce que $\frac{1}{r}$ devient infini dans l'intérieur du corps quand a, b, c se confondent avec x, y, z. Mais imaginons une sphère s infiniment petite, qui ait son centre au point (x, y, z), et nous pourrons appliquer la dernière équation au volume compris entre s et σ. On voit facilement qu'il faut alors ajouter à la seconde intégrale du second membre cette autre

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{R}\frac{du}{dR} - u\frac{d\frac{1}{R}}{dR}\right)R^2\sin\theta\,d\psi\,d\theta,$$

R étant le rayon de la sphère, et en faisant tendre R vers zéro elle se réduit à l'expression $-8\pi u$ dans laquelle a, b, c sont remplacés par x, y, z.

Donc si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de la surface σ, on a

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int r\Delta\Delta u\,d\varpi \\ &\quad = \int\left(r\frac{d\Delta u}{dn} - \Delta u\frac{dr}{dn}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma - 8\pi u.\end{aligned}\right.$$

Au lieu de faire $u' = r$, prenons généralement pour u' une fonction de a, b, c, qui satisfait par rapport à ces variables à $\Delta\Delta u' = 0$, qui varie d'une manière continue dans l'intérieur de σ, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z) aux environs duquel $\Delta u'$ se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$. On déduira de même de l'équation (2), pour un point intérieur (x, y, z),

$$(7)\quad \begin{cases} \int u'\Delta\Delta u d\varpi \\ \quad = \int\left(u'\frac{d\Delta u}{dn} - u\frac{d\Delta u'}{dn}\right)d\sigma + \int\left(\Delta u'\frac{du}{dn} - \Delta u\frac{du'}{dn}\right)d\sigma - 8\pi u, \end{cases}$$

équation que nous aurons occasion d'employer.

Du second potentiel.

9. Considérons le potentiel donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r}\, da\, db\, dc$$

étendue à un certain volume Π, et dans laquelle r désigne la distance du point (x, y, z) au point variable (a, b, c). On sait que l'on a

$$\Delta v = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta v = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

selon que le point (x, y, z) est situé en dehors ou en dedans du volume Π.

Passons de cette fonction à la suivante :

$$w = \int\int\int r\varphi(a, b, c)\, da\, db\, dc;$$

nous aurons

$$(a)\qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \int\int\int \varphi(a, b, c)\left[\frac{1}{r} - \frac{(x-a)^2}{r^3}\right] da\, db\, dc,$$

et, par suite,

$$(b)\qquad \Delta w = 2v,$$

ainsi que l'a remarqué M. Lamé dans sa *Théorie de l'Élasticité*, 6e Leçon.

Il faut observer que l'équation (a), et par suite l'équation (b), a lieu quand le point (x, y, z) est intérieur aussi bien que lorsqu'il est extérieur au volume Π, parce que l'infini qui se trouve dans l'intégrale de l'équation (a) est d'un ordre moindre que $\frac{1}{r^3}$, et si l'on applique cette intégrale au volume d'une sphère infiniment petite entourant ce point, on obtient un résultat nul.

L'équation (b) étant prouvée, on a, en prenant le Δ des deux membres,

$$\Delta\Delta w = 0, \text{ si le point } (x, y, z) \text{ est extérieur au volume } \Pi,$$
$$\Delta\Delta w = -8\pi\varphi(x, y, z), \text{ si ce point lui est intérieur.}$$

Nous appellerons w le *second potentiel* de la masse renfermée dans Π, et quand nous voudrons distinguer v de w, nous lui donnerons le nom de *premier potentiel*. Les dérivées de w par rapport à x, y, z sont les composantes suivant les trois axes de coordonnées d'une attraction d'après laquelle deux molécules s'attireraient suivant la droite qui les joint, mais indépendamment de leur distance.

10. Imaginons une couche de matière infiniment mince répandue sur la surface σ; en désignant par ρ la densité de cette couche, on aura pour son second potentiel

$$w = \int \rho r d\sigma;$$

w en dedans et en dehors de la surface σ satisfera à l'équation $\Delta\Delta w = 0$, et, de plus, dans ces deux espaces w variera d'une manière continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres. Si l'on appelle v et v' le premier potentiel de cette couche à l'extérieur et à l'intérieur, on aura

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv}{dn} + \frac{dv'}{dn'}\right) = -\frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\Delta w}{dn} + \frac{d\Delta w'}{dn'}\right).$$

Remarquons aussi que, lorsque le point (x, y, z) traverse la couche, la fonction w et ses dérivées des deux premiers ordres varient d'une manière continue; mais les dérivées du troisième ordre sont en général discontinues.

Ici il nous serait facile de démontrer ce théorème : *Il existe toujours une couche de matière, et une seule, distribuée sur la surface* σ *et dont le second potentiel a une valeur donnée en chaque point de cette surface.*

Mais pour le prouver, il suffit de suivre littéralement la démonstration citée au n° **3** du même théorème donné par Gauss pour le premier potentiel, qui compose la partie la plus remarquable de son Mémoire. Faisons toutefois observer que la considération du minimum employée par Gauss doit être remplacée par celle d'un maximum.

Sur une solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

11. Je dis qu'on peut toujours trouver une fonction u qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0 \tag{1}$$

à l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface.

A cet effet posons

$$u = w + v, \tag{2}$$

$$v = \int \frac{\rho'}{r} d\sigma, \quad w = \int \rho r d\sigma,$$

ρ et ρ' étant des fonctions des coordonnées de chaque point (a, b, c) de la surface σ et r^2 égal à

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2);$$

v et w sont par conséquent les premier et second potentiels de deux couches de matière qui recouvrent cette surface.

D'abord, la fonction u satisfait à l'équation (1) et aux conditions de continuité. Il faut ensuite que, sur la surface, u soit égal à la fonction ψ, et Δu ou Δw soit égal à φ.

D'après cela, $t = \Delta w$ satisfera, d'après (1), à l'équation

$$\Delta t = 0,$$

et sera une fonction donnée à la surface; elle est donc complétement déterminée (n° **3**), et, de plus, elle peut se mettre sous la forme

$$t = 2\int \frac{\rho}{r}\, d\sigma;$$

et si l'on prend

$$w = \int \rho r\, d\sigma,$$

Δw sera égal à φ à la surface, et on aura bien d'après le n° **9**

$$\Delta w = t.$$

Connaissant w, on aura la valeur de v à la surface en retranchant celle de w de celle qui a été donnée pour u; par suite, v sera complétement déterminé.

Ainsi, le théorème est démontré, et, de plus, on voit comment on peut mettre la solution sous la forme (2).

Des conditions aux limites qui déterminent parfaitement la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

12. Considérons une fonction u de x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, et supposons que u et ses dérivées des trois premiers ordres y varient d'une manière continue; u' étant supposé une fonction semblable à u, on a, d'après la deuxième équation du n° **7**,

$$\int u \Delta\Delta u'\, d\varpi = \int \Delta u\, \Delta u'\, d\varpi - \int \Delta u' \frac{du}{dn}\, d\sigma + \int u \frac{d\Delta u'}{dn}\, d\sigma.$$

Faisons $u' = u$, et nous aurons

$$o = \int (\Delta u)^2 d\varpi - \int \Delta u \frac{du}{dn} d\sigma + \int u \frac{d\Delta u}{dn} d\sigma;$$

mais, comme u n'est défini qu'à l'intérieur de σ, il convient de mener la normale vers l'intérieur et de la compter dans cette direction; remplaçant dn par $-dn'$, on a

$$(c) \qquad o = \int (\Delta u)^2 d\varpi + \int \Delta u \frac{du}{dn'} d\sigma - \int u \frac{d\Delta u}{dn'} d\sigma.$$

Alors supposons que, sur la surface σ, u satisfasse à l'un des deux systèmes de condition :

1° $\qquad u = o, \quad \Delta u = o;$

2° $\qquad u = o, \quad \dfrac{du}{dn'} = o,$

l'équation précédente se réduira à

$$\int (\Delta u)^2 d\varpi = o;$$

on en conclut que Δu est nul en tous les points de l'intérieur de σ, et, par suite, u est lui-même nul dans toute cette étendue. Car on sait que, lorsqu'une fonction u satisfait à $\Delta u = o$ dans l'intérieur de σ et s'annule à cette surface, elle est nulle en tous les points intérieurs (nº **6**).

De là on conclut immédiatement :

Il ne peut exister qu'une fonction qui satisfasse à l'équation

$$\Delta\Delta u = o$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et pour laquelle

$$u, \quad \Delta u \quad \text{ou} \quad u, \quad \frac{du}{dn'}$$

aient une valeur donnée à la surface.

Soient en effet u et u' des fonctions qui satisfont toutes deux à l'une des hypothèses, et posons

$$u - u' = \theta.$$

θ satisfera en tous les points du volume ϖ à l'équation

$$\Delta\Delta\theta = 0,$$

et on aura à la surface

$$\theta = 0, \quad \Delta\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta = 0, \quad \frac{d\theta}{dn'} = 0,$$

et, par conséquent, θ sera nul en tous les points intérieurs; ce qu'il fallait démontrer.

Or, nous avons vu que l'on peut toujours trouver une fonction de la forme

$$u = \int \rho r \, d\sigma + \int \frac{\rho'}{r} \, d\sigma,$$

dont la valeur ainsi que celle de son Δ sont données à la surface σ.

On en conclut les deux théorèmes suivants :

1° *Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation*

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface.

2° *Toute fonction u qui satisfait, à l'intérieur de σ, à l'équation $\Delta\Delta u = 0$, et qui est assujettie aux conditions précédentes de continuité, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la surface σ, et du second potentiel d'une autre couche recouvrant la même surface.*

Ce second théorème donne donc l'intégrale générale de l'équation aux différences partielles, intégrale dans laquelle les densités des couches sont deux fonctions continues quelconques des coordonnées de la surface σ.

13. Il y a un théorème semblable au premier dans lequel on se donne à la surface u et $\frac{du}{dn'}$, au lieu de u et Δu, et que nous allons démontrer.

Pour éviter toute confusion, continuant à poser

$$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2};$$

quelle que soit la fonction u, posons de plus

$$\Delta' u = \frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{d^2u}{dy'^2} + \frac{d^2u}{dz'^2},$$

et l'on voit bien, par conséquent, ce que représentera l'expression $\Delta'\Delta' u$; puis établissons le lemme suivant.

Lemme. — On peut toujours trouver une fonction U de x, y, z et de x', y', z' : 1° qui reste invariable quand on permute x, y, z respectivement avec x', y', z' ; 2° qui, considérée comme fonction de x', y', z', varie d'une manière continue dans l'intérieur de la surface σ, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z), aux environs duquel son Δ' se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$, r étant la distance entre les points (x, y, z) et (x', y', z'); 3° qui satisfait aux deux équations

$$\Delta\Delta \mathrm{U} = 0, \quad \Delta'\Delta' \mathrm{U} = 0,$$

quand (x, y, z) et (x', y', z') sont deux points intérieurs à la surface σ; 4° qui se réduit à zéro quand le point (x', y', z') vient sur la surface.

Prenons un point quelconque P (x, y, z) dans l'espace limité par la surface σ; selon ce qui a été dit au n° **10**, on peut toujours couvrir cette surface d'une couche de matière, de telle sorte que le second potentiel de cette couche, par rapport à un point quelconque M de la surface, soit égal à R (P, M), en désignant par R (P, M) la distance entre les points P et M.

Comme cette couche dépend de la position du point P, représentons par ρ (P) sa densité; le second potentiel de cette couche, par rapport à un second point intérieur P', étant désigné par Γ (P, P'), nous aurons

$$(1) \qquad \Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \int \rho(\mathrm{P})\,\mathrm{R}(d\sigma, \mathrm{P}')\,d\sigma,$$

d'après la définition même du second potentiel; et, x', y', z' étant les coordonnées du point P', on aura, d'après un théorème connu (n° **9**),

$$(2) \qquad \Delta'\Delta'\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = 0,$$

et, d'après la condition admise à la surface σ, on a

$$(3) \qquad \int \rho(\mathrm{P})\,\mathrm{R}(d\sigma, \mathrm{M})\,d\sigma = \mathrm{R}(\mathrm{P}, \mathrm{M}),$$

M étant un point quelconque de cette surface.

Considérons ensuite une seconde couche qui soit, par rapport à P', ce qu'est la première par rapport au point P. Suivant les notations précédentes, $\rho(\mathrm{P}')$ sera la densité de cette couche dont le second potentiel, par rapport au point G, sera

$$\int \rho(\mathrm{P}')\,\mathrm{R}(d\sigma', \mathrm{G})\,d\sigma',$$

$d\sigma'$ étant un élément quelconque de la surface σ; et la condition à la surface donne

$$\int \rho(\mathrm{P}')\,\mathrm{R}(d\sigma', d\sigma)\,d\sigma' = \mathrm{R}(\mathrm{P}', d\sigma).$$

Portons cette valeur de $\mathrm{R}(\mathrm{P}', d\sigma)$, dans l'équation (1), et nous aurons

$$\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \int\int \rho(\mathrm{P})\,\rho(\mathrm{P}')\,\mathrm{R}(d\sigma, d\sigma')\,d\sigma\,d\sigma',$$

d'où l'on conclut

$$\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \Gamma(\mathrm{P}', \mathrm{P});$$

ainsi, cette fonction de x, y, z et de x', y', z' reste invariable quand on transpose x, y, z respectivement avec x', y', z'; et comme elle satisfait à l'équation (2), elle satisfait aussi à

$$\Delta\Delta\Gamma(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = 0;$$

de plus, d'après l'équation (3), elle se réduit à R(P, M), si le point P vient à la surface.

Alors considérons la fonction de x, y, z et de x', y', z',

$$U = R(P, P') - \Gamma(P, P'),$$

elle satisfait aux deux équations $\Delta\Delta U = 0$, $\Delta'\Delta' U = 0$; elle se réduit à zéro quand le point P′ vient à la surface, et elle remplit toutes les conditions du lemme.

14. Démontrons maintenant le théorème suivant :

Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation

$$(f) \qquad \Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur est donnée à la surface ainsi que celle de $\frac{du}{dn'}$.

A cet effet employons la fonction U du lemme précédent; mais remplaçons x, y, z par les lettres a, b, c, que nous supposerons désigner les coordonnées d'un point intérieur à la surface, et posons

$$\Delta' u = \frac{d^2u}{da^2} + \frac{d^2u}{db^2} + \frac{d^2u}{dc^2}.$$

La fonction U satisfait à l'équation

$$\Delta'\Delta' U = 0$$

dans l'intérieur de σ; considérée comme fonction de a, b, c, elle est continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, excepté au point (x, y, z), aux environs duquel ΔU se réduit sensiblement à $\frac{2}{r}$, en posant

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - (z-c)^2;$$

enfin, U est nul lorsque le point (a, b, c) est à la surface; donc, en appliquant l'équation (7) du n° **8**, on aura

$$(g) \qquad 8\pi u = \int\left(u\frac{d\Delta' U}{dn'} - \Delta' U\frac{du}{dn'}\right)d\sigma + \int \Delta' u\frac{dU}{dn'}d\sigma,$$

en mettant a, b, c au lieu de x, y, z dans la fonction u sous le signe intégral. Quand le point (x, y, z) est sur la surface, cette équation n'est plus applicable, parce que la sphère infiniment petite que l'on a employée au numéro cité pour obtenir le terme du premier membre doit être remplacée par une demi-sphère intérieure bornée à σ; ce qui conduit à remplacer le premier membre par $4\pi u$. On a donc

$$(h) \qquad 4\pi u = \int u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} d\sigma - \int \Delta' \mathrm{U} \frac{du}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} d\sigma,$$

quand (x, y, z) est un point de la surface.

Au moyen de cette équation, u étant donné à la surface ainsi que l'une des quantités $\frac{du}{dn'}$ et $\Delta' u$, on aura l'autre.

Pour le prouver, divisons d'abord la surface σ en un nombre k de parties très-petites que nous désignerons par τ, et écrivons l'équation

$$(k) \qquad 4\pi u = \sum u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} \tau - \sum \Delta' \mathrm{U} \frac{du}{dn'} \tau + \sum \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} \tau,$$

en prenant pour toutes les quantités du second membre leurs valeurs moyennes sur chaque élément.

U est fonction de x, y, z, et u, dans le premier membre, est fonction des mêmes coordonnées. Prenons pour le point (x, y, z) successivement le centre de chacun des k éléments de surface, nous obtiendrons ainsi k équations. Donnons aux k quantités $\Delta' u$ telles valeurs que l'on voudra, et nous aurons k équations du premier degré par rapport aux k quantités $\frac{du}{dn'}$. Et ces $\frac{du}{dn'}$ pourront obtenir telles valeurs que l'on voudra; car, inversement, ces $\frac{du}{dn'}$ étant donnés, on pourra tirer des valeurs convenables pour les $\Delta' u$.

Imaginons que les éléments τ deviennent infiniment petits, et nous voyons que, lorsque $\frac{du}{dn'}$ sera connu à la surface, $\Delta' u$ sera déterminé par l'équation (h), et si l'on suppose que l'on en déduise sa valeur, on aura u par l'équation (g), dont le second membre ne renfermera plus rien d'inconnu.

Il est d'ailleurs facile de prouver que la fonction u donnée par cette formule satisfera à l'équation (f), et que sa valeur et celle de $\frac{du}{dn'}$ sur la surface σ sont les fonctions données.

D'abord, si nous prenons le $\Delta\Delta$ des deux membres de l'équation (g), cette opération, dans le second membre, ne pourra porter que sur les dérivées de U qui renferment seules x, y, z; donc le $\Delta\Delta$ de chacune de ces intégrales sera nul, et on aura

$$\Delta\Delta u = 0.$$

Reste à prouver que u et $\frac{du}{du'}$ ont les valeurs voulues sur la surface σ. Pour cela remarquons que nous pouvons former, et d'une seule manière, une fonction v satisfaisant à l'équation $\Delta\Delta v = 0$, dont la valeur à la surface soit celle qui a été donnée pour u, et dont la valeur du Δ sur σ soit celle qui a été calculée ci-dessus pour Δu. Et de même qu'on a posé l'équation (g), on peut poser celle-ci :

$$(g') \qquad 8\pi v = \int u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} d\sigma - \int \Delta' \mathrm{U} \frac{dv}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} d\sigma,$$

qui, appliquée à la surface, donne

$$(h') \qquad 4\pi u = \int u \frac{d\Delta' \mathrm{U}}{dn'} d\sigma - \int \Delta' \mathrm{U} \frac{dv}{dn'} d\sigma + \int \Delta' u \frac{d\mathrm{U}}{dn'} d\sigma.$$

Or, si on compare l'équation (h) à l'équation (h'), on voit qu'elles ne diffèrent que par les dérivées $\frac{du}{dn'}$, $\frac{dv}{dn'}$; par la comparaison des k équations (k) aux k équations analogues déduites de (h'), on voit que l'on a $\frac{dv}{dn'} = \frac{du}{dn'}$ à la surface. Les seconds membres des équations (g) et (g') sont donc identiques, ce qu'il fallait démontrer

Sur la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ en dehors d'une surface fermée.

15. On peut toujours trouver, en dehors d'une surface fermée σ, une fonction de x, y, z qui satisfait à l'équation $\Delta\Delta u = 0$ et telle que u et Δu aient des valeurs données sur la surface σ.

Il suffit de prendre pour u l'expression trouvée au n° **11**,

$$u = w + v, \quad \text{avec} \quad w = \int r\rho\, d\sigma, \quad v = \int \frac{\rho'}{r}\, d\sigma.$$

Car, quoique les dérivées du premier ordre de v, et, par suite, celles de u varient d'une manière discontinue quand on traverse la surface, Δv étant nul partout au dedans et au dehors de σ, il s'ensuit que u et Δu ont les mêmes valeurs à la limite de l'espace intérieur et à la limite de l'espace extérieur.

Supposons que l'on prenne le point (x, y, z) à une très-grande distance R d'un point fixe G situé dans σ; soit g la distance du point G à l'élément $d\sigma$, et ω l'angle de g et de R, on aura

$$r = \mathrm{R}\left(1 - \frac{2g}{\mathrm{R}}\cos\omega + \frac{g^2}{\mathrm{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite, en négligeant les termes très-petits multipliés par $\frac{1}{\mathrm{R}}$,

$$u = \int \rho r\, d\sigma = \mathrm{R}\int \rho\, d\sigma + \int g\cos\omega\, \rho\, d\sigma.$$

Or on a

$$\cos\omega = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi'),$$

ψ et ψ' étant les longitudes du point (x, y, z) et de l'élément $d\sigma$, et θ, θ' étant les compléments de leurs latitudes par rapport au point G pris pour centre; donc le second terme de cette expression de u est de la forme

$$\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\cos\theta\cos\psi + \mathrm{C}\sin\theta\sin\psi.$$

Réciproquement, si une fonction satisfait partout, à l'extérieur de σ, à l'équation $\Delta\Delta u = 0$, qu'elle soit continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et que, de plus, quand R est très-grand, elle se réduise à la forme

$$\mathrm{MR} + \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta\cos\psi + \mathrm{C}\sin\theta\sin\psi,$$

M, A, B, C étant des constantes et R, θ, ψ des coordonnées polaires prises par rapport à un point intérieur; cette fonction est alors la somme du premier et du second potentiel de deux couches qui recouvrent la surface σ.

Il nous serait très-aisé de démontrer ce théorème au moyen des formules (5) et (6) du n° **8**; mais, comme il est beaucoup moins utile que le théorème analogue relatif à l'intérieur de σ, nous nous bornons à l'énoncer. Remarquons aussi que toutes ces conséquences peuvent s'étendre à l'espace situé en dehors de plusieurs surfaces fermées que l'on recouvrirait chacune de deux couches.

Sur l'équation $\Delta v = 0$ réduite à deux variables.

16. Il convient d'étudier à part le cas particulier où les deux équations

$$\Delta v = 0, \quad \Delta\Delta u = 0$$

ne contiennent que les deux coordonnées rectangulaires x et y.

Occupons-nous d'abord de la première qui se réduit à

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0. \tag{1}$$

D'après l'équation (3) du n° **7**, nous aurons

$$\int v \Delta v' d\omega - \int v' \Delta v d\omega = \int v \frac{dv'}{dn} ds - \int v' \frac{dv}{dn} ds,$$

$d\omega$ étant l'élément d'une surface plane ω et ds l'élément de son contour, et v et v' sont deux fonctions de x et y qui sont continues ainsi que leurs dérivées.

Posons

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2, \quad v' = \log r,$$

de manière que r représente la distance du point (x, y) au point variable (a, b). Nous aurons, en comptant la normale vers l'intérieur,

$$\int \log r \Delta v \, d\omega = \int v \frac{d \log r}{dn'} ds - \int \log r \frac{dv}{dn'} ds, \tag{2}$$

si le point (x, y) est situé à l'extérieur du cylindre parallèle à l'axe des z et dont la section droite est ω.

Supposons le point (x, y) à l'intérieur de ce cylindre, la formule ne peut être appliquée, parce que $\log r$ devient infini dans l'intérieur de la courbe s. Imaginons un cylindre circulaire de rayon très-petit parallèle à l'axe des z et dont l'axe passe par le point (x, y); nous aurons, en appliquant la formule à l'espace compris entre les deux cylindres,

$$\int \log r\,\Delta v\, d\omega = \int v \frac{d\log r}{dn'} ds + \int_0^{2\pi} v \frac{d\log\alpha}{d\alpha}\alpha\, d\theta$$
$$- \int \log r \frac{dv}{dn'} ds - \int_0^{2\pi} \log\alpha \frac{dv}{d\alpha}\alpha\, d\theta,$$

α étant le rayon du cylindre; quand α tend vers zéro, la quatrième intégrale tend vers zéro et la seconde vers $2\pi v$.

Donc si le point (x, y) est intérieur, on a

$$(3)\qquad \int \log r\,\Delta v\, d\omega = \int v \frac{d\log r}{dn'} ds - \int \log r \frac{dv}{dn'} ds + 2\pi v.$$

17. Supposons ensuite que v représente le potentiel d'une masse cylindrique dont la densité ρ ne varie pas avec z; v en dehors de cette masse satisfera à l'équation (1) et dans cette masse à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = -4\pi\rho.$$

Concevons que ces masses soient situées à l'intérieur du cylindre, et voyons ce que deviennent les équations (2) et (3). Or on a

$$\int \log r\,\Delta v\, d\omega = -\int \log r\, 4\pi\rho\, d\omega = -4\pi \int \log r\,\rho\, d\omega.$$

L'attraction, suivant la loi de la nature, d'une droite homogène dont la densité est 1 a pour valeur $\frac{2}{r}$ à la distance r, et on en conclut facilement que le potentiel des masses est $v = -2\int \log r\,\rho\, d\omega$. On a donc

$$\int \log r\,\Delta v\, d\omega = 2\pi v.$$

Donc, si le cylindre renferme les masses cylindriques attirantes, on a, en appliquant l'équation (2),

$$(4) \qquad 2\pi v = -\int \log r \frac{dv}{dn'} ds + \int v \frac{d \log r}{dn'} ds$$

si le point (x, y) est extérieur au cylindre, et en appliquant l'équation (3)

$$(5) \qquad 0 = -\int \log r \frac{dv}{dn'} ds + \int v \frac{d \log r}{dn'} ds$$

si le point est intérieur au cylindre.

Au lieu d'un cylindre, imaginons une courbe s qui renferme des masses attirantes dont l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse soit égale à $\frac{2}{r}$: en désignant par v le potentiel de ces masses planes, on aura l'équation (4) si le point (x, y) est extérieur à la courbe, et l'équation (5) si le point est intérieur.

18. Démontrons maintenant ce théorème :

Si une fonction v est assujettie à satisfaire à l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0$$

dans l'intérieur de la courbe s et à être contenue, ainsi que ses deux dérivées, elle peut être regardée comme le potentiel d'une couche située sur la courbe s, dont l'attraction est représentée par $\frac{2}{r}$.

D'après les considérations du n° 3, on peut démontrer que l'on peut sur un cylindre indéfini distribuer de la matière d'une manière uniforme sur chaque génératrice, de telle sorte que le potentiel ait une valeur donnée sur chaque génératrice, ou, ce qui revient au même, on peut distribuer sur une courbe plane de la matière dont l'attraction soit représentée par $\frac{2}{r}$ et dont le potentiel ait une valeur donnée en chaque point de la courbe.

Ensuite remarquons que le point (x, y) étant intérieur à s et Δv nul à l'intérieur de cette courbe, on a d'après (3)

$$2\pi v = \int \log r \frac{dv}{dn'} ds - \int v \frac{d \log r}{dn'} ds.$$

Cette quantité v a une certaine valeur sur le contour, et nous pouvons imaginer une couche dont l'attraction ait lieu suivant la loi citée et dont le potentiel ait sur la courbe la même valeur que v. Soit donc V le potentiel extérieur de cette couche, je dis qu'on a d'après l'équation (5)

$$o = \int \log r \frac{dV}{dn} ds - \int v \frac{d \log r}{dn} ds.$$

En effet, supposons d'abord la masse située à l'intérieur de la courbe s; alors $\frac{dV}{dn}$ est égal à $-\frac{dV}{dn'}$, et il est évident qu'on a cette équation; de plus, cette équation subsiste quelque près que les masses soient de la courbe, et par suite elle aura encore lieu quand elles formeront une couche sur σ; mais alors $\frac{dV}{dn}$ ne sera plus égal à $-\frac{dV}{dn'}$.

Ajoutons les deux équations, et, en divisant par 2π, nous aurons

$$v = \frac{1}{2\pi} \int \log r \left(\frac{dv}{dn'} + \frac{dV}{dn}\right) ds;$$

et les dérivées $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ donnent les composantes de l'attraction d'une couche suivant la loi indiquée.

Soit ensuite une fonction v qui satisfait à l'équation $\Delta v = o$ dans tout le plan à l'extérieur de la courbe s et qui reste continue en toute cette étendue avec ses deux dérivées; supposons, en outre, que si le point (x, y) va à une distance très-grande, v se réduise en négligeant $\frac{1}{R^2}$ à l'expression

$$A \log R + \frac{B}{R}, \tag{6}$$

où A *est constant et* R *la distance de ce point à un point fixe* (x_1, y_1)

situé dans la courbe s; alors v pourra être regardé comme le potentiel d'une couche située sur la courbe s dont l'attraction varie en raison inverse de la distance.

Considérons d'abord l'espace compris entre la courbe s et le cercle S dont le centre est au point (x_1, y_1) et le rayon égal à R; si le point (x, y) est situé dans cet espace, on a d'après l'équation (3)

$$\begin{aligned} 0 = &-\int \log r \frac{dv}{dn} ds + \int v \frac{d\log r}{dn} ds \\ &+ \int_0^{2\pi} \log r \frac{dv}{dR} R\, d\theta - \int_0^{2\pi} v \frac{d\log r}{dR} R\, d\theta + 2\pi v, \end{aligned}$$

et si l'on substitue l'expression (6) dans les deux dernières intégrales, on a quatre termes, dont deux se détruisent et dont les deux autres s'annulent quand on fait $R = \infty$; donc l'équation se réduit à

$$2\pi v = \int \log r \frac{dv}{dn} ds - \int v \frac{d\log r}{dn} ds.$$

Nous pouvons imaginer une couche qui recouvre la courbe s et dont le potentiel ait sur cette courbe la même valeur que v. Soit V le potentiel intérieur de cette couche, on a, d'après l'équation (2), qui est applicable puisque le point (x, y) est extérieur,

$$0 = +\int \log r \frac{dV}{dn'} ds - \int v \frac{d\log r}{dn'} ds.$$

En ajoutant les deux dernières équations, on a

$$v = +\frac{1}{2\pi} \int \log r \left(\frac{dv}{dn} + \frac{dV}{dn'}\right) ds;$$

d'où l'on conclut le théorème.

Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ réduite à deux coordonnées.

19. Soit encore

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2;$$

on a

$$\Delta\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right) = 4\log r, \quad \Delta\Delta\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right) = 0.$$

Posons

$$v = 2\int\int \log r\,\varphi(a,\,b)\,da\,db, \quad w = \int\int\left(r^2\log r - \frac{r^2}{2}\right)\varphi(a,\,b)\,da\,db,$$

et regardons ces intégrales doubles comme étendues à une surface Ω; r est la distance du point $(x,\,y)$ au point variable $(a,\,b)$. Comme au n° **10**, nous désignerons v et w sous le nom de *premier* et de *second potentiel*. Les dérivées de w par rapport à x et y représentent les composantes d'une attraction qui varie avec la distance proportionnellement à $r\log r$.

Si le point $(x,\,y)$ est situé hors de la surface attractive Ω, on a

$$\Delta v = 0;$$

s'il s'y trouve renfermé, on a (n° **16**)

$$\Delta v = +\,4\pi\varphi(x,\,y).$$

On a ensuite

$$\Delta w = 2v,$$

et par suite

$$\Delta\Delta w = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta\Delta w = 8\pi\varphi(x,y),$$

selon que le point (x,y) est en dehors ou en dedans de Ω.

Les définitions précédentes du premier et du second potentiel étant adoptées, il suffit d'appliquer les raisonnements des n^{os} **11**, **12**, **13**, **14** pour retrouver sur la solution de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ réduite à deux dimensions des théorèmes semblables à ceux qu'on avait trouvés pour trois dimensions. On a donc les théorèmes suivants :

1° *Toute fonction qui satisfait à l'intérieur de la courbe s à l'équation*

$$\Delta\Delta u = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = 0$$

et qui y est continue, ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la courbe s *et du second potentiel d'une autre couche mise sur le même contour.* Ainsi elle est de la forme

$$\int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right) \varphi(a, b)\, ds + \int \log r\, \psi(a, b)\, ds,$$

a, b désignant les coordonnées de l'élément ds du contour et φ et ψ deux fonctions continues quelconques de ces coordonnées.

2° *Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait dans l'intérieur de la courbe s à l'équation* $\Delta\Delta u = 0$ *et aux conditions précédentes de continuité, et pour laquelle*

$$u,\ \Delta u \quad \text{ou} \quad u,\ \frac{du}{dn'}$$

aient des valeurs données sur la courbe s.

Sur l'intégration de l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

20. Imaginons que l'on sache trouver une fonction v satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \Delta v = 0$$

et dont la valeur est donnée arbitrairement sur une surface déterminée σ; v en général s'obtient sous forme d'une série dont les coefficients sont d'abord quelconques et se calculent ensuite d'après la valeur donnée à la surface. Si donc nous prenons v à la surface, nous aurons la fonction la plus générale d'un point de cette surface.

Cela posé, la fonction qui satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur de la même surface est de la forme

$$u = v + \int \rho\, r\, d\sigma;$$

v sera une série de forme connue, ainsi que ρ qui représente la fonction la plus générale d'un point de la surface; par conséquent, u renfermera deux séries de coefficients, l'une provenant de v, l'autre provenant de ρ, et on aura à les déterminer par deux conditions à la surface.

Nous venons de supposer que les équations (1) et (2) se rapportent à trois coordonnées rectangulaires; supposons ensuite qu'elles ne dépendent plus que de deux coordonnées x et y. Alors l'équation (1) sera remplacée par cette autre

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} = 0, \tag{3}$$

à laquelle v devra satisfaire dans l'intérieur d'une courbe s. Cette courbe pourra toujours être considérée comme appartenant à une famille de courbes isothermes, c'est-à-dire à une famille de courbes sur chacune desquelles la température peut être la même dans un certain équilibre de température. Et d'après un théorème de M. Lamé, la famille de courbes orthogonale à la première sera elle-même isotherme. Substituons aux coordonnées x et y les coordonnées thermométriques α et β; nous aurons

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0 \tag{4}$$

au lieu de l'équation (3), et la courbe s sera représentée par

$$\beta = \mathrm{B},$$

B étant une constante, et par conséquent une fonction d'un point de la courbe s ne dépendra que de α.

La recherche de la fonction v n'offrira pas en général de difficulté, et la solution de l'équation (2), qui peut s'écrire

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2\,dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = 0, \tag{5}$$

sera

$$u = v + \int\left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right)ds,$$

ρ étant une fonction d'un point de la courbe s, et par suite une fonction de α, qu'on saura mettre sous la forme d'une série.

On a d'ailleurs

$$ds = \frac{d\alpha}{h} \quad \text{avec} \quad h = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2},$$

et comme h doit être pris sur le contour, il est une fonction de α et de B; on a donc

$$u = v + \int\left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha. \tag{6}$$

$\varphi(\alpha)$ n'est pas une fonction absolument arbitraire de α; mais elle peut avoir telles valeurs que l'on veut dans l'étendue où il suffit de faire varier α pour obtenir tous les points du contour.

Proposons-nous de trouver l'équilibre d'élasticité d'une plaque homogène plane et dont l'épaisseur est partout la même. Il s'agit de trouver les déplacements normaux d'un point quelconque de la surface médiane, connaissant ceux de son contour et les inclinaisons des normales au contour sur leurs directions primitives. Ce déplacement u satisfait à l'équation (5) et on se donne u et $\frac{du}{dn}$ ou u et $\frac{du}{d\beta}$, puisque $\frac{du}{dn}$ est égal à $h\frac{du}{d\beta}$ et que h est une fonction connue. Ces deux conditions au contour permettront de déterminer les deux séries de coefficients qui se trouvent dans v et $\varphi(\alpha)$. Nous allons appliquer cette méthode aux cas de la plaque circulaire et de la plaque elliptique.

Équilibre d'élasticité d'une plaque circulaire.

21. La courbe s est un cercle dont on prend le centre pour l'origine des coordonnées, et on substitue aux coordonnées x et y les quantités α et β ou α et R liées aux premières par les équations

$$x = \mathrm{R}\cos\alpha = ae^{\beta}\cos\alpha, \quad y = \mathrm{R}\sin\alpha = ae^{\beta}\sin\alpha.$$

Le premier potentiel d'une couche distribuée sur le cercle $\mathrm{R} = a$

ou $\beta = 0$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 v}{d\alpha^2} + \frac{d^2 v}{d\beta^2} = 0,$$

et il est donné à l'intérieur et à l'extérieur par les deux formules

$$v = M_0 \log a + (M_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha)\frac{R}{a} + \ldots$$
$$+ (M_n \cos n\alpha + N_n \sin n\alpha)\frac{R^n}{a^n} + \ldots,$$
$$V = M_0 \log R + (M_1 \cos\alpha + N_1 \sin\alpha)\frac{a}{R} + \ldots$$
$$+ (M_n \cos n\alpha + N_n \sin n\alpha)\frac{a^n}{R^n} + \ldots.$$

En faisant dans ces deux formules $R = a$, nous aurons la forme de la fonction $\varphi(\alpha)$ qui se trouve dans la formule (6), et nous prendrons

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1 \cos\alpha + B_1 \sin\alpha + A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha + \ldots,$$

comme cela est d'ailleurs évident, puisque la fonction $\varphi(\alpha)$ ne doit être assujettie qu'à posséder la période 2π.

α_1 et a étant les coordonnées d'un point du contour, α, R celles d'un point de l'intérieur, on a, pour la distance qui les sépare,

$$r = (R^2 - 2aR\cos(\alpha - \alpha_1) + a^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$r = a\left(1 - \frac{R}{a} e^{(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R}{a} e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons les logarithmes en appliquant le développement de

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \ldots,$$

et nous aurons

$$\log r = \log a - \frac{R}{a}\cos(\alpha - \alpha_1) - \frac{1}{2}\frac{R^2}{a^2}\cos 2(\alpha - \alpha_1) - \frac{1}{3}\frac{R^3}{a^3}\cos 3(\alpha - \alpha_1) - \ldots.$$

Pour $R = a$, u et $\frac{du}{dR}$ sont des fonctions données $\theta(\alpha)$ et $\chi(\alpha)$; voyons donc ce que deviennent, pour $R = a$, les deux formules

$$u = v + \int\left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2}\right)\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$
$$\frac{du}{dR} = \frac{dv}{dR} + 2\int \log r\,[R - a\cos(\alpha - \alpha_1)]\,\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Remplaçons $\alpha - \alpha_1$ par θ, désignons par U ce que devient $r^2\left(\log r - \frac{1}{2}\right)$ quand on fait $R = a$, et nous aurons

$$\begin{aligned} U &= 2a^2(1 - \cos\theta)\left(\log a - \frac{1}{2} - \cos\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{3}\cos 3\theta - \ldots\right) \\ &= 2a^2\left[\log a - \left(\log a + \frac{1}{4}\right)\cos\theta + \frac{1}{6}\cos 2\theta + \frac{1}{24}\cos 3\theta + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{n(n^2-1)}\cos n\theta + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Alors, en ayant égard aux formules

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\alpha\,d\alpha = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos n\alpha \cos n'\alpha\,d\alpha = 0,$$

où n et n' sont des nombres entiers différents, on trouve pour la première condition au contour

$$\begin{aligned} &M_0 \log a + 4\pi a^2 \log a\, A \\ &\quad + \left[M_1 - 2\pi a^2\left(\log a + \frac{1}{4}\right)A_1\right]\cos\alpha_1 \\ &\quad + \left[N_1 - 2\pi a^2\left(\log a + \frac{1}{4}\right)B_1\right]\sin\alpha_1 + \ldots \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad\quad + \left(M_n + \frac{2\pi a^2}{n(n^2-1)}A_n\right)\cos n\alpha_1 \\ &\qquad\quad + \left(N_n + \frac{2\pi a^2}{n(n^2-1)}B_n\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \theta(\alpha_1). \end{aligned}$$

D'une semblable manière on obtient, pour la seconde condition au contour,

$$4a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)A_0 + \left[\frac{M_1}{a} - 2a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)A_1\right]\cos\alpha_1$$
$$+ \left[\frac{N_1}{a} - 2a\pi\left(\log a + \frac{1}{2}\right)B_1\right]\sin\alpha_1$$
$$+ \left(\frac{2M_2}{a} + \frac{2a\pi}{6}A_2\right)\cos 2\alpha_1 + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left(\frac{nM_n}{a} + \frac{2a\pi}{n(n^2-1)}A_n\right)\cos n\alpha_1$$
$$+ \left(\frac{nN_n}{a} + \frac{2a\pi}{n(n^2-1)}B_u\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \chi(\alpha_1).$$

Dans chacune de ces équations on sait calculer le coefficient de $\cos n\alpha_1$, ce qui permet de déterminer M_n et A_n, et on obtient de même N_n et B_n. Les deux séries de coefficients qui entrent dans la formule qui donne u sont donc connues.

Équilibre d'élasticité d'une plaque elliptique.

22. La courbe s est une ellipse dont on prend les axes de symétrie pour axes des x et des y; substituons à x et y les coordonnées thermométriques α, β données par les formules

$$x = c\,\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2}\cos\alpha,\quad y = c\,\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{2}\sin\alpha,$$

où c représente la demi-distance focale et e la base des logarithmes népériens.

Occupons-nous d'abord du premier potentiel d'une couche distribuée sur l'ellipse du contour, que nous supposerons avoir pour équation

$$\beta = b.$$

D'après les formules précédentes, x et y ne changent pas : 1° quand on remplace α par $\alpha + 2\pi$; 2° quand on remplace α et β par $-\alpha$ et $-\beta$; il en résulte que le potentiel intérieur v doit satisfaire à la même condition, et on en conclut aisément

$$\begin{aligned} v = k_0 + k_1 \cos\alpha \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^b + e^{-b}} + l_1 \sin\alpha \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^b - e^{-b}} + \ldots \\ + k_n \cos n\alpha \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{nb} + e^{-nb}} + l_n \sin n\alpha \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nb} - e^{-nb}} + \ldots . \end{aligned}$$

Au reste, on verra facilement qu'on arrivera au terme général de cette formule en le prenant d'abord égal à

$$T = \cos n\alpha (H e^{n\beta} + I e^{-n\beta}) + \sin n\alpha (K e^{n\beta} + L e^{-n\beta}),$$

et exprimant que T, $\frac{dT}{dx}$, $\frac{dT}{dy}$ diffèrent très-peu pour deux points symétriques par rapport à la distance des foyers, et qui en sont très-rapprochés.

On a ensuite, pour le potentiel en un point extérieur,

$$\begin{aligned} V = k_0 \frac{\log \frac{ce^\beta}{2}}{\log \frac{ce^b}{2}} + (k_1 \cos\alpha + l_1 \sin\alpha) e^{-(\beta - b)} + \ldots \\ + (k_n \cos n\alpha + l_n \sin n\alpha) e^{-n(\beta - b)} + \ldots , \end{aligned}$$

et les deux séries se confondent pour $\beta = b$.

Venons à la formule qui donne u,

$$u = v + \int \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2} \right) \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

$\varphi(\alpha)$ n'est assujetti qu'à posséder la période 2π, et par conséquent on prendra

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1 \cos\alpha + B_1 \sin\alpha + A_2 \cos 2\alpha + B_2 \sin 2\alpha + \ldots ;$$

α_1, b étant les coordonnées d'un point du contour, et α, β celles d'un point intérieur, on a, pour le carré de leur distance,

$$\begin{aligned} r^2 = \frac{c^2}{4} [(e^\beta + e^{-\beta}) \cos\alpha - (e^b + e^{-b}) \cos\alpha_1]^2 \\ + \frac{c^2}{4} [(e^\beta - e^{-\beta}) \sin\alpha - (e^b - e^{-b}) \sin\alpha_1]^2 . \end{aligned}$$

Ordonnant par rapport à e^{-b}, on a

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4} \{ 1 - 2[(e^\beta + e^{-\beta}) \cos\alpha \cos\alpha_1 + (e^\beta - e^{-\beta}) \sin\alpha \sin\alpha_1] e^{-b}$$
$$+ (e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2\cos\alpha + 2\cos\alpha_1) e^{-2b}$$
$$- 2[(e^\beta + e^{-\beta}) \cos\alpha \cos\alpha_1 - (e^\beta - e^{-\beta}) \sin\alpha \sin\alpha_1] e^{-3b} + e^{-4b} \}.$$

On peut décomposer le second facteur en quatre autres, et on obtient

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{4} \{ [1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}] [1 - e^{-\beta} e^{-(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}]$$
$$\times [1 - e^\beta e^{-(\alpha-\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}] [1 - e^{-\beta} e^{(\alpha+\alpha_1)\sqrt{-1}} e^{-b}] \},$$

et en prenant les logarithmes, on a

$$\log r = \log \frac{ce^b}{2} - \frac{e^\beta + e^{-\beta}}{e^b} \cos\alpha \cos\alpha_1 - \frac{e^\beta - e^{-\beta}}{e^b} \sin\alpha \sin\alpha_1 - \ldots$$
$$- \frac{1}{n} \frac{e^{n\beta} + e^{-n\beta}}{e^{n\beta}} \cos n\alpha \cos n\alpha_1 - \frac{1}{n} \frac{e^{n\beta} - e^{-n\beta}}{e^{nb}} \sin n\alpha \sin n\alpha_1 - \ldots .$$

Pour $\beta = b$, les quantités r^2 et $\log r$ prennent les valeurs suivantes :

$$r^2 = \frac{c^2 e^{2b}}{2} [1 + e^{-2b} \cos 2\alpha_1 + e^{-4b} - (1 + e^{-2b})^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha$$
$$- (1 - e^{-2b})^2 \sin\alpha_1 \sin\alpha + e^{-2b} \cos 2\alpha],$$

$$\log r = \log \frac{ce^b}{2} - (1 + e^{-2b}) \cos\alpha_1 \cos\alpha - (1 - e^{-2b}) \sin\alpha_1 \sin\alpha - \ldots$$
$$- \frac{1 + e^{-2nb}}{n} \cos n\alpha_1 \cos n\alpha - \frac{1 - e^{-2nb}}{n} \sin n\alpha_1 \sin n\alpha - \ldots .$$

Désignons par U ce que devient la quantité $r^2 \left(\log r - \frac{1}{2} \right)$ pour $\beta = b$, et par un calcul long, mais qui n'offre pas de difficulté, on trouve, pour le quotient de U par $\frac{c^2 e^{2b}}{2}$,

$$U : \frac{c^2 e^{2b}}{2} = L_0 + M_0 \cos 2\alpha_1 + (L_1 \cos\alpha_1 + M_1 \cos 3\alpha_1) \cos\alpha$$
$$+ (K_2 + L_2 \cos 2\alpha_1 + M_2 \cos 4\alpha_1) \cos 2\alpha + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [K_n \cos(n-2)\alpha_1 + L_n \cos n\alpha_1 + M_n \cos(n+2)\alpha_1] \cos n\alpha + \ldots$$
$$+ (P_1 \sin\alpha_1 + Q_1 \sin 3\alpha_1) \sin\alpha$$
$$+ (P_2 \sin 2\alpha_1 + Q_2 \sin 4\alpha_1) \sin 2\alpha + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ [N_n \sin(n-2)\alpha_1 + P_n \sin n\alpha_1 + Q_n \sin(n+2)\alpha_1] \sin n\alpha + \ldots,$$

en prenant pour les coefficients les valeurs que nous allons indiquer.

On a d'abord, pour les premiers coefficients de la série de cosinus,

$$\mathrm{L}_0 = (1 + e^{-4b}) \log \frac{ce^b}{2} + e^{-4b}, \quad \mathrm{M}_0 = e^{-2b} \log \frac{ce^b}{2} + e^{-2b} + \frac{1}{2} e^{-6b},$$

$$\mathrm{L}_1 = -(1 + e^{-2b})^2 \log \frac{ce^b}{2} - \frac{1}{4} - e^{-2b} - \frac{5}{4} e^{-4b} - \frac{1}{2} e^{-6b},$$

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1}{6} e^{-2b} - \frac{1}{4} e^{-4b} + \frac{1}{12} e^{-8b},$$

$$\mathrm{K}_2 = e^{-2b} \log \frac{ce^b}{2} + \frac{3}{4} e^{-2b} + \frac{e^{-6b}}{4},$$

$$\mathrm{L}_2 = \frac{1 + 4e^{-4b} - e^{8b}}{6}, \quad \mathrm{M}_2 = \frac{-e^{-2b} - 2e^{-6b} + e^{-10b}}{24}.$$

A partir de $n = 3$, les coefficients de cette série sont donnés par une même formule, et on a

$$\mathrm{K}_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} e^{-2b} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-2(n-1)b} + \frac{1}{2n(n-1)} e^{-2(n+1)b},$$

$$\mathrm{L}_n = \frac{1 + e^{-4b}}{n(n-1)(n+1)} + \frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} - \frac{e^{-2(n+2)b}}{n(n+1)},$$

$$\mathrm{M}_n = \mathrm{K}_{n+2}.$$

On a ensuite, pour les premiers coefficients de la série de sinus,

$$\mathrm{P}_1 = -(1 - e^{-2b})^2 \log \frac{ce^b}{2} - \frac{1}{4} + e^{-2b} - \frac{5}{4} e^{-4b} + \frac{1}{2} e^{-6b},$$

$$\mathrm{Q}_1 = -\frac{1}{6} e^{-2b} + \frac{1}{4} e^{-4b} - \frac{1}{12} e^{-8b},$$

$$\mathrm{P}_2 = \frac{1 - 2e^{-4b} + e^{-8b}}{6}, \quad \mathrm{Q}_2 = \frac{-e^{-2b} + 2e^{-6b} - e^{-10b}}{24},$$

et les coefficients qui suivent ont pour valeurs

$$\mathrm{N}_n = -\frac{1}{n(n-1)(n-2)} e^{-2b} + \frac{1}{2(n-1)(n-2)} e^{-2(n-1)b} - \frac{1}{2n(n-1)} e^{-2(n+1)b},$$

$$\mathrm{P}_n = \frac{1 + e^{-4b}}{n(n-1)(n+1)} - \frac{e^{-2nb}}{n(n-1)} + \frac{e^{-2(n+2)b}}{n(n-1)},$$

$$\mathrm{Q}_n = \mathrm{N}_{n+2}.$$

Cherchons maintenant l'équation aux limites qui exprime que u est égal à la fonction $\theta(\alpha_1)$ sur l'ellipse du contour. Pour $\beta = b$, la seconde partie de u qui se réduit à

$$\int_0^{2\pi} U\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

sera donnée par la série

$$\begin{aligned}\frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}\Big[&(L_0 + M_0\cos 2\alpha_1)\,2A_0 + (L_1\cos\alpha_1 + M_1\cos 3\alpha_1)A_1\\&+(K_2 + L_2\cos 2\alpha_1 + M_2\cos 4\alpha_1)A_2 + \ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+(P_1\sin\alpha_1 + Q_1\sin 3\alpha_1)B_1 + (P_2\sin 2\alpha_1 + Q_2\sin 4\alpha_1)B_2 + \ldots\Big].\end{aligned}$$

Reportons-nous à la valeur de v, faisons-y $\beta = b$, et nous avons, pour première équation aux limites,

$$\begin{aligned}&k_0 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2L_0A_0 + K_2A_2) + \left[k_1 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(L_1A_1 + K_3A_3)\right]\cos\alpha_1\\&+\left[k_2 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2M_0 + L_2A_2 + K_4A_4)\right]\cos 2\alpha_1 + \ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\left[k_n + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(M_{n-2}A_{n-2} + L_nA_n + K_{n+2}A_{n+2})\right]\cos n\alpha_1 + \ldots\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\left[l_1 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(P_1B_1 + N_3B_3)\right]\sin\alpha_1\\&+\left[l_2 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(P_2B_2 + N_4B_4)\right]\sin 2\alpha_1 + \ldots\\&+\left[l_n + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(Q_{n-2}B_{n-2} + P_nB_n + N_{n+2}B_{n+2})\right]\sin n\alpha_1 + \ldots = \theta(\alpha_1).\end{aligned}$$

Formons ensuite la seconde équation aux limites, en exprimant que, sur le contour, $\frac{du}{d\beta}$ est une fonction donnée $\lambda(\alpha)$. On a

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{dv}{d\beta} + 2\int r\log r\,\frac{dr}{d\beta}\,\varphi(\alpha)\,d\alpha.$$

Si l'on différentie r^2 par rapport à β et qu'on fasse $\beta = b$, on trouve

$$2r\frac{dr}{d\beta} = \frac{c^2 e^{2b}}{2}(1 - e^{-4b})(1 - \cos\alpha_1\cos\alpha - \sin\alpha_1\sin\alpha).$$

Posons, pour abréger,

$$\frac{c^2 e^{2b}}{2}(1 - e^{-4b}) = j,$$

et pour $\beta = b$, on trouvera

$$\begin{aligned}
\frac{2r\log r}{j}\frac{dr}{d\beta} = {} & L'_0 + M'_0 \cos 2\alpha_1 + (L'_1 \cos\alpha_1 + M'_1 \cos 3\alpha_1)\cos\alpha + \ldots \\
& + [K'_n \cos(n-2)\alpha_1 + L'_n \cos n\alpha_1 + M'_n \cos(n+2)\alpha_1]\cos n\alpha + \ldots \\
& + (P'_1 \sin\alpha_1 + Q'_1 \sin 3\alpha_1)\sin\alpha + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + [N'_n \sin(n-2)\alpha_1 + P'_n \sin n\alpha_1 + Q'_n \sin(n+2)\alpha_1]\sin n\alpha + \ldots,
\end{aligned}$$

en prenant pour les premiers coefficients

$$\begin{aligned}
L'_0 &= \log\frac{ce^b}{2} + \frac{1}{2}, & M'_0 &= \frac{e^{-2b}}{2}, \\
L'_1 &= -\log\frac{ce^b}{2} - \frac{3}{4} - e^{-2b}, & M'_1 &= \frac{e^{-4b}}{4}, \\
P'_1 &= -\log\frac{ce^b}{2} - \frac{3}{4} + e^{-2b}, & Q'_1 &= \frac{-e^{-4b}}{4}.
\end{aligned}$$

A partir de $n = 2$, les coefficients suivent une loi générale, et l'on a

$$K'_n = \frac{e^{-2(n-1)b}}{2(n-1)}, \qquad L'_n = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} - \frac{e^{-2nb}}{n},$$

$$M'_n = K'_{n+2} = \frac{e^{-2(n+1)b}}{2(n+1)},$$

$$N'_n = -\frac{e^{-2(n-1)b}}{2(n-1)}, \qquad P'_n = \frac{1}{n(n-1)(n+1)} + \frac{e^{-2nb}}{n},$$

$$Q'_n = N'_{n+2} = -\frac{e^{-2(n+1)b}}{2(n+1)}.$$

De là il résulte que pour $\beta = b$ l'intégrale

$$2\int r\log r\frac{dr}{d\beta}\varphi(\alpha)d\alpha$$

devient

$$\begin{aligned}
\pi j\,[& (L'_0 + M'_0\cos 2\alpha_1)\,2A_0 + (L'_1\cos\alpha_1 + M'_1\cos 3\alpha_1)A_1 \\
& + (K'_2 + L'_2\cos 2\alpha_1 + M'_2\cos 4\alpha_1)A_2 + \ldots \\
& + (P'_1\sin\alpha_1 + Q'_1\sin 3\alpha_1)B_1 + (P'_2\sin 2\alpha_1 + Q'_2\sin 4\alpha_1)B_2 + \ldots],
\end{aligned}$$

et l'on a pour la seconde équation aux limites

$$\begin{aligned}
&\pi j(2L'_0 A_0 + K'_2 A_2) + [t_1 k_1 + \pi j(L'_1 A_1 + K'_3 A_3)]\cos\alpha_1 \\
&\quad + [2t_2 k_2 + \pi j(2M'_0 + L'_2 A_2 + K'_4 A_4)]\cos 2\alpha_1 + \ldots \\
&\quad + [n t_n k_n + \pi j(M'_{n-2} A_{n-2} + L'_n A_n + K'_{n+2} A_{n+2})]\cos n\alpha_1 + \ldots \\
&\quad + \left(\frac{1}{t_1} l_1 + \pi j(P'_1 B_1 + N'_3 B_3)\right)\sin\alpha_1 + \ldots \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + \left(\frac{n}{t_n} l_n + \pi j(Q'_{n-2} B_{n-2} + P'_n B_n + N'_{n+2} B_{n+2})\right)\sin n\alpha_1 + \ldots = \lambda(\alpha_1),
\end{aligned}$$

en posant en général

$$\frac{1 + e^{-2nb}}{1 - e^{-2nb}} = t_n.$$

23. Il nous reste maintenant à déduire de ces deux équations aux limites les valeurs des quatre séries de coefficients k_0, $k_1, \ldots$; l_1, $l_2, \ldots$; A_0, A_1, $A_2, \ldots$; B_1, $B_2, \ldots$. Il nous suffira de nous occuper des coefficients k_0, k_1, $k_2, \ldots$, A_0, A_1, $A_2, \ldots$, parce que les autres s'obtiendront de la même manière.

Posons

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \theta(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \varphi_n, \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \lambda(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha = \psi_n,$$

et, d'après un théorème bien connu, nous avons les deux séries d'équations suivantes :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
&2k_0 + c^2 e^{2b}\pi(2L_0 A_0 + K_2 A_2) = \varphi_0, \\
&k_1 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(L_1 A_1 + K_3 A_3) = \varphi_1, \\
&k_2 + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(2M_0 + L_2 A_2 + K_4 A_4) = \varphi_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&k_n + \frac{c^2 e^{2b}\pi}{2}(M_{n-2} A_{n-2} + L_n A_n + K_{n+2} A_{n+2}) = \varphi_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{array}{l}\pi j(2\mathrm{L}'_0\mathrm{A}_0+\mathrm{K}'_2\mathrm{A}_2)=\psi_0,\\ t_1k_1+\pi j(\mathrm{L}'_1\mathrm{A}_1+\mathrm{K}'_3\mathrm{A}_3)=\psi_1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ nt_nk_n+\pi j(\mathrm{M}'_{n-2}\mathrm{A}_{n-2}+\mathrm{L}'_n\mathrm{A}_n+\mathrm{K}'_{n+2}\mathrm{A}_{n+2})=\psi_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Ces équations déterminent les coefficients cherchés. On pourrait croire, au premier coup d'œil, qu'il est permis d'après ces équations de se donner arbitrairement A_0 et A_1, et qu'alors seulement on peut obtenir les autres coefficients; mais nous allons voir qu'ils sont entièrement déterminés.

24. Le calcul des coefficients est beaucoup plus facile, lorsque l'excentricité est peu considérable, et nous allons d'abord considérer ce cas.

Alors nous poserons

$$\beta=\varepsilon+\log\frac{2h}{c},$$

h étant une constante. Soit τ la valeur de ε sur l'ellipse de contour $\beta=b$, nous aurons, en posant

$$q=\frac{c^2}{4h^2},$$

les égalités

$$b=\tau+\log\frac{2h}{c},\quad e^{-2b}=qe^{-2\tau},\quad c^2e^{2b}=4h^2e^{2\tau}.$$

Le demi-grand axe de l'ellipse au paramètre β est

$$c\frac{e^\beta+e^{-\beta}}{2}=h(e^\varepsilon+qe^{-\varepsilon});$$

si donc nous désignons par $\mathcal{A}$ le demi-grand axe de l'ellipse de contour, nous aurons

$$he^\tau+\frac{c^2}{4he^\tau}=\mathcal{A},$$

et par suite

$$he^{\tau} = \frac{\mathcal{A}_0}{2} + \frac{\sqrt{\mathcal{A}_0^2 - c^2}}{2};$$

le second nombre est une quantité connue que nous désignerons par η; ainsi nous avons

$$he^{\tau} = \eta, \quad c^2 e^{2b} = 4\eta^2, \quad j = 2\eta^2(1 - q^2 e^{-4\tau}).$$

Remarquons encore que, si l'ellipse se réduit à un cercle, c et q sont nuls, et que, si l'ellipse est très-peu excentrique, q est très-petit.

D'après les transformations précédentes, les équations (A) deviennent, en remettant pour les quantités K, L, M leurs valeurs

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\eta^2\pi} k_0 + \left[(1 + q^2 e^{-4\tau}) \log \eta + q^2 e^{-4\tau}\right] A_0 \\
&\qquad + \left(e^{-2\tau} q \log \eta + \frac{3}{4} e^{-2\tau} q + \frac{q^3 e^{-6\tau}}{4}\right) A_2 = \frac{\varphi_0}{4\eta^2\pi}, \\
&\frac{1}{2\eta^2\pi} k_1 + \left[-(1 + q e^{-2\tau})^2 \log \eta - \frac{1}{4} - q e^{-2\tau} - \frac{5}{4} q^2 e^{-4\tau} - \frac{1}{2} q^3 e^{-6\tau}\right] A_1 \\
&\qquad + \left(-\frac{1}{6} q e^{-2\tau} - \frac{1}{4} q^2 e^{-4\tau} + \frac{1}{12} q^3 e^{-6\tau}\right) A_3 = \frac{1}{2\eta^2\pi} \varphi_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\frac{1}{2\eta^2\pi} k_n + \left[\frac{-1}{n(n+1)(n+2)} q e^{-2\tau} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)} q^{n-1} e^{-2(n-1)\tau}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2n(n-1)} q^{n+1} e^{-2(n+1)\tau}\right] A_{n-2} \\
&\qquad + \left[\frac{1 + q^2 e^{-4\tau}}{n(n-1)(n+1)} + \frac{q^n e^{-2n\tau}}{n(n-1)} - \frac{q^{n+2} e^{-2(n+2)\tau}}{n(n+1)}\right] A_n \\
&\qquad + \left[-\frac{1}{(n+2)(n+1)n} q e^{-2\tau} - \frac{1}{2(n+1)n} q^{n+1} e^{-2(n+1)\tau}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2(n+2)(n+1)} q^{n+3} e^{-2(n+3)\tau}\right] A_{n+2} = \frac{1}{2\eta^2\pi} \varphi_n.
\end{aligned}$$

Nous transformerons de même les équations (B); mais nous supposerons j remplacé par sa valeur numérique, qui est connue; de sorte que q n'y entrera pas explicitement, et nous ferons de même pour les t_n;

elles deviendront ainsi

$$(2\log\eta + 1)\mathrm{A}_0 + \frac{1}{2} q e^{-2\tau} \mathrm{A}_2 = \frac{1}{\pi j} \psi_0,$$

$$\frac{1}{\pi j} t_1 k_1 - \left(\log\eta + \frac{3}{4} + q e^{-2\tau}\right) \mathrm{A}_1 + \frac{1}{4} q^2 e^{-4\tau} \mathrm{A}_3 = \frac{1}{\pi j} \psi_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{1}{\pi j} n t_n k_n + \frac{q^{n-1} e^{-2(n-1)\tau}}{2(n-1)} \mathrm{A}_{n-2} + \left[\frac{1}{n(n-1)(n+1)} - \frac{q^n e^{-2n\tau}}{n}\right] \mathrm{A}_n + \frac{q^{n+1} e^{-2(n+1)\tau}}{2(n+1)} \mathrm{A}_{n+2} = \frac{1}{\pi j} \psi_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Désignons le premier système d'équations par (A′) et le second par (B′). Si l'on néglige d'abord les termes multipliés par q, la première équation (A′) et la première équation (B′) ne renferment que k_0 et A_0; les deuxièmes équations (A′) et (B′) ne renferment que k_1 et A_1, etc.; on peut par conséquent avoir ainsi des valeurs approchées de ces coefficients, et c'est ce qui fait le succès de la forme donnée à ces équations.

Pour calculer ces coefficients, on posera

$$\begin{aligned}
k_0 &= \varkappa_0 + \varkappa_1 q + \varkappa_2 q^2 + \ldots, & \mathrm{A}_0 &= a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots,\\
k_1 &= \mu_0 + \mu_1 q + \mu_2 q^2 + \ldots, & \mathrm{A}_1 &= b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + \ldots,\\
k_2 &= \nu_0 + \nu_1 q + \nu_2 q^2 + \ldots, & \mathrm{A}_2 &= c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \ldots,\\
&\dots\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

et on substituera dans les équations (A′) et (B′). En égalant les termes indépendants de q, dans les premiers membres, aux quantités des seconds membres, on aura des couples d'équations qui renfermeront des couples d'inconnues

$$\varkappa_0,\ a_0;\quad \mu_0,\ b_0;\quad \nu_0,\ c_0;\quad \ldots,$$

et permettront de les déterminer.

Ces quantités étant calculées, on égalera à zéro les termes qui sont multipliés par la première puissance de q dans les premiers membres, et on aura des couples d'équations qui renfermeront des couples d'inconnues

$$\varkappa_1, a_1; \quad \mu_1, b_1; \quad \nu_1, c_1; \quad \ldots,$$

qu'on obtiendra immédiatement. Puis les termes en q^2 donneront

$$\varkappa_2, a_2; \quad \mu_2, b_2; \quad \nu_2\, c_2; \quad \ldots,$$

et ainsi de suite. Le problème est donc entièrement résolu.

25. Considérons ensuite le cas où l'excentricité de l'ellipse est trop considérable pour qu'on puisse appliquer la méthode précédente.

Reprenons les équations (A) et (B). Le calcul des coefficients à indices pairs est indépendant de celui des coefficients à indices impairs; prenons donc les équations de rang impair, qui renferment seulement les coefficients

$$k_0, k_2, k_4, \ldots; \quad A_0, A_2, A_4, \ldots.$$

Or on reconnaît facilement que, si n est un nombre pair suffisamment grand, on pourra calculer avec suffisamment d'approximation $k_0, k_2, \ldots, k_{n-2}$; $A_0, A_2, \ldots, A_{n-2}$, au moyen des $\frac{n}{2}$ premières équations des deux systèmes indiqués, en supprimant dans les dernières les termes multipliés par A_n et A_{n+2}. On calculera donc successivement k_{n-2} et A_{n-2}, puis k_{n-4}, A_{n-4}; k_{n-6}, A_{n-6}, ..., jusqu'à k_0, A_0. Les premières de ces quantités, qui sont très-petites, seront calculées évidemment avec beaucoup d'inexactitude; mais l'erreur qui en résultera sur la solution du problème sera très-faible.