JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 263-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__263_0>

Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n;

Par M. J. LIOUVILLE.

Cette remarque est bien simple et chacun pourra la vérifier tout de suite au moyen de la formule connue qui donne la valeur de $\zeta_1(n)$ en fonction des facteurs premiers entrant dans la composition de n et de leurs exposants. Soit a un des facteurs premiers dont il s'agit, et faisons

$$n = aq;$$

q sera naturellement un entier; mais deux cas peuvent se présenter suivant que q est ou n'est pas divisible par a. Quand q n'est pas divisible par a, on a, comme on sait,

$$\zeta_1(aq) = (a+1)\zeta_1(q).$$

Maintenant j'ajoute que quand

$$\frac{q}{a}$$

est entier, une autre équation presque aussi simple s'offre à nous, car alors

$$\zeta_1(aq) + a\zeta_1\left(\frac{q}{a}\right) = (a+1)\zeta_1(q).$$

La fonction

$$\zeta_1(n)$$

intervient (et même de plus d'une manière, ainsi que Jacobi l'a montré le premier) dans l'expression du nombre des représentations d'un entier donné, par une somme de quatre carrés. On pourra donc tirer parti de la formule que nous venons de mettre sous les yeux du lecteur; mais la place nous manque pour de plus longs développements. Contentons-nous aujourd'hui d'ajouter que des considérations du même genre s'appliquent, non-seulement à la fonction numérique plus générale

$$\zeta_\mu(n)$$

qui représente la somme des puissances de degré μ des diviseurs de n et pour laquelle on obtient l'équation

$$\zeta_\mu(aq) + a^\mu \zeta_\mu\left(\frac{q}{a}\right) = (a^\mu + 1)\,\zeta_\mu(q),$$

mais encore aux fonctions

$$\rho_\mu(n), \quad \xi_\mu(n), \quad \omega_\mu(n), \ldots,$$

dont nous avons eu aussi à nous occuper souvent.