JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. WEILER

Notes sur le Problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 305-320.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__305_0>

Notes sur le Problème des trois corps;

PAR M. A. WEILER.

(*Astronomische Nachrichten*, t. LXXIV. — Traduction de M. PUISEUX.)

I. — *Sur l'élimination des nœuds dans le Problème des trois corps.*

Lorsque dans le Problème des trois corps on cherche le mouvement relatif de deux des masses autour de la troisième, on trouve, pour déterminer ce mouvement, un système de six équations différentielles du second ordre; ces équations n'ont plus la forme canonique. Mais Jacobi a montré qu'on obtient un autre système d'équations ayant cette forme, lorsque à la place des coordonnées rectangulaires on introduit, comme nouvelles coordonnées, de certaines fonctions linéaires des coordonnées primitives. Ce nouveau système se prête plus facilement à l'intégration et il présente en particulier cette circonstance que, quand on l'a réduit, à l'aide des quatre intégrales finies connues, à un système d'équations différentielles du huitième ordre, ce dernier peut lui-même être ramené à un système du septième ordre et à une quadrature. On serait conduit par là à penser que cette réduction à un système du septième ordre est intimement liée à la forme canonique du système auquel on parvient par la transformation linéaire. Le but de la présente communication est de montrer qu'il n'en est pas ainsi et que cette réduction peut être opérée, soit sur les équations différentielles primitives, soit sur celles qu'on en déduit par une transformation linéaire quelconque ne conduisant pas à un système canonique. Elle n'est en réalité qu'un résultat de la transformation en coordonnées polaires. L'introduction de ces coordonnées donnant lieu à des calculs un peu pénibles, je me bornerai ici à transcrire les résultats auxquels elle conduit.

La transformation linéaire conduit au système canonique

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \xi'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi}, & \xi''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\xi_1}, \\ \eta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta}, & \eta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\eta_1}, \\ \zeta'' = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta}, & \zeta''_1 = \dfrac{d\mathrm{U}}{d\zeta_1}. \end{cases}$$

J'applique maintenant les formules de transformation linéaires

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\alpha + x_1\sin\alpha_1, & \xi_1 &= x_1\cos\alpha_1 + x\sin\alpha, \\ \eta &= y\cos\alpha + y_1\sin\alpha_1, & \eta_1 &= y_1\cos\alpha_1 + y\sin\alpha, \\ \zeta &= z\cos\alpha + z_1\sin\alpha_1, & \zeta_1 &= z_1\cos\alpha_1 + z\sin\alpha, \end{aligned}$$

où α et α_1 sont des constantes indéterminées. Dans le cas de $\alpha + \alpha_1 = 0$, on obtient un système canonique; mais le système cesse d'être canonique si cette condition n'est pas remplie. On trouve

$$\begin{aligned} x''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dx} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dx_1}, & x''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dx_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dx}, \\ y''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dy} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dy_1}, & y''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dy_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dy}, \\ z''\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dz} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dz_1}; & z''_1\cos^2\sigma &= \frac{d\mathrm{U}}{dz_1} - \sin\sigma\frac{d\mathrm{U}}{dz}, \end{aligned}$$

où l'on a fait, pour abréger, $\alpha + \alpha_1 = \sigma$. En attribuant à α et à α_1 des valeurs convenablement choisies, on retrouve le système des équations différentielles primitives d'où a été déduit le système (A).

Dans les équations différentielles ainsi transformées, introduisons maintenant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos\theta\cos u - \cos i\sin\theta\sin u, & \frac{x_1}{r_1} &= \cos\theta_1\cos u_1 - \cos i_1\sin\theta_1\sin u_1, \\ \frac{y}{r} &= \sin\theta\cos u + \cos i\cos\theta\sin u, & \frac{y_1}{r_1} &= \sin\theta_1\cos u_1 + \cos i_1\cos\theta_1\sin u_1, \\ \frac{z}{r} &= \sin i\sin u, & \frac{z_1}{r_1} &= \sin i_1\sin u_1, \end{aligned}$$

où θ, i, θ_1, i_1 sont considérées comme variables.

La condition que la dérivée de chaque second membre conserve la même forme que si θ et i étaient des constantes conduit, comme on sait, aux équations

$$(1) \qquad i' = \sin i \cot u \,\theta',$$

$$(2) \qquad i'_1 = \sin i_1 \cot u_1 \theta'_1,$$

$$(3) \qquad u' + \cos i \,\theta' = \frac{n}{r^2},$$

$$(4) \qquad u'_1 + \cos i_1 \theta'_1 = \frac{n_1}{r_1^2}.$$

où n et n_1 sont également des quantités variables.

Soit s le cosinus de l'angle que forment entre eux les rayons vecteurs r et r_1. Soit, de plus, J l'angle dièdre des plans des deux orbites et soient ν, ν_1 les angles que l'intersection commune de ces plans fait avec les deux nœuds. On a l'équation

$$s = \cos(u - \nu)\cos(u_1 - \nu_1) + \cos J \sin(u - \nu)\sin(u_1 - \nu_1).$$

L'intégrale des forces vives peut se mettre sous la forme

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & r'^2 + r'^2_1 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} \\ & \quad + 2\sin\sigma\left(\frac{d^2 s}{du\,du_1}\frac{nn_1}{rr_1} + \frac{ds}{du}\frac{n}{r}r'_1 + \frac{ds}{du_1}\frac{n_1}{r_1}r' + s r' r'_1\right) = 2U - a, \end{aligned} \right.$$

où U représente une fonction des variables r, r_1, s et a une constante arbitraire.

Des trois intégrales des aires, il y en a une qui contient la dérivée $\left(\frac{r}{r_1}\right)'$, savoir :

$$(6) \qquad \sin\sigma\left(\frac{r'}{r} - \frac{r'_1}{r_1} + \frac{n}{r^2}\cot u - \frac{n_1}{r_1^2}\cot u_1\right) + \frac{nn_1 \sin\Theta \cos^2\sigma}{crr_1 \sin u \sin u_1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger, $\theta - \theta_1 = \Theta$. Les deux autres intégrales des aires ne contiennent que des quantités finies. Elles sont :

$$(7)\qquad n\sin(u_1-v_1)+\frac{r}{r_1}\sin\sigma\, n_1\sin(u-v)+c\sin u_1\,\frac{\sin v}{\sin\Theta}=0,$$

$$(8)\qquad n_1\sin(u-v)+\frac{r_1}{r}\sin\sigma\, n\sin(u_1-v_1)-c\sin u\,\frac{\sin v_1}{\sin\Theta}=0.$$

La quantité c est une des trois constantes arbitraires de ces intégrales. On a fait disparaître les deux autres en attribuant aux axes des coordonnées une position déterminée.

On a de plus l'équation différentielle du second ordre

$$(9)\qquad \frac{1}{2}(r^2+2rr_1 s\sin\sigma+r_1^2)''=\mathrm{U}-a,$$

et enfin les deux équations des perturbations

$$(10)\qquad \frac{n\sin i\,\theta'\cos^2\sigma}{\sin\mathrm{J}\sin u\sin(u_1-v_1)}=-\frac{d\mathrm{U}}{ds}+r\sin\sigma\left(\frac{d\mathrm{U}}{dr_1}-\frac{s}{r_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right),$$

$$(11)\qquad \frac{n_1\sin i_1\,\theta'_1\cos^2\sigma}{\sin\mathrm{J}\sin u_1\sin(u-v)}=\frac{d\mathrm{U}}{ds}-r_1\sin\sigma\left(\frac{d\mathrm{U}}{dr}-\frac{s}{r}\frac{d\mathrm{U}}{ds}\right).$$

Telles sont les équations du problème quand on a remplacé les coordonnées rectangulaires x, y, z, x_1, y_1, z_1 par les coordonnées polaires. On voit que les nœuds θ et θ_1 n'y figurent que dans la combinaison $\theta-\theta_1=\Theta$. Il y a en effet un triangle sphérique à l'aide duquel on peut exprimer les angles J, v, v_1 au moyen de i, i_1, Θ. Si l'on élimine encore les variables n, n_1 et Θ au moyen des trois intégrales des aires (6), (7), (8) et les dérivées θ', θ'_1 à l'aide des équations (10) et (11), on obtient un système d'équations différentielles du septième ordre formé des équations (1), (2), (3), (4), (5), (9) et déterminant les variables i, i_1, u, u_1, r, r_1. La variable θ se détermine à la fin par une quadrature en vertu de l'équation (10).

II. — *Sur les intégrales des aires dans le Problème des trois corps.*

Lorsque dans le Problème des trois corps on rapporte à l'une des masses les mouvements des deux autres, on obtient immédiatement un système de six équations différentielles du second ordre qu'il s'agit d'intégrer. Par une transformation linéaire des coordonnées rectangulaires, on donne au système la forme canonique; la forme plus simple de ce nouveau système est déjà une raison de le prendre pour point de départ de toutes les recherches ultérieures.

Jacobi, en s'attachant à mettre en évidence les avantages du système canonique, insiste particulièrement sur deux points. Les intégrales des aires y acquièrent une forme remarquable, et il en résulte que l'intersection mutuelle des plans des deux orbites se déplace dans un plan fixe. C'est là un des avantages que Jacobi fait ressortir. En outre, ces intégrales des aires fournissent deux équations simples entre les inclinaisons i et i_1 des plans des deux orbites sur ce plan fixe et les vitesses aréolaires n et n_1 des deux rayons vecteurs. Si l'on considère un côté d'un triangle plan comme une constante arbitraire et que i et i_1 soient les angles adjacents, alors n et n_1 seront les deux autres côtés.

On pourrait croire que cette forme simple des intégrales des aires dépend essentiellement de la forme canonique du système. Je me propose de montrer dans ce qui va suivre qu'il n'en est point ainsi. On peut assigner en effet d'autres transformations linéaires des coordonnées rectangulaires qui ne conduisent plus à un système canonique et qui entraînent cependant, pour les intégrales des aires, la même forme que dans le cas du système canonique.

Je pars encore du système canonique

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi'' &= \frac{d\mathrm{U}}{d\xi}, & \xi''_1 &= \frac{d\mathrm{U}}{d\xi_1}, \\ \eta'' &= \frac{d\mathrm{U}}{d\eta}, & \eta''_1 &= \frac{d\mathrm{U}}{d\eta_1}, \\ \zeta'' &= \frac{d\mathrm{U}}{d\zeta}, & \zeta''_1 &= \frac{d\mathrm{U}}{d\zeta_1}, \end{aligned} \right.$$

et je les tranforme cette fois au moyen des équations linéaires

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\varepsilon - x_1\sin\varepsilon, & \xi_1 &= x_1\cos\varepsilon + x\sin\varepsilon, \\ \eta &= y\cos\varepsilon - y_1\sin\varepsilon, & \eta_1 &= y_1\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \\ \zeta &= z\cos\varepsilon - z_1\sin\varepsilon, & \zeta_1 &= z_1\cos\varepsilon + z\sin\varepsilon, \end{aligned}$$

où ε est une fonction indéterminée du temps. On trouve pour les équations différentielles transformées

$$(B)\quad \begin{cases} x''=x\varepsilon'^2+x_1\varepsilon''+2x'_1\varepsilon'+\dfrac{dU}{dx}, & x''_1=x_1\varepsilon'^2-x\varepsilon''-2x'\varepsilon'+\dfrac{dU}{dx_1}, \\ y''=y\varepsilon'^2+y_1\varepsilon''+2y'_1\varepsilon'+\dfrac{dU}{dy}, & y''_1=y_1\varepsilon'^2-y\varepsilon''-2y'\varepsilon'+\dfrac{dU}{dy_1}, \\ z''=z\varepsilon'^2+z_1\varepsilon''+2z'_1\varepsilon'+\dfrac{dU}{dz}, & z''_1=z_1\varepsilon'^2-z\varepsilon''-2z'\varepsilon'+\dfrac{dU}{dz_1}, \end{cases}$$

c'est-à-dire un système qui n'a plus la forme canonique, à moins qu'on ne suppose $\varepsilon'=0$. Introduisons maintenant les coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} \frac{x}{r}&=\cos\theta\cos u-\cos i\sin\theta\sin u, & \frac{x_1}{r_1}&=\cos\theta_1\cos u_1-\cos i_1\sin\theta_1\sin u_1, \\ \frac{y}{r}&=\sin\theta\cos u+\cos i\cos\theta\sin u, & \frac{y_1}{r_1}&=\sin\theta_1\cos u_1+\cos i_1\cos\theta_1\sin u_1, \\ \frac{z}{r}&=\sin i\sin u, & \frac{z_1}{r_1}&=\sin i_1\sin u_1, \end{aligned}$$

où θ, i, θ_1, i_1 sont considérées comme variables.

On voit que les équations différentielles qui représentent le mouvement de l'un des corps se déduisent des équations différentielles correspondantes au mouvement de l'autre en échangeant les lettres marquées d'un indice avec celles qui ne le sont pas et en remplaçant ε par $-\varepsilon$. Il suffira donc d'effectuer pour l'un des deux corps le calcul dont il s'agit.

Je remplace les trois équations différentielles (B) par les suivantes :

$$(C)\quad \begin{cases} [yz'-zy'-(yz_1-zy_1)\varepsilon']' \\ \qquad =(yz'_1-zy'_1+y_1z'-z_1y')\varepsilon'+y\dfrac{dU}{dz}-z\dfrac{dU}{dy}, \\ [xz'-zx'-(xz_1-zx_1)\varepsilon']' \\ \qquad =(xz'_1-zx'_1+x_1z'-z_1x')\varepsilon'+x\dfrac{dU}{dz}-z\dfrac{dU}{dx}, \\ [xy'-yx'-(xy_1-yx_1)\varepsilon']' \\ \qquad =(xy'_1-yx'_1+x_1y'-y_1x')\varepsilon'+x\dfrac{dU}{dy}-y\dfrac{dU}{dx}. \end{cases}$$

Maintenant, comme à la place des trois coordonnées x, y, z on introduit les quatre variables r, u, θ, i, on a une variable surnuméraire dont on peut disposer arbitrairement. En faisant, pour abréger, $\frac{dx}{du} = x_u$, j'écrirai les équations suivantes :

$$
(\mathrm{D}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{r}\right)' &= \left(\frac{x}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{x_1 r - x r_1 s}{r^2}\varepsilon',\\
\left(\frac{y}{r}\right)' &= \left(\frac{y}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{y_1 r - y r_1 s}{r^2}\varepsilon',\\
\left(\frac{z}{r}\right)' &= \left(\frac{z}{r}\right)_u \frac{n}{r^2} + \frac{z_1 r - z r_1 s}{r^2}\varepsilon'.
\end{aligned}
\right.
$$

Chacune d'elles est une conséquence des deux autres en vertu des deux équations identiques

$$
\frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)' + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)' + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)' = 0, \quad \frac{x}{r}\left(\frac{x}{r}\right)_u + \frac{y}{r}\left(\frac{y}{r}\right)_u + \frac{z}{r}\left(\frac{z}{r}\right)_u = 0.
$$

Ces mêmes équations ajoutent aux variables r, u, θ, i une cinquième variable; ainsi rien ne s'oppose à ce qu'on les admette. Par là se trouve déterminée, en outre de n, cette variable surnuméraire qui doit être introduite à la place des coordonnées rectangulaires x, y, z dans les équations différentielles du mouvement.

On peut d'ailleurs mettre encore les équations (D) sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
yz' - zy' - (yz_1 - zy_1)\varepsilon' &= n \sin i \sin\theta,\\
xz' - zx' - (xz_1 - zx_1)\varepsilon' &= n \sin i \cos\theta,\\
xy' - yx' - (xy_1 - yx_1)\varepsilon' &= n \cos i.
\end{aligned}
$$

En ayant égard à ce qui précède, les équations (C) deviennent

$$
(\mathrm{E}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
(n \sin i \sin\theta)' &= (yz'_1 - zy'_1 + y_1 z' - z_1 y')\varepsilon' + \frac{yz_1 - zy_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds},\\
(n \sin i \cos\theta)' &= (xz'_1 - zx'_1 + x_1 z' - z_1 x')\varepsilon' + \frac{xz_1 - zx_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds},\\
(n \cos i)' &= (xy'_1 - yx'_1 + x_1 y' - y_1 x')\varepsilon' + \frac{xy_1 - yx_1}{rr_1}\frac{d\mathrm{U}}{ds}.
\end{aligned}
\right.
$$

En prenant à la place des équations (D) trois autres équations (D_1) qui se déduisent des premières par l'échange des lettres marquées d'un indice avec les lettres non marquées, et par le changement de ε en $-\varepsilon$, on obtient, pour l'autre mobile, trois équations pareilles (E_1). En réunissant ensemble les équations (E) et (E_1), on obtient les intégrales des aires

$$n\sin i\sin\theta + n_1\sin i_1\sin\theta_1 = 0,$$
$$n\sin i\cos\theta + n_1\sin i_1\cos\theta_1 = 0,$$
$$n\cos i + n_1\sin i_1 - c = 0,$$

qui peuvent se mettre sous cette forme simple :

$$(1)\qquad \theta = \theta_1,$$

$$(2)\qquad n_1\sin(i - i_1) = c\sin i,$$

$$(3)\qquad n\sin(i_1 - i) = c\sin i_1.$$

Pour exprimer à l'aide des coordonnées polaires l'intégrale des forces vives, on peut partir de la forme primitive :

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + \xi_1'^2 + \eta_1'^2 + \zeta_1'^2 = 2U - a.$$

On trouve, par la transformation écrite ci-dessus, la nouvelle forme

$$r_0'^2 + r_{01}'^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} = 2U - a,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$r' - r_1 s\varepsilon' = r'_0,\quad r'_1 + rs\varepsilon' = r'_{01}.$$

Dans ces formules s désigne le cosinus de l'angle compris entre les rayons vecteurs r et r_1 et se détermine par la formule

$$s = \cos u\cos u_1 + \cos(i - i_1)\sin u\sin u_1.$$

Des équations (E) se tirent les dérivées des éléments θ, i, n. On trouve les valeurs suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{nn_1}{c}\theta' = \left(\cos u \sin u_1 \dfrac{nr_1}{r} - \cos u_1 \sin u \dfrac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' \\ \qquad + \sin u \sin u_1 \left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \dfrac{dU}{ds}\right], \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{nn_1}{c}\dfrac{i'}{\sin i} = -\left(\sin u \sin u_1 \dfrac{nr_1}{r} + \cos u \cos u_1 \dfrac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' \\ \qquad + \cos u \sin u_1 \left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \dfrac{dU}{ds}\right], \end{cases}$$

$$(7)\quad n' = \left(s\frac{nr_1}{r} + \frac{d^2 s}{du\,du_1}\frac{n_1 r}{r_1}\right)\varepsilon' - \frac{ds}{du}\left[(r_1 r'_0 - r r'_{01})\varepsilon' - \frac{dU}{ds}\right].$$

A l'aide des équations (D), on obtient aussi la dérivée de u. On trouve

$$(8)\quad u' + \cos i\,\theta' = \frac{n}{r^2} + \frac{ds}{du}\frac{r_1}{r}\varepsilon'.$$

Il reste encore à former l'équation différentielle qui détermine le rayon vecteur. En partant de la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, on trouve par une double différentiation

$$(9)\quad rr'' + r'^2 = (r^2 - r_1^2)\varepsilon'^2 + rr_1 s\varepsilon'' + 2(rr_1 s)'\varepsilon' + r_0'^2 + \frac{n^2}{r^2} + r\frac{dU}{dr}.$$

J'ai ainsi exprimé en coordonnées polaires les équations différentielles du mouvement, dans la supposition que ε est une fonction indéterminée du temps. Les équations (5), (6), (7), (8), (9) forment un système du sixième ordre qui, pour $\varepsilon' = 0$, se réduit au système connu. Les intégrales des aires (1), (2), (3) ont, comme dans le cas de $\varepsilon' = 0$, cette forme simple qui se prête commodément à l'élimination des variables qu'elles contiennent. On disposera arbitrairement de la fonction ε; il y aurait lieu d'examiner si cette fonction peut être employée avantageusement dans la théorie des perturbations.

III. — *Sur une transformation des équations différentielles du mouvement dans le Problème des trois corps.*

Le Problème des trois corps peut se ramener à un système d'équations différentielles du sixième ordre. On a d'abord le système connu du huitième ordre

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} n' = \dfrac{ds}{du}\dfrac{d\mathrm{U}}{ds}, & n'_1 = \dfrac{ds}{du_1}\dfrac{d\mathrm{U}}{ds}, \\ u' + \cos i\,\theta' = \dfrac{n}{r^2}, & u' + \cos i_1\,\theta' = \dfrac{n_1}{r_1^2}, \\ rr'' = \dfrac{n^2}{r^2} + r\dfrac{d\mathrm{U}}{dr}, & r_1 r''_1 = \dfrac{n_1^2}{r_1^2} + r_1\dfrac{d\mathrm{U}}{dr_1}, \end{cases}$$

où l'on doit éliminer les inclinaisons i et i_1 des plans des orbites sur le plan invariable à l'aide des intégrales des aires, et la dérivée θ' au moyen de l'équation

$$\frac{nn_1}{c}\theta' = -\sin u \sin u_1 \frac{d\mathrm{U}}{ds}.$$

Comme l'intégrale des forces vives

$$r'^2 + r_1'^2 + \frac{n^2}{r^2} + \frac{n_1^2}{r_1^2} = 2\mathrm{U} - a$$

satisfait au système précédent et que d'ailleurs la variable indépendante t ne figure pas dans les équations différentielles, le problème se trouve ramené à l'intégration d'un système du sixième ordre.

Le système du huitième ordre qui précède répond en même temps à la forme proposée par Hamilton, ainsi que M. Radau l'a montré récemment. On trouve en effet que si l'on met l'intégrale des forces vives sous la forme $\mathrm{H} = -a$, il est identique au système d'Hamilton

$$\frac{du}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{dn},\quad \frac{dn}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{du},$$
$$\frac{du_1}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{dn_1},\quad \frac{dn_1}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{du_1},$$
$$\frac{dr}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{dr'},\quad \frac{dr'}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{dr},$$
$$\frac{dr_1}{dt}=\frac{d\mathrm{H}}{dr'_1},\quad \frac{dr'_1}{dt}=-\frac{d\mathrm{H}}{dr_1}.$$

On ne peut admettre qu'en outre de l'intégrale des forces vives, il se trouve une autre intégrale du système précédent qui puisse, à l'aide des quadratures, se mettre sous forme finie. La chose serait moins claire, si par l'introduction de nouvelles variables on parvenait à transformer le système en un autre contenant moins de sept variables. Un nouveau système, que je vais faire connaître dans ce qui suit, est peut-être propre à donner quelque ouverture à ce sujet.

Au point où l'on est arrivé dans cette question, il y a, dans le système (A), une circonstance qui paraît gênante. Des huit variables de ce système, six figurent sous les radicaux de la fonction des forces. On a en effet

$$\mathrm{U}=\frac{\varkappa m\sqrt{\frac{m}{1+m}}}{r}+\frac{\varkappa mm_1\sqrt{\frac{mm_1}{m+m_1}}}{\sqrt{r_1^2\sin^2\mu-2rr_1 s\sin\mu\cos\mu+r^2\cos^2\mu}}$$
$$+\frac{\varkappa m_1\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}}}{\sqrt{r_1^2\cos^2\mu_0+2rr_1 s\cos\mu_0\sin\mu_0+r^2\sin^2\mu_0}},$$

où m et m_1 sont les rapports des masses des deux mobiles à la masse du corps central et où les angles μ et μ_0 dépendent seulement de m et de m_1; ils sont donnés par les formules

$$\sin\mu=\sqrt{\frac{m(1+m+m_1)}{(m+m_1)(1+m)}},\quad \cos\mu_0=\sqrt{\frac{1+m+m_1}{(1+m)(1+m_1)}}.$$

La quantité s est le cosinus de l'angle des deux rayons vecteurs.

On a

$$s = \cos u \cos u_1 + \cos J \sin u \sin u_1,$$

et pour l'élimination de J, on a l'intégrale des aires

$$n^2 + 2nn_1 \cos J + n_1^2 = c^2.$$

Sous les radicaux figurent dans les six variables r, r_1, u, u_1, n, n_1. Mais comme il est possible de choisir les variables du problème de façon que deux d'entre elles seulement figurent sous les radicaux, on pourrait faire au système (A) le reproche que les variables y sont trop mêlées.

J'introduis, au lieu de r et de r_1, deux nouvelles variables en posant

$$r^2 + r_1^2 = \rho^2, \quad \frac{r}{r_1} = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

Pour faciliter la transformation, j'écris l'intégrale des forces vives sous la forme

$$(rr' + r_1 r_1')^2 + (r_1 r' - r r_1')^2 + n^2 + n_1^2 + \frac{n^2 r_1^2}{r^2} + \frac{n_1^2 r^2}{r_1^2} = \rho^2(2U - a),$$

qui, en vertu de l'intégrale des aires déjà citée, se ramène à celle-ci :

$$(\rho\rho')^2 + \left(\rho^2 \frac{\psi'}{2}\right)^2 + \left(\frac{n r_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{n_1 r}{r_1}\right)^2 - 2nn_1 \cos J + c^2 = \rho^2(2U - a).$$

On a les équations identiques

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u_1 = 1 - s^2,\\
&\left(\frac{ds}{du_1}\right)^2 + \sin^2 J \sin^2 u \;\; = 1 - s^2,\\
&\frac{ds}{du}\frac{ds}{du_1} + (1 - s^2)\cos J = s \sin^2 J \sin u \sin u_1;
\end{aligned}$$

en ayant égard aux intégrales connues des aires, on peut les écrire

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 + \left(\frac{cz_1}{nr_1}\right)^2 = 1 - s^2,$$

$$\left(\frac{ds}{du_1}\right)^2 + \left(\frac{cz}{n_1 r}\right)^2 = 1 - s^2,$$

$$\frac{ds}{du}\frac{ds}{du_1} + (1 - s^2)\cos J = -s^2\frac{c^2 z z_1}{n n_1 r r_1},$$

où l'on a posé $z = r \sin i \sin u$ et $z_1 = r_1 \sin i_1 \sin u_1$. A l'aide de la dérivée

$$s' = \frac{ds}{du}\frac{n}{r^2} + \frac{ds}{du_1}\frac{n_1}{r_1^2}$$

et des équations (B), l'intégrale des forces vives se change en

$$(\rho\rho')^2 + \frac{1}{4}\rho^4\left(\psi'^2 + \frac{\sin^2\psi\, s'^2}{1 - s^2}\right) + c^2 \cdot \frac{\dfrac{z^2}{r_1^2} + \dfrac{z_1^2}{r^2} + \dfrac{2 z z_1 s}{r r_1}}{1 - s^2} + c^2 = \rho^2(2U - a).$$

A la place de ψ et de s, j'introduis deux nouvelles variables en faisant

$$\cos\psi = \cos\alpha\cos\beta, \quad s\sin\psi = \cos\alpha\sin\beta.$$

Posons encore

$$U = \frac{1}{\rho}V;$$

V sera une fonction de α et de β seulement. Il viendra

$$V = \frac{\varkappa m\sqrt{\dfrac{2m}{1+m}}}{\sqrt{1 - \cos\alpha\cos\beta}} + \frac{\varkappa m m_1\sqrt{\dfrac{2 m m_1}{m + m_1}}}{\sqrt{1 - \cos\alpha\cos(\beta - 2\mu)}} + \frac{\varkappa m_1\sqrt{\dfrac{2 m_1}{1 + m_1}}}{\sqrt{1 + \cos\alpha\cos(\beta - 2\mu_0)}}.$$

Des équations précédentes, il résulte

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - s^2}\sin\psi, \quad \operatorname{tang}\beta = s\operatorname{tang}\psi.$$

On en tire par la différentiation

$$\cos\alpha\,\alpha' = \sqrt{1 - s^2}\cos\psi\,\psi' - \frac{s s'\sin\psi}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad \cos^2\alpha\,\beta' = s\psi' + s'\cos\psi\sin\psi,$$

et l'intégrale des forces vives prend la forme

$$(\rho\rho')^2 + \frac{1}{4}\rho^4(\alpha'^2 + \cos^2\alpha\beta'^2) + c^2\frac{\frac{z^2}{r_1^2} + \frac{z_1^2}{r^2} + \frac{2zz_1s}{rr_1}}{1-s^2} + a\rho^2 - 2V\rho + c^2 = 0.$$

Des équations (B) on tire d'ailleurs l'équation identique

$$\frac{\left(n\frac{ds}{du} - n_1\frac{ds}{du_1}\right)^2}{1-s^2} = c^2\left(1 - \frac{\frac{z^2}{r^2} + \frac{z_1^2}{r_1^2} - \frac{2zz_1s}{rr_1}}{1-s^2}\right),$$

ce qui donne lieu d'introduire la nouvelle variable

$$\gamma_1 = \frac{n\frac{ds}{du} - n_1\frac{ds}{du_1}}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Pour éliminer les variables z et z_1, à l'équation qui précède je joins encore la suivante :

$$c^2\frac{\frac{z^2}{r_1^2} + \frac{z_1^2}{r^2} + \frac{2zz_1s}{rr_1}}{1-s^2} = (c^2 - \gamma_1^2)\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha}.$$

Les dérivées des nouvelles variables γ_1 et γ se déterminent par les deux équations

$$\frac{1}{2}\rho^2\gamma_1' = (c^2 - \gamma_1^2)\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sin^2\alpha}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\rho^2\gamma' = \frac{1}{2}\rho^2\sin\alpha\beta' - \gamma_1\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha}. \tag{2}$$

A la place des dérivées α' et β', je prends définitivement les deux variables que déterminent les équations

$$\frac{1}{2}\rho^2\alpha' = \alpha_1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{2}\rho^2\cos^2\alpha\beta' = \beta_1 + \gamma_1\sin\alpha. \tag{4}$$

Les dérivées de β_1 et de α_1 se déterminent par les deux équations

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\rho^2\beta'_1 = \rho\frac{dV}{d\beta},$$

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\rho^2\alpha'_1 = -\frac{(\beta_1+\gamma_1\sin\alpha)(\beta_1\sin\alpha+\gamma_1)}{\cos^3\alpha} + (c^2-\gamma_1^2)\frac{2\cos\alpha+(1+\cos^2\alpha)\cos\gamma}{\sin^3\alpha} + \rho\frac{dV}{d\alpha}.$$

Enfin on a pour la détermination de ρ l'équation différentielle du second ordre

$$(7) \qquad \rho(\rho\rho')' = \theta - a\rho.$$

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) forment un nouveau système du huitième ordre : à ce système satisfait l'intégrale des forces vives

$$(\rho\rho')^2 + \alpha_1^2 + \frac{(\beta_1+\gamma_1\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} + (c^2-\gamma_1^2)\frac{1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha} + a\rho^2 - 2V\rho + c^2 = 0.$$

Comme d'ailleurs la variable indépendante t ne figure pas dans les coefficients des équations, on peut encore considérer ce système comme étant du sixième ordre. Ce qui le caractérise, c'est que le radical V ne contient que les deux variables α et β, dont la dernière n'entre pas autrement dans les équations.

L'équation différentielle linéaire du second ordre à laquelle satisfait la fonction V peut s'écrire

$$\frac{d^2V}{d\beta^2} + \cos^2\alpha\left(\frac{d^2V}{d\alpha^2} + 2\cot 2\alpha\frac{dV}{d\alpha} - \frac{3}{4}V\right) = 0.$$

Il suffit d'un léger changement pour ramener le système à la forme prescrite par Hamilton. Qu'on pose en effet

$$\rho^2 = e^\sigma \quad \text{ou} \quad \sigma = l\rho^2,$$

l désignant les logarithmes naturels et e la base de ces logarithmes. Il s'ensuivra

$$\rho\rho' = \frac{1}{2}\rho^2\sigma'$$

et l'équation (7) pourra être remplacée par ces deux-ci :

$$\frac{1}{2}\rho^2\sigma' = \sigma_1, \quad \rho^2\sigma'_1 = V\rho - a\rho^2.$$

Qu'au lieu de t, on prenne pour variable indépendante $\tau = \int \rho^2 dt$ et qu'on pose, pour abréger,

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 + \alpha_1^2 + \frac{(\beta_1 + \gamma_1 \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha} \\ + (c^2 - \gamma_1^2)\frac{1 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha} + ae^\sigma - 2Ve^{\frac{1}{2}\sigma} + c^2 = H :\end{aligned}$$

l'intégrale des forces vives sera $H = 0$ et le système du huitième ordre pourra s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\tau} &= \frac{dH}{d\sigma_1}, & \frac{d\sigma_1}{d\tau} &= -\frac{dH}{d\sigma}, \\ \frac{d\alpha}{d\tau} &= \frac{dH}{d\alpha_1}, & \frac{d\alpha_1}{d\tau} &= -\frac{dH}{d\alpha}, \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= \frac{dH}{\beta_1}, & \frac{d\beta_1}{d\tau} &= -\frac{dH}{d\beta}, \\ \frac{d\gamma}{d\tau} &= \frac{dH}{d\gamma_1}, & \frac{d\gamma_1}{d\tau} &= -\frac{dH}{d\gamma},\end{aligned}$$

ce qui est la forme des équations d'Hamilton.

Remarquons en terminant que dans le cas où les deux orbites sont contenues dans un seul et même plan, c'est-à-dire où l'on a $J = 0$, l'ordre du système s'abaisse de deux unités. De $J = 0$, il suit, en vertu des intégrales des aires, qu'on a aussi $i = 0$, $i_1 = 0$, et par conséquent $\gamma_1 = c$. D'ailleurs, à cause de $\gamma_1 = c$, la variable γ disparaît du système. Quand on aura intégré le système du quatrième ordre qui reste, on déduira la variable γ de l'équation (2) au moyen d'une quadrature.