JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__1_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge;

Par M. J. LIOUVILLE.

« ... Voici un théorème, que vous trouverez peut-être intéressant, concernant la fonction

$$F(k),$$

définie à l'ordinaire comme exprimant le nombre des classes de formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

» Soit m un nombre impair quelconque donné. Décomposons-le autant de fois qu'il nous sera possible en une somme de deux carrés, en sorte que l'on ait, en nombre entiers,

$$m = a^2 + 4b^2,$$

a étant impair et positif, tandis que b peut être pair ou impair, positif ou négatif, ou encore égal à zéro; puis cherchons la somme

$$\sum (a^2 - 4b^2) \tag{1}$$

pour l'ensemble de toutes les décompositions. Il faudra, bien entendu, supposer cette somme nulle, s'il n'existe aucune décomposition de m de l'espèce indiquée.

» D'autre part, considérons cette autre somme

$$(2) \qquad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2),$$

dans le terme général de laquelle i désigne successivement les entiers impairs

$$1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots,\ \omega,$$

dont le dernier ω est tel qu'au delà on cesserait d'avoir

$$4m - i^2 > 0;$$

ω est donc le plus grand entier impair inférieur à $2\sqrt{m}$.

» Cela posé, notre théorème consiste en ce que les sommes (1) et (2) sont égales entre elles. En d'autres termes, on obtient toujours, sous les conditions énoncées,

$$(\mathrm{A}) \qquad \sum (-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = \sum (a^2 - 4b^2),$$

équation qui pourrait encore s'écrire

$$\sum \left(\frac{-1}{i}\right) iF(4m - i^2) = \sum (a^2 - 4b^2),$$

en employant une notation de Legendre, généralisée par Jacobi, au moyen de laquelle on a

$$\left(\frac{-1}{i}\right) = (-1)^{\frac{i-1}{2}}.$$

» Quand l'équation

$$m = a^2 + 4b^2$$

est impossible en nombres entiers, il faudra supposer, comme on l'a dit,

$$\sum(a^2 - 4b^2) = 0;$$

on aura donc alors, plus simplement,

$$(\text{B}) \qquad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\sum\left(\frac{-1}{i}\right) iF(4m - i^2) = 0.$$

Il en sera ainsi, par exemple, toutes les fois que l'entier donné m se trouvera $\equiv 3 \pmod{4}$, et dans d'autres cas encore; mais la formule

$$(\text{A}) \qquad \sum(-1)^{\frac{i-1}{2}} iF(4m - i^2) = \sum(a^2 - 4b^2)$$

est la seule formule générale; elle ne comporte aucune exception.

» Ajoutons ici quelques applications numériques, en rappelant d'abord que, d'après la table construite pour la fonction

$$F(k)$$

par un procédé direct, indépendant de notre formule (A), on a :

$$F(3) = 1,\quad F(11) = 3,\quad F(19) = 3,\quad F(27) = 4,\quad F(35) = 6,\quad F(43) = 3.$$

» Soit d'abord $m = 1$. Comme on a

$$1 = 1^2 + 4 . 0^2,$$

l'équation (A) donnera

$$F(3) = 1,$$

ce qui est exact.

» Soit ensuite

$$m = 3.$$

Il n'y aura alors aucune décomposition possible de m en une somme de deux carrés, et la formule (B) propre à ce cas donnera

$$F(11) - 3F(1) = 0,$$

partant

$$F(11) = 3,$$

ce qui est exact.

» Prenons à présent $m = 5$. Comme on a

$$5 = 1^2 + 4(\pm 1)^2,$$

il nous viendra ici

$$\sum (a^2 - 4b^2) = 2(1 - 4) = -6.$$

L'équation (A) exige donc que

$$F(19) - 3F(11) = -6,$$

c'est-à-dire que

$$F(19) = 3;$$

et cela est effectivement vrai.

» Soit maintenant $m = 7$. L'équation

$$7 = a^2 + 4b^2$$

étant impossible, nous devons avoir, d'après la formule (B), à laquelle la formule (A) se réduit alors :

$$F(27) - 3F(19) + 5F(3) = 0,$$

d'où

$$F(27) = 3.3 - 5.1 = 4,$$

ce qui est exact.

» Soit encore $m = 9$. On aura cette fois

$$9 = 3^2 + 4 . 0^2,$$

et il n'y a pas d'autre manière d'écrire

$$9 = a^2 + 4b^2,$$

conformément à ce qui a été convenu plus haut. Ici donc, on a

$$\sum (a^2 - 4b^2) = 9.$$

La formule (A) exige donc que

$$F(35) - 3F(27) + 5F(11) = 9;$$

partant, d'après les valeurs déjà vérifiées de

$$F(11)$$

et de

$$F(27),$$

il nous viendra, comme il le faut,

$$F(35) = 6.$$

» Pour dernier exemple, faisons

$$m = 11.$$

L'équation

$$11 = a^2 + 4b^2$$

étant impossible, la formule (A) se réduira à la formule (B) et nous donnera

$$F(43) - 3F(35) + 5F(19) = 0;$$

d'où

$$F(43) = 3,$$

valeur exacte, comme toujours.

» Vous penserez peut-être que j'insiste un peu trop longuement sur des vérifications numériques faciles; mais l'importance que j'attache et que vous attacherez aussi, je l'espère, à la formule générale (A) me servira d'excuse. »