JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Sur le mouvement vibratoire des plaques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 241-259.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__241_0>

Sur le mouvement vibratoire des plaques;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

1. Poisson est le premier qui ait donné la démonstration rigoureuse de l'équation aux différences partielles qui régit le mouvement vibratoire d'une lame ou d'une plaque. Si l'on suppose que cette plaque soit partout d'égale épaisseur, plane, homogène et de même élasticité dans tous les sens, cette équation est

$$(1) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^4 w}{dx^4} + 2\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4}\right) = 0,$$

w désignant le déplacement transversal d'un point (x, y) de la surface médiane, t le temps, et les axes de coordonnées étant pris rectangulaires et dans le plan de cette surface. De plus a^2 a pour valeur

$$a^2 = \frac{k^2 h^2}{\rho},$$

h étant l'épaisseur de la plaque, ρ sa densité et k^2 une quantité positive qui dépend de deux coefficients qui entrent dans la théorie de l'élasticité des corps isotropes. (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII.)

Cauchy, qui s'est occupé de la même question, a présenté les calculs avec plus d'ordre et de clarté; mais le fond de sa démonstration ne diffère pas de celle de Poisson. (*Exercices de Mathématiques;* 1828.)

Il était aisé de prévoir l'équation (1) avant d'en obtenir une démonstration rigoureuse. Il suffisait en effet pour l'obtenir de faire une hypothèse analogue à celle qui avait réussi à Jacques Bernoulli pour la détermination de l'équation de la lame vibrante. On pouvait encore observer que cette dernière équation étant

$$(2) \qquad \frac{d^2 w}{dt^2} + a^2 \frac{d^4 w}{dx^4} = 0,$$

l'équation de la plaque vibrante sera nécessairement l'équation (1), si l'on admet qu'elle est linéaire; on le reconnaît facilement en remarquant que si w ne varie pas avec y, l'équation du mouvement de la plaque doit se réduire à (2) et qu'elle doit rester invariable par une transformation de coordonnées faite dans le plan des x, y. Mais il était impossible d'arriver à la véritable démonstration avant l'invention de la théorie de l'élasticité, qui est due à Navier.

Fourier a donné dans sa *Théorie mathématique de la Chaleur* l'intégrale générale de l'équation (1) au moyen d'une somme de deux intégrales définies. Toutefois cette formule est peu utile; car, pour se représenter le mouvement vibratoire de ces plaques, il faut intégrer l'équation (1) en ayant égard aux conditions auxquelles w doit satisfaire sur les bords.

Cauchy et Poisson ont donné dans leurs Mémoires ces conditions aux limites dans deux cas : celui où les bords sont fixes et encastrés, et celui où les bords sont libres.

Quand les bords sont encastrés, il en résulte deux conditions aux limites, et il n'y a aucun empêchement à les adopter; mais quand les bords sont libres, ces géomètres expriment, comme il semble naturel, que la pression sur les bords est nulle, et ils obtiennent trois équations par la considération des trois composantes de la pression; or, comme le remarque fort bien M. Kirchhof, il n'est pas possible de satisfaire à autant de conditions. Pour obvier à cet embarras, il reprend la question en partant de deux hypothèses, et ne trouve plus que deux conditions aux limites. Mais ces hypothèses fussent-elles exactes, des démonstrations qui les ont pour bases ne sauraient être regardées comme rigoureuses, et la seconde me semble tout à fait inadmissible (*Journal de Crelle,* t. XL). Il n'y a donc rien à changer à ce qui a été donné par Poisson et Cauchy pour établir l'équation (1), et nous reviendrons plus loin sur les conditions analytiques qui doivent être satisfaites sur les bords.

2. Quand on considère une corde ou une membrane dont les extrémités ou les bords sont fixes, le mouvement le plus général qu'elles peuvent avoir est la somme d'une infinité de solutions simples de la forme

$$w = u(\mathrm{A}\sin mt + \mathrm{B}\cos mt),$$

dans laquelle u est indépendant de t, et m une constante. La même propriété a lieu à l'égard du mouvement d'une lame dont les bords sont encastrés ou libres, d'après les conditions qu'on adopte aux extrémités. Il y a donc lieu de se demander quelles conditions aux limites il faut avoir pour que cette propriété appartienne encore au mouvement vibratoire d'une plaque.

Prenons deux solutions de l'équation (1) de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} w &= u\,(\mathrm{A}\sin l^2 at + \mathrm{B}\cos l^2 at),\\ w' &= u'(\mathrm{A}'\sin l'^2 at + \mathrm{B}'\cos l'^2 at),\end{aligned}\right.$$

et nous aurons les deux équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^4u}{dx^4} + 2\frac{d^4u}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u}{dy^4} = l^4u,\\ &\frac{d^4u'}{dx^4} + 2\frac{d^4u'}{dx^2dy^2} + \frac{d^4u'}{dy^4} = l'^4u.\end{aligned}\right.$$

L'intégration par parties donne

$$\int_{x_1}^{x_2} u'\frac{d^4u}{dx^4}dx = \left(u'\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{d^2u}{dx^2}\frac{du'}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{d^2u'}{dx^2} - u\frac{d^3u'}{dx^3}\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\frac{d^4u'}{dx^4}dx,$$

en désignant par x_1 et x_2 les abscisses des deux points M_1 et M_2 où une droite parallèle à l'axe des x rencontre le contour de la plaque.

Intégrons l'équation précédente par rapport à y et étendons la double intégration à toute la surface de la plaque, nous aurons

$$\begin{aligned}&\int\!\!\int u'\frac{d^4u}{dx^4}\,dx\,dy\\ &\quad=\int\left(u'\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{du'}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{d^2u'}{dx^2} - u\frac{d^3u'}{dx^3}\right)_{x_1}^{x_2}dy + \int\!\!\int u\frac{d^4u'}{dx^4}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Dans l'intégrale simple, dy est la projection sur l'axe des y de deux éléments différents de la courbe du contour ds_1 et ds_2 situés en M_1 et M_2, et en désignant par α_1 et α_2 les angles avec l'axe des x des normales en M_1 et M_2, on a

$$dy = -ds_2 \cos\alpha_2, \quad dy = ds_1 \cos\alpha_1;$$

donc, en désignant par α l'angle de la normale en un point quelconque avec l'axe des x, on a

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int u' \frac{d^4 u}{dx^4}\, dx\, dy \\ &\quad = -\int\left(u' \frac{d^3 u}{dx^3} - \frac{du'}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u'}{dx^2}\frac{du}{dx} - \frac{d^3 u'}{dx^3} u\right)\cos\alpha\, ds \\ &\qquad + \int\int u \frac{d^4 u'}{dx^4}\, dx\, dy, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle équation l'intégrale simple est prise tout le long du contour.

On trouve encore par l'intégration par parties

$$\int\int u' \frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} dx\, dy = \int\left(\frac{d^3 u}{dx\, dy^2} u' - \frac{du'}{dx}\frac{d^2 u}{dy^2}\right)_{x_1}^{x_2} dy$$
$$+\int\left(\frac{d^2 u'}{dx^2}\frac{du}{dy} - u\frac{d^3 u'}{dx^2 dy}\right)_{y_1}^{y_2} dx + \int\int u \frac{d^4 u'}{dx^2 dy^2}\, dx\, dy,$$

en désignant par y_1 et y_2 les ordonnées des deux points N_1 et N_2 où une droite parallèle à l'axe des y rencontre le contour. Dans la seconde intégrale simple, regardons dx comme la projection de deux éléments de la courbe $d\sigma_1$ et $d\sigma_2$ placés en N_1 et N_2, et désignons par a_1 et a_2 les angles de la normale en ces points avec l'axe des x; nous aurons

$$dx = d\sigma_2 \sin a_2 = -d\sigma_1 \sin a_1,$$

et la formule précédente peut s'écrire

$$(\mathrm{B})\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\int u' \frac{d^4 u}{dx^2 dy^2}\, dx\, dy \\ &\quad = -\int\left(\frac{d^3 u}{dx\, dy^2} u' - \frac{du'}{dx}\frac{d^2 u}{dy^2}\right)\cos\alpha\, ds \\ &\qquad + \int\left(\frac{d^2 u'}{dx^2}\frac{du}{dy} - u\frac{d^3 u'}{dx^2 dy}\right)\sin\alpha\, ds + \int\int u \frac{d^4 u'}{dx^2 dy^2}\, dx\, dy. \end{aligned}\right.$$

Permutons x et y dans (B) et (A), et nous aurons

$$
(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{aligned}
&\iint u'\frac{d^4u}{dx^2dy^2}dx\,dy\\
&\quad=\int\left(\frac{d^3u}{dy\,dx^2}u'-\frac{du'}{dy}\frac{d^2u}{dx^2}\right)\sin\alpha\,ds\\
&\quad-\int\left(\frac{d^2u'}{dy^2}\frac{du}{dx}-u\frac{d^3u'}{dy^2dx}\right)\cos\alpha\,ds+\iint u\frac{d^4u'}{dx^2dy^2}dx\,dy,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{D})\quad\left\{\begin{aligned}
\iint u'\frac{d^4u}{dy^4}dx\,dy=&\int\left(u'\frac{d^3u}{dy^3}-\frac{d^2u}{dy^2}\frac{du'}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{d^2u'}{dy^2}-u\frac{d^3u'}{dy^3}\right)\sin\alpha\,ds\\
&+\iint u\frac{d^4u'}{dy^4}dx\,dy.
\end{aligned}\right.
$$

Ajoutant (A), (B), (C), (D), posant en général

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}=\Delta v$$

et ayant égard aux deux équations aux différences partielles qui donnent u et u', on a

$$
\begin{aligned}
l^4\iint uu'\,dx\,dy=&\int ds\,u'\left(-\frac{d\Delta u}{dx}\cos\alpha+\frac{d\Delta u}{dy}\sin\alpha\right)\\
&-\int ds\,\Delta u\left(-\frac{du'}{dx}\cos\alpha+\frac{du'}{dy}\sin\alpha\right)\\
&-\int ds\,\Delta u'\left(-\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\sin\alpha\right)\\
&+\int ds\,u\left(-\frac{d\Delta u'}{dx}\cos\alpha+\frac{d\Delta u'}{dy}\sin\alpha\right)+l'^4\iint uu'\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Si l'on désigne par dn l'élément de la normale au contour, on a en général

$$\frac{du}{dn}=-\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\sin\alpha,$$

cet élément de normale étant supposé mené à l'intérieur. Donc l'équation précédente peut s'écrire

$$(l^4-l'^4)\iint uu'\,dx\,dy=\int ds\left(u'\frac{d\Delta u}{dn}-\Delta u\frac{du'}{dn}-\Delta u'\frac{du}{dn}+u\frac{d\Delta u'}{dn}\right),$$

et si l' est différent de l, on aura l'équation

$$\text{(E)} \qquad \int\int u u' dx dy = 0,$$

où l'intégrale double s'étend à toute la surface de la plaque, dans les quatre cas où l'on a sur le contour :

$$1^\circ\ u = 0, \quad \frac{du}{dn} = 0; \quad 2^\circ\ \Delta u = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0,$$
$$3^\circ\ u = 0, \quad \Delta u = 0; \quad 4^\circ\ \frac{du}{dn} = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0.$$

Car il est entendu que u' doit satisfaire aux mêmes conditions aux limites que u.

Dans ces quatre cas, l'expression de w donnée par les formules (3) et (4) est ce qu'on appelle une solution simple, et le mouvement le plus général qu'on peut imaginer pour la plaque est alors la somme d'une infinité de solutions simples. Posons

$$w = u_1(A_1 \sin l_1^2 at + B_1 \cos l_1^2 at) + u_2(A_2 \sin l_2^2 at + B_2 \cos l_2^2 at) + \ldots,$$

et nous aurons à déterminer les coefficients A et B qui entrent dans chaque solution simple d'après l'état initial supposé donné. Ainsi désignons par $f(x, y)$ et $F(x, y)$ les valeurs de w et $\frac{dw}{dt}$ pour $t = 0$, nous aurons

$$f(x, y) = B_1 u_1 + B_2 u_2 + \ldots + B_n u_n + \ldots,$$
$$\frac{1}{a} F(x, y) = l_1^2 A_1 u_1 + l_2^2 A_2 u_2 + \ldots + l_n^2 A_n u_n + \ldots.$$

Or, en multipliant ces deux équations par $u_n dx dy$ et intégrant dans toute l'étendue de la plaque, on réduira les seconds membres à ne contenir plus que les coefficients A_n et B_n : ce qui permettra de les déterminer.

5. Le premier cas se rapporte à la plaque encastrée.

Si l'on peut trouver la solution simple dans le premier cas, on l'obtiendra aisément dans le second. Car si l'on pose

$$\Delta u = l^2 v,$$

on voit qu'on satisfera à l'équation (4), qu'on peut écrire

$$\Delta^2 u = l^4 u,$$

en faisant

$$\Delta v = l^2 u,$$

et il en résultera

$$\Delta^2 v = l^4 v.$$

Alors on voit que si u est une solution simple dans le premier cas, v en sera une pour le second cas.

Le troisième cas sera résolu immédiatement quand on connaîtra le mouvement vibratoire d'une membrane de même contour que la plaque.

En effet, l'équation qui régit le mouvement vibratoire d'un point quelconque de la membrane est

$$\Delta w = b^2 \frac{d^2 w}{dt^2},$$

et w est nul sur le contour. On obtient la solution simple en posant

$$(a) \qquad w = u(\mathrm{A} \sin lbt + \mathrm{B} \cos lbt),$$

et prenant pour u une fonction qui satisfait en un point quelconque (x, y) à l'équation

$$(b) \qquad \Delta u = -l^2 u$$

et sur le contour à la condition $u = 0$.

Or, pour le troisième cas des plaques, on a

$$(c) \qquad w = u(\mathrm{A} \sin l^2 at + \mathrm{B} \cos l^2 at),$$

et u a la même valeur que dans la formule (a); car de l'équation (b) on tire

$$\Delta^2 u = -l^2 \Delta u = l^4 u,$$

et la condition du contour $u = 0$ donne aussi $\Delta u = 0$, puisque l'on a l'équation (b) pour tous les points du contour. Les deux valeurs (a) et (c) de w ne diffèrent donc que par l'arc multiple de t qui y entre, et les hauteurs de deux sons résultant de deux états vibratoires simples de la membrane étant dans un certain rapport, les hauteurs des sons qui proviennent des états correspondants de la plaque sont dans un rapport qui est le carré du premier.

On voit de même aisément que le dernier cas ne dépend que d'une équation du second ordre et que u satisfait à l'équation (c) en un point quelconque et à l'équation $\frac{du}{dn} = 0$ sur le contour.

Le premier cas qui se rapporte à la plaque encastrée a un intérêt particulier, puisqu'on reconnaît tout de suite qu'on peut le réaliser expérimentalement; c'est pourquoi nous allons nous occuper du mouvement vibratoire d'une pareille plaque lorsque son bord est une ellipse.

Plaque elliptique encastrée.

4. Considérons d'abord la question, beaucoup plus facile, de la plaque circulaire. En général, en posant

$$w = u(\mathrm{A}\sin l^2 at + \mathrm{B}\cos l^2 at),$$

on a u par l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} + 2\frac{d^4 u}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 u}{dy^4} = l^4 u,$$

et en introduisant une quantité v, cette équation peut se décomposer en les deux suivantes

$$l^2 v = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2}, \quad l^2 u = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2}.$$

Posons

$$\mathrm{U} = \frac{u+v}{2}, \quad \mathrm{V} = \frac{u-v}{2},$$

il en résultera

$$u = \mathrm{U} + \mathrm{V},$$

et U et V seront donnés par les formules

$$\text{(G)}\qquad \left\{\begin{aligned} -l^2 V &= \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2},\\ l^2 U &= \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2}.\end{aligned}\right.$$

Employant les coordonnées polaires r et α, données par les équations

$$x = r\cos\alpha,\quad y = r\sin\alpha,$$

on change les deux équations précédentes en les suivantes

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\alpha^2} = -l^2V,$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dU}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2U}{d\alpha^2} = l^2U.$$

On obtiendra V en posant

$$V = (A\cos n\alpha + B\sin n\alpha)\,CR(r, l^2),$$

prenant pour n un nombre entier et

$$R(r, l^2) = r^n\left[1 - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 r^2}{1(n+1)} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4 r^4}{1.2(n+1)(n+2)} - \ldots\right],$$

et V représente l'expression que l'on trouve quand on cherche le mouvement vibratoire d'une membrane circulaire.

On obtiendra U au moyen de V en changeant l^2 en $-l^2$, et on aura

$$u = (A\cos n\alpha + B\sin n\alpha)[CR(r, l^2) + DR(r, -l^2)].$$

On déterminera $\frac{D}{C}$ et l par les conditions du contour qui sont fournies par les équations

$$u = 0,\quad \frac{du}{dr} = 0$$

pour $r = r_1$, r_1 étant le rayon de la plaque.

Il est aisé de voir d'après cette formule que les lignes nodales sont des cercles concentriques à la plaque et des diamètres qui les divisent en parties égales.

5. Occupons-nous ensuite de la plaque elliptique. Nous prendrons pour coordonnées α et β fournis par les formules

$$x = c\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\cos\alpha, \quad y = c\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\sin\alpha;$$

$\beta =$ const. représente une suite d'ellipses homofocales, et $\alpha =$ const. des hyperboles de mêmes foyers que ces ellipses. Au moyen de ces variables, si l'on pose $h = \frac{lc}{2}$, les équations (G) se transforment en les suivantes :

$$(\mathrm{P}) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = -2h^2\left(\frac{e^{2\beta}+e^{-2\beta}}{2} - \cos 2\alpha\right)V,$$

$$(\mathrm{Q}) \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} = +2h^2\left(\frac{e^{2\beta}+e^{-2\beta}}{2} - \cos 2\alpha\right)U.$$

On trouve l'équation (P) dans la théorie de la membrane elliptique; mais l'expression qui doit satisfaire à cette équation n'a plus ici une forme aussi simple, car V et U ne se réduisent pas au produit d'une fonction de α par une fonction de β.

Il faudra que U et V, dont la somme compose u, soient des fonctions qui aient par rapport à α la période 2π; car les expressions de x et y restent invariables quand on remplace α par $\alpha + 2\pi$; elles doivent de plus rester les mêmes après le double changement de α et β en $-\alpha$ et $-\beta$, parce que x et y restent invariables par ces changements de signe. Au reste on peut s'assurer que cette dernière condition revient à admettre que V, $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$ varient d'une manière continue quand on traverse la droite qui joint les deux foyers.

Enfin la plaque étant encastrée sur l'ellipse dont le paramètre β a la valeur B, on a pour conditions aux limites

$$(\mathrm{R}) \qquad V + U = 0, \quad \frac{dV}{d\beta} + \frac{dU}{d\beta} = 0$$

pour $\beta = B$.

Posons la formule

$$\text{(S)} \qquad V = P_0 + P_1\beta^2 + P_2\beta^4 + P_3\beta^6 + \ldots,$$

dans laquelle P_0, P_1, P_2,... sont des fonctions de α, et comme V est pair par rapport à β, P_0, P_1,... doivent être aussi des fonctions paires. Substituons cette expression dans l'équation (P), et nous aurons les équations

$$\frac{d^2P_0}{d\alpha^2} + 2P_1 + 2h^2(1-\cos 2\alpha)P_0 = 0,$$

$$\frac{d^2P_1}{d\alpha^2} + 3.4\,P_2 + 2h^2\left(\frac{4}{1.2}P_0 + P_1\right) - 2h^2\cos 2\alpha P_1 = 0,$$

$$\frac{d^2P_2}{d\alpha^2} + 5.6\,P_3 + 2h^2\left(\frac{16}{2.3.4}P_0 + \frac{4}{1.2}P_1 + P_2\right) - 2h^2\cos 2\alpha P_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ainsi P_1, P_2,... sont des fonctions paires dont la période est 2π et qui dépendent de la seule P_0. Or, désignons par g un nombre entier et posons, si g est impair,

$$\begin{aligned} P_0 = {} & A\cos g\alpha + h^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha] \\ & + h^4[a_2\cos(g+4)\alpha + b_2\cos(g-4)\alpha] + \ldots \\ & + h^{g-1}\left[a_{\frac{g-1}{2}}\cos(2g-1)\alpha + b_{\frac{g-1}{2}}\cos\alpha\right] \\ & + h^{g+1}a_{\frac{g+1}{2}}\cos(2g+1)\alpha + h^{g+3}a_{\frac{g+3}{2}}\cos(2g+3)\alpha + \ldots, \end{aligned}$$

et, si g est pair,

$$\begin{aligned} P_0 = {} & A\cos g\alpha + h^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha] + \ldots \\ & + h^{g-2}\left[a_{\frac{g-2}{2}}\cos(2g-2)\alpha + b_{\frac{g-2}{2}}\cos 2\alpha\right] + h^g\left(a_{\frac{g}{2}}\cos 2g\alpha + b_{\frac{g}{2}}\right) \\ & + h^{g+2}a_{\frac{g+2}{2}}\cos(2g+2)\alpha + \ldots. \end{aligned}$$

Alors les fonctions P_1, P_2,... seront de même forme que P_0. En mettant en évidence les facteurs h^2, h^4,..., nous ne voulons pas marquer que a_1, b_1, a_2, b_2,... ne dépendent pas de h, mais bien qu'ils ne sont pas infinis pour $h=0$, de sorte que les facteurs h^2, h^4,... indiquent l'ordre par rapport à h des termes qu'ils multiplient.

Pour rendre ce que nous avons à dire plus aisé à comprendre, imaginons d'abord que h^2 soit très-petit, en sorte que l'on puisse négliger les termes en h^6, et supposons en outre que g ne soit pas moindre que 4; alors on pourra réduire P_0 à

$$\begin{aligned}P_0 = A \cos g\alpha &+ h^2[a_1 \cos(g+2)\alpha + b_1 \cos(g-2)\alpha]\\ &+ h^4[a_2 \cos(g+4)\alpha + b_2 \cos(g-4)\alpha];\end{aligned}$$

la forme de P_0 étant connue, on pourra en déduire, par les formules que nous avons données, les expressions de P_1, P_2, P_3,..., dont j'écris seulement les deux premières :

$$\begin{aligned}2P_1 = [A(g^2 - 2h^2) &+ h^4(a_1+b_1)]\cos g\alpha\\ &+ h^2\{a_1[(g+2)^2 - 2h^2] + A\}\cos(g+2)\alpha\\ &+ h^2\{b_1[(g-2)^2 - 2h^2] + A\}\cos(g-2)\alpha\\ &+ h^4[(g+4)^2 a_2 + a_1]\cos(g+4)\alpha\\ &+ h^4[(g-4)^2 b_2 + b_1]\cos(g-4)\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2.3.4P_2 = [A(g^4 &- 4h^2g^2 - 8h^2 + 4h^4)\\ &+ h^4(2g^2 + 4g + 4)a_1 + (2g^2 - 4g + 4)b_1]\cos g\alpha\\ &+ \{Ah^2(2g^2 + 4g + 4 - 4h^2)\\ &\quad + h^2[(g+2)^4(1-4h^2) - 8h^2]a_1\}\cos(g+2)\alpha\\ &+ \{Ah^2(2g^2 - 4g + 4 - 4h^2)\\ &\quad + h^2[(g-2)^4(1-4h^2) - 8h^2]b_1\}\cos(g-2)\alpha\\ &+ h^4[(g+4)^2a_2 + (2g^2 + 12g + 20)a_1 + A]\cos(g+4)\alpha\\ &+ h^4[(g-4)^2a_2 + (2g^2 - 12g + 20)b_1 + A]\cos(g-4)\alpha.\end{aligned}$$

On obtiendra ensuite la fonction U, qui satisfait à l'équation (Q), en changeant, dans V, h^2 en $-h^2$; ainsi on aura, en négligeant h^6,

$$\begin{aligned}U &= \Pi_0 + \Pi_1\beta^2 + \Pi_2\beta^4 + \Pi_3\beta^6 + \ldots,\\ \Pi_0 &= A' \cos g\alpha - h^2[a'_1 \cos(g+2)\alpha + b'_1 \cos(g-2)\alpha]\\ &\quad + h^4[a'_2 \cos(g+4)\alpha + b'_2 \cos(g-4)\alpha],\end{aligned}$$

et Π_1, Π_2,... se déduisent de Π_0 comme P_1, P_2,... de P_0, sauf le changement de h^2 en $-h^2$. Donc on formera Π_1, Π_2,... au moyen de P_1, P_2,..., par le changement de h^2 en $-h^2$, et en accentuant A, a_1, b_1, a_2, b_2.

D'après cela, on voit que les équations (R), qui ont lieu pour $\beta = B$, peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}
L\cos g\alpha + Mh^2\cos(g+2)\alpha + M'h^2\cos(g-2)\alpha \\
+ Nh^4\cos(g+4)\alpha + N'h^4\cos(g-4)\alpha = 0, \\
\frac{dL}{d\beta}\cos g\alpha + \frac{dM}{d\beta}h^2\cos(g+2)\alpha + \frac{dM'}{d\beta}h^2\cos(g-2)\alpha + \ldots = 0,
\end{gathered}$$

et on en déduira les dix équations

$$\begin{gathered}
L = 0, \quad M = 0, \quad M' = 0, \quad N = 0, \quad N' = 0, \\
\frac{dL}{d\beta} = 0, \quad \frac{dM}{d\beta} = 0, \quad \frac{dM'}{d\beta} = 0, \quad \frac{dN}{d\beta} = 0, \quad \frac{dN'}{d\beta} = 0,
\end{gathered}$$

qui renferment les dix quantités A, A', a_1, a_2, a'_1, a'_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2 au premier degré, et qui sont homogènes par rapport à ces quantités.

En les éliminant, on aura une équation qui ne renfermera plus d'inconnu que h et pourra servir à le déterminer.

On voit bien maintenant comment on devrait traiter la question si l'on négligeait les puissances de h supérieures à h^{2n}. Ainsi la forme de la solution est connue; mais, quoique les séries employées soient toujours convergentes, les calculs que nous venons d'indiquer sont impraticables. Même dans le cas où l'excentricité $2c$ est très-petite et le son rendu un des plus graves que puisse donner la plaque, de sorte que l a une de ses plus petites valeurs, les calculs resteront très-compliqués, quoique h soit très-petit. En effet, il est vrai qu'alors on pourra réduire les séries qui donnent P_0, P_1, P_2,... à un petit nombre de termes; mais β sur le contour deviendra alors assez grand : ce qui obligera de prendre pour V un grand nombre de termes de la série (S).

Nous venons de donner l'expression de u quand elle est paire par rapport à α et β; si elle est impaire par rapport à ces deux variables, on posera, pour l'obtenir,

$$V = p_0\beta + p_1\beta^3 + p_2\beta^5 + p_3\beta^7 + \ldots;$$

alors $p_1, p_2, \ldots$ se déduiront de p_0 par les équations

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 p_0}{d\alpha^2} + 2.3\,p_1 + 2h^2(1 - \cos 2\alpha)\,p_0 = 0,\\
&\frac{d^2 p_1}{d\alpha^2} + 4.5\,p_2 + 2h^2\left(\frac{4}{1.2}\,p_0 + p_1\right) - 2h^2\cos 2\alpha\, p_1 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On prendra, si g est impair,

$$\begin{aligned}
p_0 = {} & A\sin g\alpha + h^2[a_1\sin(g+2)\alpha + b_1\sin(g-2)\alpha] + \ldots\\
& + h^{g-1}\left[a_{\frac{g-1}{2}}\sin(2g-1)\alpha + b_{\frac{g-1}{2}}\sin\alpha\right] + h^{g+1}a_{\frac{g+1}{2}}\sin(2g+1)\alpha + \ldots,
\end{aligned}$$

et, si g est pair,

$$\begin{aligned}
p_0 = {} & A\sin g\alpha + \ldots + h^{g-2}\left[a_{\frac{g-2}{2}}\sin(2g-2)\alpha + b_{\frac{g-2}{2}}\sin 2\alpha\right]\\
& + h^g a_{\frac{g}{2}}\sin 2g\alpha + h^{g+2}a_{\frac{g+2}{2}}\sin(2g+2)\alpha + \ldots.
\end{aligned}$$

On déduit U de V comme ci-dessus, et les calculs se continuent de la même manière.

Plaque annulaire et elliptique encastrée sur ses deux contours.

6. Considérons une plaque dont les deux contours sont des ellipses homofocales et sont encastrés. Les calculs que nous allons donner pour cette question seraient moins difficiles à appliquer que ceux de la précédente, lorsque l'excentricité serait peu considérable. Il est facile de s'expliquer la raison de cette différence : on ne peut faire $c = 0$ et, par suite, $h = 0$, dans la question précédente, pour avoir le mouvement vibratoire d'une plaque circulaire, tandis que, dans les calculs suivants, on aura, en faisant $c = 0$, la solution qui se rapporte à la plaque dont les contours sont des cercles concentriques. On aurait donc une solution approchée du problème en supposant $c = 0$ dans nos calculs; puis nos formules permettraient de traiter plus aisément le cas où l'excentricité serait petite. Le calcul où l'on fait $c = 0$ pourrait d'ailleurs être d'abord vérifié par une recherche expérimentale.

Posons

$$\beta = \varepsilon - l\frac{c}{2a}, \quad \frac{c^2}{2a} = m,$$

et les équations (P) et (Q) se changeront en les suivantes :

$$(\mathrm{P}') \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\varepsilon^2} = -l^2\left(a^2e^{2\varepsilon} + \frac{m^2}{4}e^{-2\varepsilon} - \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)V,$$

$$(\mathrm{Q}') \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\varepsilon^2} = l^2\left(a^2e^{2\varepsilon} + \frac{m^2}{4}e^{-2\varepsilon} - \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)U.$$

Développons V de la manière suivante :

$$V = X_0 + X_1\varepsilon + X_2\varepsilon^2 + X_3\varepsilon^3 + \ldots,$$

$X_0, X_1, X_2, \ldots$ étant des fonctions de α seul, et, en substituant dans (P'), nous aurons les équations

$$\frac{d^2X_0}{d\alpha^2} + 2X_2 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_0,$$

$$\frac{d^2X_1}{d\alpha^2} + 2.3X_3 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_1 + l^2\left(-2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_0,$$

$$\frac{d^2X_2}{d\alpha^2} + 3.4X_4 = l^2\left(-a^2 - \frac{m^2}{4} + \frac{c^2}{2}\cos 2\alpha\right)X_2 + l^2\left(-2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_1$$
$$- l^2\left(2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)X_0,$$

....

qui permettront de les déterminer toutes au moyen des deux premières X_0 et X_1.

Prenons pour X_0 et X_1 des développements analogues à celui que nous avons pris pour P_0 dans la question précédente; posons donc, g étant un nombre entier,

$$X_0 = A\cos g\alpha + c^2[a_1\cos(g+2)\alpha + b_1\cos(g-2)\alpha]$$
$$+ c^4[a_2\cos(g+4)\alpha + b_2\cos(g-4)\alpha] + \ldots$$
$$X_1 = B\cos g\alpha + c^2[c_1\cos(g+2)\alpha + d_1\cos(g-2)\alpha] + \ldots,$$

et nous savons qu'à une certaine distance du premier terme les puissances de c ne multiplient plus qu'un seul terme. Alors les fonctions X_2, $X_3, \ldots$ se mettront aisément sous la même forme.

De même, nous poserons

$$U = Y_0 + Y_1 \varepsilon + Y_2 \varepsilon^2 + Y_3 \varepsilon^3 + \ldots,$$

et $Y_2, Y_3, \ldots$ se déduiront de Y_0 et Y_1, comme $X_2, X_3, \ldots$ se déduisent de X_0 et X_1, pourvu qu'on remplace toutefois l^2 par $-l^2$.

Remarquons que nous pouvons déterminer la quantité a qui n'a pas encore été fixée de manière que ε soit nul sur le contour intérieur. Supposons donc que $\varepsilon = 0$ soit l'équation de ce contour; comme il est encastré, on a

$$X_0 + Y_0 = 0, \quad X_1 + Y_1 = 0,$$

ou

$$Y_0 = -X_0, \quad Y_1 = -X_1.$$

Il reste à satisfaire aux équations

$$V + U = 0, \quad \frac{dV}{d\varepsilon} + \frac{dU}{d\varepsilon} = 0,$$

sur le contour extérieur qui a pour équation $\varepsilon = b$, b étant une constante.

Supposons par exemple que c soit assez petit pour qu'on puisse négliger les termes en c^6; on voit aisément que les deux équations précédentes sont de la forme

$$\begin{gathered}
L \cos g\alpha + M\cos(g+2)\alpha + M'\cos(g-2)\alpha \\
+ N\cos(g+4)\alpha + N'\cos(g-4)\alpha = 0, \\
\frac{dL}{d\varepsilon}\cos g\alpha + \frac{dM}{d\varepsilon}\cos(g+2)\alpha + \ldots + \frac{dN'}{d\varepsilon}\cos(g-4)\alpha = 0;
\end{gathered}$$

elles ont lieu pour $\varepsilon = b$ et produisent les dix suivantes :

$$\begin{gathered}
L = 0, \quad M = 0, \ldots, \\
\frac{dL}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{dM}{d\varepsilon} = 0, \ldots;
\end{gathered}$$

elles sont du premier degré par rapport à $c, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$, et elles serviront à les déterminer ainsi que l.

On obtiendrait une solution simple d'un autre genre en prenant pour X_0 et X_1 des séries de sinus.

Toutes les considérations qui précèdent sont parfaitement rigoureuses; mais comme la physique mathématique doit se proposer de rendre compte des faits de l'expérience, nous allons chercher à les expliquer par des considérations qui n'ont pas la même rigueur, et que, pour cette raison, nous avons le plus grand soin de séparer des premières.

Les plaques que les physiciens font vibrer ordinairement ont leurs bords libres, et nous avons vu qu'on ne peut adopter pour les conditions sur les bords les trois équations données par Poisson et Cauchy; nous allons donc essayer de les déterminer d'après les résultats de l'expérience.

Si l'on fait vibrer une plaque circulaire, on obtient pour lignes nodales des cercles concentriques et des diamètres qui les divisent en parties égales.

Considérons ensuite une plaque elliptique. Savart, dans son Mémoire sur les plaques vibrantes, inséré dans les *Annales de Chimie et de Physique* (t. LXXIII, 1840), donne six figures qui représentent les lignes nodales d'une plaque elliptique, et il dit à l'occasion de ces lignes : « Dans les figures qui viennent avec une grande pureté, les lignes nodales, quel qu'en soit le nombre, sont des ellipses et des hyperboles d'une régularité qu'on pourrait appeler géométrique, et, ce qui est extrêmement remarquable, non-seulement toutes les ellipses nodales ont les mêmes foyers que l'ellipse du contour de la plaque, mais les hyperboles ont leurs foyers aux mêmes points. »

Ces résultats prouvent évidemment que la formule du mouvement vibratoire ne peut être qu'une solution simple, et que les conditions aux limites sont renfermées dans un des quatre cas examinés au n° 2.

Il semble, d'après cela, que l'on doive s'arrêter aux conditions 2° :

$$(a)\qquad \Delta u = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0;$$

car si l'on suppose que le mouvement ne varie pas avec y, il en résulte pour les conditions aux extrémités libres d'une lame

$$(b)\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0,$$

et ce sont en effet celles que l'on adopte.

Or, si u satisfait aux conditions (a) sur les bords, on posera $u = \mathrm{U} + \mathrm{V}$, et si la plaque est elliptique, U et V se développeront comme au n° 5. Si l'on a bien la solution voulue, comme on doit avoir pour lignes nodales des hyperboles homofocales avec l'ellipse du contour, u devra être divisible par une fonction de α; mais on trouve que cela est impossible.

Contentons-nous d'indiquer comment on peut constater cette impossibilité, qu'il suffit de reconnaître dans un cas particulier. Supposons $g = 3$; on aura pour solution

$$u = \mathrm{P}_0 + \Pi_0 + (\mathrm{P}_1 + \Pi_1)\beta^2 + (\mathrm{P}_2 + \Pi_2)\beta^4 + \ldots,$$

où l'on fera, si l'on néglige h^4,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0 &= \mathrm{A}\cos 3\alpha + h^2(a\cos 5\alpha + b\cos\alpha), \\ \Pi_0 &= \mathrm{A}'\cos 3\alpha - h^2(a'\cos 5\alpha + b'\cos\alpha); \end{aligned}$$

on en déduira $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \Pi_1, \Pi_2$ d'après ce que nous avons vu au n° 5; enfin ces quatre fonctions étant calculées, on prouvera qu'on ne peut pas déterminer les coefficients $a, b, \mathrm{A}', a', b'$ si P_0 et Π_0 sont différents de zéro, de manière que les trois fonctions de α

$$\mathrm{P}_0 + \Pi_0, \quad \mathrm{P}_1 + \Pi_1 \quad \mathrm{P}_2 + \Pi_2$$

aient un même diviseur commun; donc à plus forte raison u n'est pas divisible par une fonction de α.

Quel que soit le contour de la plaque, on ne peut donc adopter les conditions (a) sur les bords. Des trois cas restants du n° 2, il n'y a évidemment de possible que le quatrième, pour lequel on a sur le contour

$$\frac{du}{dn} = 0, \quad \frac{d\Delta u}{dn} = 0.$$

Alors, si le contour est une ellipse, la valeur de u sera de la forme $u = f(\alpha)\mathrm{F}(\beta)$, comme celle que nous avons trouvée pour la membrane elliptique, et les lignes nodales sont des ellipses et des hyperboles homofocales; de plus le contour est un ventre de vibration : ce qui est assez conforme à l'expérience. Avec ces conditions aux limites, la théorie de la plaque elliptique à bords libres se déduit immédiatement de celle que nous avons donnée pour la membrane de même forme dans le tome précédent de ce journal.

Les équations (b) ne pourraient donc plus être admises pour les bords de la lame, et il faudrait y substituer les équations

$$(c) \qquad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0.$$

D'après un Mémoire de M. Lissajous (*Annales de Chimie et de Physique*, 1850), les conditions (b) pour les bords s'accorderaient assez bien avec les expériences; mais il faudrait voir si les formules (c) ne seraient pas autant d'accord, car, si l'on excepte les deux nœuds les plus proches de chaque extrémité, il a trouvé dans ses expériences que la distance entre deux nœuds consécutifs est la même sur toute la longueur de la lame. Ce physicien n'a pas non plus considéré d'états vibratoires donnant moins de cinq nœuds, et ceux où il y en a moins ne seraient pas moins utiles à examiner pour décider cette question.