JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Mémoire sur les lignes spiriques (suite)

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 14 (1869), p. 103-138.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1869_2_14__103_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

MÉMOIRE SUR LES LIGNES SPIRIQUES

(SUITE);

PAR M. DE LA GOURNERIE.

CHAPITRE II.

FOYERS.

Nombre des foyers. — Foyers multiples.

99. Nous avons vu que la spirique était de la huitième classe. Quatre des huit tangentes qu'on peut lui mener d'un point circulaire à l'infini, sont représentées par deux asymptotes, et, par suite, elle possède quatre foyers quadruples, seize doubles et seize simples. Les foyers réels sont au nombre de six, deux quadruples et quatre simples. J'appellerai les premiers *foyers singuliers* (n° **48**), et les autres *foyers ordinaires*.

La détermination des foyers singuliers ne présente aucune difficulté. On trouve que ces points coïncident avec les foyers communs aux trois coniques déférentes. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème établi au n° **48**.

Considérations générales sur les foyers simples.

100. Les quatre intersections d'une conique déférente avec le cercle d'inversion qui lui correspond sont des foyers ordinaires (n° **47**). Nous trouvons ainsi immédiatement douze foyers répartis en trois groupes. Quatre des intersections réciproques des tangentes qu'on peut mener à la spirique des points circulaires sont d'ailleurs sur son axe; elles complètent le nombre des seize foyers simples.

Il est nécessaire de déterminer les foyers simples pour connaître les situations relatives des déférentes et des cercles d'inversion, et voir quelle est la forme de la spirique.

101. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les abscisses des foyers sur l'axe. Les droites dirigées de ces points aux points circulaires à l'infini se coupent aux autres foyers. Les coordonnées des foyers de l'un des groupes sont, par conséquent,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_1+u_2}{2}, \\ y &= \pm\frac{u_1-u_2}{2}\sqrt{-1}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_3+u_4}{2}, \\ y &= \pm\frac{u_3-u_4}{2}\sqrt{-1}. \end{aligned}\right.$$

Si u_1 et u_2 sont des longueurs imaginaires conjuguées, les foyers qui ont pour coordonnées

$$\frac{u_1-u_2}{2}, \quad \pm\frac{u_1-u_2}{2}\sqrt{-1}$$

seront réels. D'où il suit que *les foyers réels hors de l'axe sont les points figuratifs des foyers imaginaires sur l'axe* (n° **15**, 3°). L'étude des foyers sur l'axe nous fera donc connaître toutes dispositions que peuvent prendre les foyers réels de la spirique.

102. Les quatre foyers déterminés par l'équation (1) sont sur un cercle d'inversion; mais, d'après les propositions démontrées aux n^{os} **21-24**, les points figuratifs de quatre points imaginaires en ligne droite sont sur le cercle qui a pour diamètre les points doubles de l'involution quadratique déterminée par les deux couples de points conjugués imaginaires. Les sommets et les foyers sur l'axe ont donc les mêmes centres d'inversion.

Cette proposition est une conséquence du théorème du n° **47**, mais comme elle a beaucoup d'importance, je l'établirai plus loin directement.

Foyers sur l'axe.

103. Je vais maintenant me proposer de déterminer les foyers que la spirique possède sur son axe. Considérons la courbe représentée par l'équation

$$(2)\qquad (x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) + qx^2 + ry^2 + sx + t = 0.$$

Si u est l'abscisse d'un foyer sur l'axe, les deux droites

$$x - u \pm y\sqrt{-1} = 0$$

seront tangentes à la courbe, et, par suite, l'équation (2) pourra être mise sous la forme

$$(3) \qquad [(x-u)^2 + y^2](x^2 + y^2 + \alpha x + \beta) + (\gamma x + \delta)^2 = 0.$$

Égalant les coefficients des termes semblables dans les équations (2) et (3) développées, j'obtiens

$$\begin{gathered} 2u - \alpha = 4p, \quad u^2 - 2\alpha u + \beta + \gamma^2 = q, \\ u^2 + \beta = r, \quad \alpha u^2 - 2\beta u + 2\gamma\delta = s, \\ \beta u^2 + \delta^2 = t. \end{gathered}$$

L'élimination de α, β, γ et δ entre ces cinq équations donnera la valeur de u.

Faisant d'abord disparaître α et β, on trouve

$$\begin{gathered} \gamma^2 = 4u^2 - 8pu + q - r, \quad \gamma\delta = -2u^3 + 2pu^2 + ru + \frac{s}{2}, \\ \delta^2 = u^4 - ru^2 + t. \end{gathered}$$

Il est très-facile d'éliminer γ et δ. On a, après quelques réductions,

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(q - r - 4p^2)u^4 + 2(s + 2pr)u^3 \\ &+ (4t - 2ps - qr)u^2 - (sr + 8pt)u + (q - r)t - \frac{s^2}{4} = 0. \end{aligned} \right.$$

Nous trouvons pour u quatre valeurs, comme cela devait être.

104. D'après cette équation, le centre des moyennes distances des foyers a une abscisse égale à la valeur trouvée pour e au n° **65**. Il résulte de là que *le point équatorial est le centre des moyennes distances des foyers sur l'axe.*

Quand le point équatorial s'éloigne à l'infini, un des foyers disparaît avec lui. On voit ainsi que la cartésienne n'a sur son axe que trois foyers à distance finie.

105. Il nous sera utile d'avoir l'équation aux foyers en fonction des coefficients de l'équation aux sommets, et de l'abscisse du point équatorial.

L'équation (5) du n° **65** donne

$$(5)\qquad r = \frac{2(q-4p^2)e+s}{2(e-p)}.$$

En portant cette valeur dans (4), on trouve, après quelques réductions,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big[(8p^3-2pq-s)u^4+(4p^2s-8pt-qs)u^2+(16p^2t-s^2)u \\ &\qquad\qquad +\left(\frac{ps^2}{2}-st-2pqt\right)\Big] \\ &-4e\Big[(8p^3-2pq-s)u^3+\left(ps-2p^2q-2t+\frac{q^2}{2}\right)u^2 \\ &\qquad\qquad +\left(4pt-2p^2s+\frac{qs}{2}\right)u+\left(\frac{s^2}{8}-2p^2t\right)\Big]=0. \end{aligned}\right.$$

Si la spirique se déforme de manière que ses sommets soient fixes et le point équatorial mobile, les foyers sur l'axe formeront une involution.

106. Quand e est infini, les valeurs de u sont égales à celles de λ données par l'équation (6) du n° **3**, et, par suite, les centres d'inversion des foyers sont également les centres d'inversion des sommets.

Si l'on suppose e égal à p, l'équation (6) se réduit à

$$u^4-4pu^3+qu^2+su+t=0,$$

et, par suite, les foyers coïncident avec les sommets. Nous trouvons ainsi d'une nouvelle manière le théorème établi au n° **102**. On peut l'énoncer comme il suit :

Les quatre sommets et les quatre foyers que la spirique possède sur son axe forment deux groupes d'une involution spéciale du quatrième ordre, dont les centres d'inversion sont aux points où les axes des tores qui passent par la spirique rencontrent son axe de symétrie.

Il résulte de là qu'*un groupe de foyers hors de l'axe jouit des pro-*

priétés d'un groupe de points figuratifs d'une involution spéciale complète (nos **21-24**).

107. Deux cercles quelconques forment une spirique dans laquelle la ligne des centres est l'axe de symétrie (n° **66**). L'intersection de la sécante commune des cercles avec la ligne de leurs centres est le point équatorial de la spirique, et aussi le point central O′ de l'involution quadratique déterminée par les deux couples de points a_1 et a_2, a_3 et a_4 où les cercles rencontrent l'axe. Les foyers ordinaires se confondent deux à deux aux points doubles e' et f' de l'involution composante dont O′ est le centre. Les foyers singuliers réels sont les centres des cercles qui forment la spirique, c'est-à-dire les milieux des segments $a_1\,a_2$ et $a_3\,a_4$.

Deux des déférentes sont les coniques qui ont leurs foyers en ces points milieux a_{12} et a_{34}, et qui passent par les points d'intersection des deux cercles. La troisième déférente se réduit aux points a_{12} et a_{34} (n° **52**).

Les cercles d'inversion qui correspondent aux deux premières déférentes touchent ces courbes aux points d'intersection des deux cercles.

Si l'on suppose les sommets fixes et le point équatorial mobile, on a un faisceau de spiriques qui comprend trois systèmes de deux cercles. Dans chacun d'eux le point équatorial coïncide avec un centre d'inversion.

108. Il est facile d'avoir l'équation d'une spirique quand on connaît les positions des centres d'inversion, du centre G des moyennes distances, et du point équatorial.

L'origine étant un point quelconque de l'axe, j'appelle e et p les abscisses du point équatorial et du centre G, et je regarde comme connus les coefficients de l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{7}$$

dont les racines sont les abscisses des centres d'inversion.

Les abscisses des sommets sont données par l'équation (8) du n° **4**, qui, ordonnée par rapport à x, devient

$$x^4 - 4px^3 - 2\frac{2bp+c}{a}x^2 - 4\frac{cp+2d}{a}x - \frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2} = 0.$$

On a donc

$$q = -2\frac{2bp+c}{a}, \quad s = -4\frac{cp+2d}{a}, \quad t = -\frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2}.$$

J'obtiens r en portant ces valeurs dans l'expression (5) du n° **65** :

$$r = 2\frac{2aep^2+(2be+c)p+(ce+2d)}{a(p-e)}.$$

L'équation cherchée est, par conséquent,

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2)^2 - 4px(x^2+y^2) - 2\frac{2bp+c}{a}x^2\\ &\quad + 2\frac{2aep^2+(2be+c)p+(ce+2d)}{a(p-e)}y^2\\ &\qquad - 4\frac{cp+2d}{a}x - \frac{4adp-(c^2-4bd)}{a^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Spiriques homofocales [*].

109. Si l'on donne les quatre foyers sur l'axe, ou, plus généralement, quatre foyers situés sur un même cercle, l'équatoriale et les cercles d'inversion seront déterminés, mais les sommets pourront être placés sur l'un quelconque des groupes de l'involution spéciale à laquelle les foyers appartiennent directement ou comme points figuratifs. Nous aurons ainsi un système de spiriques homofocales, c'est-à-dire possédant les mêmes foyers ordinaires.

Pour que l'équation (8) représente un système de spiriques homo-

[*] Plusieurs des résultats contenus dans ce paragraphe ont déjà été établis pour les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, mais je présente la théorie des spiriques homofocales en la rattachant aux propriétés de l'involution spéciale, ce qui est utile pour que les propositions puissent plus tard servir facilement dans la discussion générale.

focales, il suffit d'y considérer p comme variable. Ce paramètre s'élève à la seconde puissance lorsqu'on fait disparaître les dénominateurs, et, par suite, *il passe par tout point du plan deux spiriques homofocales à une spirique donnée.*

110. Nous avons vu au n° **93** que quand les points E et G coïncident, l'équation de la spirique donne deux fois l'axe de symétrie et deux fois la droite de l'infini. On peut le reconnaître à l'aide de l'équation (8) en y supposant p égal à e. Ce système de droites satisfait à la définition de la spirique, mais par lui-même il n'est pas de la même classe que cette courbe.

p et e étant égaux, les foyers coïncident avec les sommets. Les droites perpendiculaires à l'axe menées par les sommets d'une spirique lui sont tangentes. Il y a donc, dans le cas qui nous occupe, deux tangentes distinctes à chaque sommet, d'abord l'axe qui est la spirique elle-même, puis sa perpendiculaire. Il résulte de là que toute droite passant à un sommet est une tangente. En résumé, la courbe se transforme en un système du genre de ceux que M. Chasles a appelés *êtres géométriques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 avril 1867). Elle est représentée par deux fois la ligne de l'infini, deux fois l'axe de symétrie et quatre points situés sur cet axe. Ces points sont à la fois foyers et sommets; on doit regarder comme tangentes toutes les droites qui y passent.

Cette transformation est analogue à celle qui a lieu pour les coniques quand leurs foyers réels coïncident respectivement avec deux sommets. Le contact avec la courbe du cercle de rayon nul qui a son centre au foyer cesse alors d'être idéal.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir ont déjà été obtenus au n° **87** par des considérations différentes.

111. Quand le centre G des moyennes distances est à l'infini, l'équation (8) devient

$$ax(x^2+y^2)+bx^2-eay^2+cx+d=0. \tag{9}$$

La spirique se décompose en une cubique circulaire et la droite de l'infini.

Tout système de spiriques homofocales contient une cubique circulaire. L'asymptote réelle de cette courbe est l'équatoriale commune des spiriques.

Je consacrerai un Chapitre à l'étude de la cubique circulaire douée d'un axe.

112. Je vais maintenant supposer que le centre des moyennes distances coïncide avec le centre d'inversion O'. Je prends ce point pour origine, alors p et d sont nuls, et l'équation (8) devient

$$(10) \qquad (x^2+y^2)^2 - 2\frac{c}{a}x^2 - 2\frac{c}{a}y^2 + \frac{c^2}{a^2} = 0.$$

Elle représente deux fois un cercle qui a son centre en O' et qui est nécessairement le cercle $e'f'$, car le point G étant en O', les sommets doivent être réunis deux à deux aux points e' et f'.

Les trois cercles d'inversion d'un système de spiriques homofocales font partie de ce système.

J'aurais à présenter ici des observations analogues à celles du n° **110**; je me borne à dire que la spirique n'est pas remplacée par un cercle double, mais par un être géométrique composé de deux arcs doubles limités aux foyers. M. Crofton a déjà signalé cette circonstance à la Société Mathématique de Londres dans sa séance du 23 mai 1867.

Si deux des foyers situés sur le cercle étaient imaginaires, la spirique serait représentée par un seul arc double réel limité aux deux autres foyers.

113. Il est bien connu que, dans un système de courbes homofocales du quatrième ordre ayant deux points à l'infini sur un cercle, les rencontres se font à angle droit [*]. Je vais donner, de ce théorème, une démonstration purement géométrique. Je ne considérerai que des spiriques.

Soient un cercle C et sur ce cercle quatre foyers communs à un

[*] *Voir* l'article déjà cité de M. Bertrand.

système de spiriques. Je prends sur le plan un point quelconque M, et je détermine le point M′ qui est son réciproque par rapport au cercle C. J'appelle V l'axe radical commun au cercle C et aux cercles de rayon nul qui ont respectivement leurs centres en M et en M′.

On obtient le système général des spiriques qui ont pour foyers les quatre points donnés sur le cercle, en prenant pour déférentes les coniques qui passent par ces points; deux d'entre elles touchent V en des points E et F. Les cercles qui ont pour centre E et F, et qui sont orthogonaux à C, touchent en M et en M′ chacun une spirique du système (nº **40**). Il faut prouver que ces cercles sont à angle droit.

Les coniques coupent V en des couples de points qui forment une involution dont E et F sont les points doubles; ces points sont donc conjugués par rapport au cercle C qui est une des coniques. Si de E comme centre, on décrit un cercle orthogonal à C, la sécante commune à ce cercle et à C passera par F, et ce point sera le centre d'un troisième cercle qui coupera ceux-ci à angles droits. Le théorème est donc démontré.

Propriétés vectoriales des foyers.

114. M. Salmon a établi (*Higher plane curves*) que, dans les lignes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, il existe une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe à trois des quatre foyers situés sur un même cercle. Il importe, par suite, de savoir dans quel cas les foyers réels d'une spirique appartiennent à un seul cercle.

Si les sommets sur l'axe sont tous réels ou tous imaginaires, les trois centres d'inversion sont réels et les quatre foyers réels se trouvent sur l'axe ou sur un même cercle (nº **15**).

Quand deux des sommets sur l'axe sont imaginaires, deux centres d'inversion sont également imaginaires. Deux des foyers réels sont alors sur l'axe; les autres se trouvent sur le seul cercle d'inversion qui soit réel (nº **16**).

Lorsque deux sommets sur l'axe coïncident en un point O_2, deux des centres d'inversion sont en O_2, et le troisième est nécessairement un point réel O'''. Deux foyers réels sont en O_2; les deux autres se trouvent sur le cercle d'inversion dont le centre est O'' ou sur l'axe, suivant que le point équatorial est ou n'est pas sur le segment $O_2 O'''$ (n° **17**).

Quand la spirique a un rebroussement, le point de rebroussement représente trois foyers; le quatrième foyer est sur l'axe. Dans ce cas les propriétés vectoriales disparaissent.

115. La cartésienne a son point équatorial et un de ses foyers à l'infini; ses autres foyers sur l'axe coïncident avec les centres d'inversion. Si la courbe n'a sur l'axe que deux sommets réels, deux centres d'inversion seront imaginaires et leurs points figuratifs seront des foyers réels. Les propriétés vectoriales par lesquelles on a coutume de définir l'ovale de Descartes n'existent plus dans ce cas, ou du moins on ne les retrouve qu'en considérant des points et des coefficients imaginaires.

Transformation d'une spirique.

116. Si l'on fait éprouver à une spirique une transformation par rayons vecteurs réciproques, on aura une ligne du quatrième ordre ayant deux points doubles à l'infini sur un cercle. Les foyers ordinaires des deux courbes se correspondront, car ce sont les centres de cercles de rayon nul et bitangents.

Lorsque le pôle coïncide avec un foyer ordinaire, la transformée est une nouvelle spirique ayant un foyer à l'infini, c'est-à-dire un ovale de Descartes. Ce résultat a été signalé par M. Mannheim (*Journal de l'École Polytechnique*, XL^e cahier, p. 74), et par M. Darboux (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1864, p. 162).

Quand le pôle de transformation est à un sommet, on a une cubique circulaire douée d'un axe; s'il se trouve à l'intersection de deux cercles d'inversion, on obtient une spirique à centre.

CHAPITRE III.

ESSAI D'UNE CLASSIFICATION DES SPIRIQUES.

Observations générales.

117. Les théorèmes que j'ai établis dans les Chapitres précédents permettent de discuter les formes et les propriétés spéciales des spiriques. Je me bornerai à énoncer les résultats pour les différents genres; je réserverai d'ailleurs pour des Chapitres spéciaux trois variétés sur lesquelles je devrai présenter quelques considérations spéciales : ce sont, la cubique circulaire douée d'un axe, la spirique à point double et la spirique à centre. J'ai déjà dit (n° **98**) que les formules précédemment obtenues ne conviennent pas toutes à la spirique qui a un centre; il faut aussi prendre quelques précautions quand on veut les appliquer aux deux autres variétés que je viens d'indiquer.

Les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe étant toujours réelles quand les tores d'un couple sont réels (n° **95**), je ne m'occuperai d'elles que dans le cas où tous les tores seraient imaginaires.

La forme d'une spirique est facilement déterminée quand on connaît le genre de l'une des coniques déférentes, et sa position par rapport au cercle d'inversion. Il est essentiel de savoir en combien de points la conique rencontre le cercle; ces points sont des foyers ordinaires de la spirique, et nous avons vu dans le Chapitre précédent qu'il est très-aisé de les obtenir lorsque les centres d'inversion et le point équatorial sont donnés.

§ I. — *Les quatre sommets sur l'axe sont réels et distincts.*

118. Les trois centres d'inversion sont réels, distincts et situés d'un même côté du centre G des moyennes distances. Les prenant dans l'ordre où ils sont rangés à partir de ce centre, je les appelle O′, O″, O‴. Le cercle d'inversion O″ est imaginaire (n° **15**).

Suivant que le point équatorial est en dehors du segment GO″ ou sur ce segment, on a deux ovales dont un contient l'autre, ou deux ovales extérieurs l'un à l'autre. Il y a ainsi lieu de distinguer deux genres différents. Lorsque le point équatorial est en O'' ou en G, on a deux formes de transition, qui doivent être considérées comme des espèces distinctes.

Premier genre. — Deux ovales dont un contient l'autre.

119. Indépendamment des sommets réels sur l'axe, chaque ovale en possède deux sur le cercle O'''. Tous les autres sommets sont imaginaires.

On est conduit à reconnaître cinq espèces, suivant la position du point équatorial.

Première espèce. — Le point équatorial est du côté du centre G opposé à celui où sont les centres d'inversion.

Les six tores sont réels; les foyers singuliers se trouvent en dehors de l'axe de symétrie. Les foyers ordinaires sont sur l'axe.

Les coniques déférentes sont des ellipses. Le cercle d'inversion O' est dans l'intérieur de la conique Γ'; le cercle O''' se trouve à l'extérieur de Γ'''.

Deuxième espèce. — Quand le point équatorial est à l'infini, la courbe est une cartésienne.

Troisième espèce. — Le point équatorial est au delà du centre O'''.

Les six tores sont imaginaires, et les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe réelles.

Les déférentes sont des ellipses dont les foyers se trouvent sur l'axe de symétrie, et qui ont, par rapport aux cercles d'inversion, les mêmes positions relatives que dans la première espèce.

Les foyers ordinaires sont sur l'axe.

Quatrième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre O'''.

La spirique est remplacée par le système de deux cercles dont un contient l'autre (n° **108**).

Cinquième espèce. — Le point équatorial est entre O'' et O'''.

Les tores sont imaginaires.

Les coniques déférentes ont leurs foyers sur l'axe de symétrie. La première Γ' est une ellipse qui contient le cercle O'; la seconde Γ''' est également une ellipse. Pour la troisième Γ''', on trouve une hyperbole dont une branche rencontre en quatre points le cercle O'''.

Les quatre foyers ordinaires sont sur ce cercle.

120. *Constructions pour distinguer les cinq espèces.* — Une spirique composée de deux ovales dont un contient l'autre étant tracée, et l'axe de symétrie étant connu, on déterminera sans difficulté les points O', O'', O''', G, et les sommets que la déférente Γ' possède sur l'axe de symétrie.

Une perpendiculaire à cet axe menée par O' rencontrera la spirique en quatre points réels, et on verra immédiatement comment ils doivent être réunis en couples par rapport au cercle d'inversion O'. Employant alors la construction exposée à la fin du n° **40**, on obtiendra les droites parallèles à l'axe de symétrie qui touchent la déférente Γ' : elles font connaître les quatre sommets de cette ellipse. On déterminera ensuite la position du point équatorial par un tracé facile déduit de la formule (20) du n° **85**.

On peut appuyer la construction sur le point O'', car la perpendiculaire à l'axe élevée par ce centre rencontrera toujours la courbe en quatre points réels.

Le point équatorial étant connu, on saura à quelle espèce appartient la courbe.

Deuxième genre. — Deux ovales extérieurs l'un à l'autre et traversés par l'axe de symétrie.

121. Les six tores sont imaginaires. Les foyers singuliers de la spirique sont sur l'axe de symétrie.

Chaque ovale possède quatre sommets, deux sur l'axe et deux sur le cercle O'.

Première espèce. — Le point équatorial est entre O' et O''.

Les deux tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont réelles.

La première déférente est une ellipse qui coupe le cercle O' en quatre points; les deux autres sont des hyperboles. La troisième Γ''' contient le cercle d'inversion O''' dans la concavité d'une de ses branches.

Deuxième espèce. — Lorsque le point équatorial est en O′, la spirique est formée de deux cercles extérieurs l'un à l'autre.

Troisième espèce. — Le point équatorial est entre G et O′.

Les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe sont imaginaires. Les foyers ordinaires se trouvent sur l'axe.

Les trois déférentes sont des hyperboles. La première est telle, que le cercle d'inversion O′ se trouve entre ses deux branches. Les deux autres Γ'' et Γ''' sont disposées comme pour la première espèce.

122. *Constructions pour distinguer les trois espèces.* — On déterminera comme au nº **120** les points O′, G et les sommets que Γ' possède sur l'axe de symétrie, puis on construira une des tangentes de cette conique (nº **40**). Suivant que cette tangente passera en dehors des sommets de Γ', à l'un d'eux, ou entre eux, la déférente Γ' sera une ellipse, deux points ou une hyperbole, et la spirique appartiendra à la première, à la seconde ou à la troisième espèce.

Transitions du premier genre au second genre.

123. *Première espèce.* — Le point équatorial est en O″.

La courbe se décompose en deux cercles qui se coupent aux mêmes points réels ε'' et φ'' que les cercles O′ et O‴ (nº **15**), et qui sont orthogonaux au cercle imaginaire O″.

Deuxième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre G.

La courbe est remplacée par un être géométrique formé d'une droite double et de quatre points situés sur elle (nºs **93** et **110**).

§ II. — *Les quatre sommets sur l'axe sont imaginaires.*

124. Les trois centres d'inversion sont réels et distincts. L'un d'eux O′ est d'un côté du centre G des moyennes distances; les deux autres O″ et O‴ de l'autre côté.

Suivant que le point équatorial est sur le segment GO″ ou en dehors de ce segment, la spirique se compose de deux ovales ou est imaginaire.

Premier genre. — Deux ovales situés de part et d'autre de l'axe de symétrie.

125. Le point équatorial est sur le segment GO″.

Les deux tores dont les axes se croisent en O′ sont réels; les quatre autres imaginaires.

Les foyers singuliers se trouvent hors de l'axe de symétrie. La déférente Γ′ est une ellipse qui coupe le cercle O′ en quatre points. Les deux autres déférentes sont des hyperboles : Γ‴ ne rencontre pas le cercle O‴.

Chaque ovale a quatre sommets, deux sur le cercle O′ et deux sur le cercle O‴.

Second genre. — Spirique imaginaire.

126. On est conduit à distinguer *sept espèces* suivant la position du point équatorial par rapport aux centres d'inversion et au point G. Il serait peu intéressant de reproduire en détail tout ce qui concerne ces espèces.

Les tores dont les axes passent par les points O″ et O‴ sont imaginaires; mais ceux qui correspondent au centre O′ sont réels quand le point équatorial est au delà de O‴. On les trouve réduits à des cercles quand ce point est en O‴ (nº **91**).

La déférente Γ″ est toujours imaginaire. Chacun des deux autres est une ellipse située dans l'intérieur du cercle d'inversion, ou une ellipse imaginaire, ou une hyperbole dont chaque branche rencontre le cercle d'inversion.

Transitions entre les deux genres.

127. *Première espèce.* — Le point équatorial est en G. La courbe est remplacée par un être géométrique.

Seconde espèce. — Le point équatorial est en O″. La partie réelle de la courbe ne se compose que de deux points. Les tores du second couple sont réels, mais réduits à des cercles.

Les foyers singuliers sont hors de l'axe.

§ III. — *Deux des quatre sommets sur l'axe sont réels et les deux autres imaginaires.*

128. La courbe a sur son axe un centre d'inversion réel O′, et deux sommets réels situés d'un même côté de ce point. Les centres d'inversion O″ et O‴ sont imaginaires, ainsi que les déférentes et les tores qui leur correspondent. Les deux autres tores sont réels quand les points E et G sont de côtés différents du centre O′.

Deux foyers ordinaires réels se trouvent sur l'axe; les deux autres sont les intersections réelles de la déférente Γ′ avec le cercle O′. Ces foyers ne jouissent pas des propriétés vectoriales.

La discussion détaillée montre qu'il y a six espèces suivant la position du point équatorial.

CHAPITRE IV.

CUBIQUE CIRCULAIRE DOUÉE D'UN AXE.

Considérations générales.

129. Toute cubique circulaire douée d'un axe peut être représentée par l'équation (9) du n° **111**, et, par suite, doit être considérée comme une spirique dont le centre des moyennes distances est à l'infini. Les centres d'inversion sont les trois points où l'axe rencontre la cubique. Je supposerai que ces points sont distincts; les variétés des spiriques à point double seront examinées dans le Chapitre V.

En faisant le coefficient a égal à l'unité, les équations (7) et (8) du n° **108** deviennent

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$
$$x(x^2 + y^2) + bx^2 - ey^2 + cx + d = 0;$$

e est l'abscisse du point équatorial mesurée à partir du point qui a été pris arbitrairement pour origine.

130. On trouve sans difficulté que les asymptotes imaginaires sont représentées par l'équation

$$y\sqrt{-1} = x + \frac{b+e}{2}.$$

Ces droites déterminent par leur intersection un foyer singulier situé sur l'axe. Si f est l'abscisse de ce foyer, on a

$$f = -\frac{b+e}{2}.$$

Le second foyer singulier est à l'infini. Les coniques déférentes sont donc des paraboles, ce qu'on pouvait prévoir par les considérations présentées au n° **45**.

131. Je désigne par λ', λ'', λ''' les abscisses des trois centres d'inversion; la somme de ces longueurs est égale à $-b$, et, par suite, l'expression de f devient

$$f = \frac{\lambda' + \lambda'' + \lambda''' - e}{2}.$$

Les sommets des trois paraboles ont pour abscisses (n° **83**)

$$c' = \frac{\lambda'' + \lambda'''}{2}, \quad c'' = \frac{\lambda''' + \lambda'}{2}, \quad c''' = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}.$$

Ces relations donnent

$$2(f - c') = \lambda' - e, \quad 2(f - c'') = \lambda'' - e, \quad 2(f - c''') = \lambda''' - e.$$

La distance du sommet d'une parabole déférente à son foyer est égale à la moitié de la distance du point équatorial au centre d'inversion correspondant, et dirigée dans le même sens. Si l'on suppose le point équatorial mobile, lorsqu'il passe à un centre d'inversion, la parabole déférente se retourne. Elle se réduit à deux points dont un à l'infini, quand le point équatorial est au centre d'inversion.

132. On peut mettre l'équation de la cubique sous la forme

$$(x-\lambda')(x-\lambda'')(x-\lambda''')+(x-e)y^2=0.$$

Cette équation conduit à diverses propositions assez intéressantes, mais qui n'ont pas d'importance dans la question qui nous occupe. Je me bornerai à remarquer que lorsque le point équatorial coïncide avec un des centres d'inversion, la cubique se décompose en une droite passant par ce point, et un cercle qui a pour diamètre le segment de l'axe compris entre les deux autres centres d'inversion. Il était facile de prévoir ce résultat (n^{os} **66** et **107**).

133. La construction exposée au n° **79** montre que tous les tores sont imaginaires; cependant dans le cas où le point équatorial coïncide à l'infini avec le centre des moyennes distances, on trouve que les axes des tores sont réels et se confondent avec l'axe de symétrie.

La courbe ne possède pas de tangentes doubles; et, par suite, la surface qu'elle engendre en tournant autour de son axe n'admet pas de sections circulaires.

§ I. — *Les trois sommets sur l'axe* (*ou centres d'inversion*) *sont réels*.

134. La spirique se compose d'un ovale et d'une branche infinie.

Première espèce. — Le point équatorial est en dehors du segment de l'axe compris entre les centres d'inversion extrêmes, par exemple, en deçà du point O′.

L'asymptote, qui, comme nous le savons, passe par le point équatorial (n° **111**), est située du côté de la branche infinie opposé à celui où se trouve l'ovale. Les foyers appartiennent au cercle O′.

Seconde espèce. — Le point équatorial coïncide avec un des centres d'inversion extrêmes, par exemple, avec O′.

La cubique se décompose en une droite et un cercle qui ne se coupent pas (n° **130**).

Troisième espèce. — Le point équatorial est entre deux centres d'inversion, par exemple, entre O′ et O″.

L'asymptote est située entre la branche infinie et l'ovale. Les foyers réels sont sur le cercle O'.

Quatrième espèce. — Le point équatorial coïncide avec le centre d'inversion qui est entre les deux autres.

La spirique est remplacée par une droite et un cercle qui se coupent.

Cinquième espèce. — Je rattache à ce genre l'être géométrique que l'on obtient quand, les centres d'inversion étant réels et distincts, le centre des moyennes distances et le point équatorial coïncident à l'infini.

§ II. — *Deux des trois sommets sur l'axe sont imaginaires.*

135. Un seul des cercles d'inversion est réel. La courbe a sur ce cercle deux sommets et deux foyers. Les deux autres foyers ordinaires sont sur l'axe. La spirique se compose d'une branche infinie.

On aurait une droite si le point équatorial était au centre d'inversion réel, et un être géométrique s'il se trouvait à l'infini.

CHAPITRE V.

SPIRIQUE AYANT UN POINT DOUBLE SUR SON AXE.

Généralités.

136. Deux des centres d'inversion sont réunis au point double O_2 de la spirique (n° **17**). Le troisième point double O''' est nécessairement réel. Le cercle d'inversion O_2 a un rayon nul ; l'autre O''' a pour rayon $O'''O_2$.

La spirique a sur son axe deux sommets réels ou imaginaires a_1 et a_2.

La conique déférente Γ_2 a deux sommets sur l'axe aux milieux des segments $a_1 O_2$ et $a_2 O_2$. La seconde conique Γ''' touche le cercle O''' au point O_2. Elle passe par le milieu du segment $a_1 a_2$. Les observations présentées aux n^{os} **53** et **51** montrent comment le point double est produit dans la génération de la spirique comme anallagmatique.

137. La spirique n'appartient qu'à quatre tores distincts. Deux d'entre eux touchent le plan de la courbe en O_2 : leurs axes se croisent en O'''. Les deux autres ont en O_2 un point conique; chacun de ces derniers doit être considéré comme représentant deux tores.

La courbe est de la sixième classe; elle a quatre tangentes doubles : deux perpendiculaires à l'axe, et deux divergeant de O''' et respectivement perpendiculaires aux asymptotes de Γ'''.

La spirique a deux foyers réunis en O_2. En les négligeant, je dirai qu'elle possède deux foyers ordinaires réels.

138. Le cercle d'inversion O_2 ayant un rayon nul, la spirique est la podaire d'une conique homothétique à Γ_2 par rapport au point O_2, et de dimensions doubles (n° **53**).

Quand le point équatorial est à l'infini, on a la podaire d'un cercle (n° **86**), c'est-à-dire un limaçon de Pascal. Le cercle directeur est imaginaire, et la courbe se réduit au point double O_2 quand les points a_1 et a_2 sont imaginaires.

M. Cornu paraît avoir établi le premier d'une manière générale que la section d'un tore par un plan tangent est la podaire d'une conique. Cette proposition avait déjà été énoncée dans des cas particuliers par MM. Pagani et J.-A. Serret. Avant les publications de ces géomètres, M. Chasles avait dit que le limaçon de Pascal est une variété de l'ovale de Descartes.

139. Quand un des sommets a_1 et a_2 coïncide avec le point double O_2 en un point O_3, la spirique a un rebroussement. Les six tores qui contiennent la courbe se réduisent alors à deux distincts et symétriques. Chacun d'eux est tangent au plan de la courbe en un point conique.

La déférente et la conique dont la spirique est la podaire passent l'une et l'autre par O_3.

140. Il est important de pouvoir reconnaître facilement dans chaque cas particulier, si les branches qui passent au point double sont réelles ou imaginaires.

Reportons-nous aux équations du n° **108** : en mettant l'origine au point O_2, et appelant λ''' l'abscisse du point O''', on a

$$\frac{b}{a} = -\lambda''', \quad c = 0, \quad d = 0;$$

et l'équation (8) devient

$$(x^2 + y^2)^2 - 4px(x^2 + y^2) + 4p\lambda''' x^2 + 4ep\frac{p - \lambda'''}{p - e}y^2 = 0.$$

J'appelle ω l'angle que l'une des tangentes en O_2 fait avec l'axe des abscisses; on trouve

$$\operatorname{tang}^2\omega = -\frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{e}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda'''}}.$$

A l'aide de cette équation on voit immédiatement si les valeurs de ω sont réelles ou imaginaires, lorsqu'on connaît les positions relatives des points E, G, O_2 et O'''.

Si le point E se meut sur l'axe, les trois autres étant fixes, lorsqu'il passera soit par le point O_2, soit par le point G, le carré de la tangente de ω changera de signe.

141. Quand on transforme la spirique par rayons vecteurs réciproques en prenant le point double O_2 pour centre d'inversion, on obtient une conique dans laquelle l'axe de symétrie est un axe principal. Les foyers des deux courbes sont réciproques.

La transformation en conique de la spirique à point double permet de déterminer diverses propriétés de cette dernière courbe (n° **116**).

§ I. — *Les deux sommets sur l'axe sont réels et situés de côtés différents du point double* O_2.

142. Cette disposition est celle à laquelle se rapporte la figure du n° **17**, le point G est en G_1. Les branches qui se croisent au point double O_2 ne sont réelles que quand le point équatorial est sur le segment GO_2 (n° **141**). La courbe a deux sommets sur le cercle O'''.

Premier genre. — Deux ovales extérieurs l'un à l'autre et se rejoignant à un point double.

143. Le point équatorial est sur le segment GO_2. Les tores sont imaginaires et les tangentes doubles perpendiculaires à l'axe réelles. Les coniques déférentes sont des hyperboles ayant leurs foyers réels sur l'axe.

Second genre. — Un ovale avec un point conjugué intérieur.

144. Le point équatorial est en dehors du segment GO_2.

On est conduit à distinguer cinq espèces. Les tores sont réels quand le point équatorial est du côté du centre des moyennes distances opposé à celui où se trouvent les centres d'inversion.

Transitions entre les deux genres.

145. La spirique est remplacée par un être géométrique lorsque le point équatorial est en G. Quand il se trouve en O_2, la courbe se décompose en deux cercles qui se touchent extérieurement.

Les transitions ne présentant aucune difficulté, je n'en parlerai pas dans les paragraphes qui vont suivre.

§ II. — *Les deux sommets sur l'axe sont réels, distincts et situés d'un même côté du point double* O_2.

146. Les points sont rangés sur l'axe dans l'ordre suivant : O_2, O''', G, a_1 et a_2. La courbe a deux sommets sur le cercle O'''.

Lorsque le point équatorial est en dehors du segment O_2G, la courbe présente deux ovales dont l'un est compris dans l'autre et qui se rejoignent au point double. Il y a trois espèces à considérer. Les tores sont réels dans l'une d'elles, celle que l'on obtient quand le point E est du côté du centre G opposé à celui où se trouvent les centres d'inversion.

Dans le cas où le point équatorial est sur le segment O_2G, la courbe est un ovale ayant un point conjugué extérieur. Les tores sont imaginaires. La discussion conduit d'ailleurs à distinguer trois espèces différentes.

§ III. — *Les deux sommets sur l'axe sont imaginaires.*

147. Le centre G est sur le segment $O_2 O'''$. Les tores dont les axes se croisent en O_2 sont imaginaires.

Lorsque le point équatorial est entre les centres G et O_2, la courbe se compose de deux ovales situés de part et d'autre de l'axe et se rejoignant au point double O_2. Les deux tores dont les axes passent en O''' sont réels. La courbe a deux foyers et deux sommets sur le cercle O'''. Γ''' est une ellipse, et Γ_2 une hyperbole.

Quand le point équatorial est en dehors du segment GO_2, la partie réelle de la courbe est réduite au point double O_2. On trouve d'ailleurs pour les déférentes et les tangentes doubles cinq dispositions différentes suivant la position du point E par rapport au point O''' et à l'infini.

§ IV. — *Un des sommets sur l'axe est à l'infini.*

148. La courbe est une cubique circulaire à point double. Lorsque le point équatorial est du côté de O_2 opposé à O''', on a un ovale et une branche infinie qui se rejoignent au point double. Quand le point est au contraire du même côté de O_2 que le centre O_3, la courbe se compose d'une branche infinie avec un point conjugué.

Dans le premier cas, si les points E et O''' sont à des distances égales de O_2, la courbe est une strophoïde.

§ V. — *Un des deux sommets sur l'axe coïncide avec le point double.*

149. Les centres d'inversion O_2 et O''' coïncident en un seul O_3.

La courbe est un ovale ayant un rebroussement. Quand le point équatorial est en dehors du segment GO_3, la saillie du rebroussement est dirigée vers le seul sommet qui reste à la spirique sur son axe. On trouve la disposition contraire quand le point E est entre les points G et O_3. Trois foyers ordinaires sont réunis en O_3.

Lorsque le point équatorial est du côté de G opposé à celui où se trouve O_3, les deux tores sont réels.

CHAPITRE VI.

SPIRIQUE A CENTRE.

Considérations générales.

150. La spirique à centre rapportée à ses deux axes de symétrie a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 + qx^2 + ry^2 + t = 0. \tag{1}$$

Deux des centres d'inversion coïncident avec le centre O; les deux autres sont à l'infini.

On a pour déterminer les rayons des cercles d'inversion qui ont leur centre au point O l'équation

$$R^2 = \pm\sqrt{t}. \tag{2}$$

En appelant f l'abscisse d'un foyer singulier situé sur l'axe des abscisses que je regarderai comme le premier axe de symétrie, on trouve

$$f = \pm\sqrt{\frac{r-q}{4}}. \tag{3}$$

Je considérerai souvent la spirique comme donnée par ses quatre sommets sur l'axe des abscisses et par ses foyers singuliers. Son équation sera alors

$$(x^2 + y^2)^2 + qx^2 + (q + 4f^2)y^2 + t = 0. \tag{4}$$

151. L'équation (6) du n° **106**, qui fait connaître les foyers simples, devient, lorsqu'on y suppose s et p nuls,

$$(q - r)u^4 + (4t - qr)u^2 + (q - r)t = 0, \tag{5}$$

ou bien

$$(u^4 + qu^2 + t) + \frac{q^2 - 4t}{4f^2}u^2 = 0. \tag{6}$$

Si l'on fait passer f^2 par toutes les grandeurs positives ou négatives, on aura une involution dans laquelle deux des centres d'inversion de chaque groupe seront au point O, et le troisième à l'infini.

Quand f^2 est infini, les foyers coïncident avec les sommets.

Résolvant l'équation (5), on obtient

$$(7) \qquad u^2 = \frac{qr - 4t \pm \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q-r)}.$$

Détermination des tores qui passent par une spirique à centre.

152. Pour accommoder au cas que j'examine les équations (11) du n° **75**, il faut y supposer nul non-seulement s, mais encore e, car le point équatorial coïncide avec l'origine O. On trouve alors

$$\rho \cos\omega = 0, \qquad \rho^2 - a^2 - b^2 = \frac{r}{2},$$

$$a^2 \sin^2\omega = \frac{q-r}{4}, \quad a^2 b^2 = \frac{r^2 - 4t}{16}.$$

En vertu de la première de ces équations, il faut que ρ soit nul, ou que ω soit égal à 90°. On obtient ainsi les deux solutions suivantes :

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} &\rho = 0, \\ &a^2 = -\frac{r}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{t}, \\ &b^2 = -\frac{r}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{t}, \\ &\sin^2\omega = \frac{q-r}{-r+2\sqrt{t}}; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\omega = 90^\circ, \\ &a^2 = \frac{q-r}{4}, \\ &b^2 = \frac{r^2-4t}{4(q-r)}, \\ &\rho^2 = \frac{q^2-4t}{4(q-r)}. \end{aligned}\right.$$

Le radical devant être considéré comme portant avec lui le double signe, on voit que la spirique appartient à trois couples de tores ayant leur axe dans le plan principal qui contient l'axe des abscisses. Deux de ces tores ont leur axe parallèle au plan de la spirique; les quatre autres ont le même centre que cette courbe.

La spirique à centre est ainsi l'intersection d'un tore par un plan passant par son centre ou parallèle à son axe.

Cette courbe, étant symétrique par rapport à deux axes, appartient à douze tores; mais ceux dont les axes se trouvent dans le plan principal qui contient les foyers singuliers sont nécessairement imaginaires (nº **82**).

Pour la facilité de la discussion, je désignerai par T′ et T″ les deux tores non symétriques que donnent les premières formules (8). Le troisième dont l'axe est parallèle à l'axe des abscisses sera T‴. J'appellerai T'_1, T''_1, T'''_1 les trois tores analogues aux précédents, et dont les axes sont dans le second plan principal.

Spirique considérée comme lieu des points de rencontre des couples de tangentes d'une conique qui comprennent un angle donné.

153. Considérons la conique

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1: \tag{9}$$

le lieu des points de concours des couples de tangentes à cette courbe qui comprennent un angle φ, a pour équation

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2-2(m^2+n^2+2n^2\cot^2\varphi)x^2\\ -2(m^2+n^2+2m^2\cot^2\varphi)y^2+(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cot^2\varphi=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Ce lieu est donc une spirique à centre dans laquelle les coefficients q, r, t ont les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} q&=-2(m^2+n^2+2n^2\cot^2\varphi),\\ r&=-2(m^2+n^2+2m^2\cot^2\varphi),\\ t&=(m^2+n^2)^2+4m^2n^2\cot^2\varphi.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

M. Garlin a signalé, en 1854, l'identité du lieu dont il est question, avec la section du tore par un plan parallèle à son axe. Les théorèmes contenus dans les numéros suivants ne se trouvent pas dans le Mémoire de M. Garlin.

L'équation (10) n'éprouve aucune modification quand on y remplace l'angle φ par son supplément. Cela tient à ce que l'on peut prendre indifféremment l'une ou l'autre des deux tangentes que l'on peut mener d'un point à la conique pour origine de l'angle qu'elles comprennent. M. Laguerre a présenté à la Société Philomathique d'excellentes observations sur les questions de ce genre, dans la séance du 21 novembre 1868.

154. Éliminant φ, puis n^2, entre les équations (10), on obtient d'abord

$$(12)\qquad \begin{cases} m^4 - n^4 + qm^2 + t = 0, \\ m^4 - n^4 - rn^2 - t = 0; \end{cases}$$

et ensuite

$$(13)\qquad (q^2 - r^2)m^4 - q(r^2 - 4t)m^2 - t(r^2 - 4t) = 0.$$

Les équations (12) donnent d'ailleurs

$$(14)\qquad qm^2 + rn^2 + 2t = 0.$$

A chacune des deux valeurs de m^2 données par l'équation (13) correspond un système de valeurs pour n^2 et pour $\cot^2\varphi$. Il résulte de là que *toute spirique à centre est, de deux manières différentes, le lieu des points de concours des couples de tangentes à une conique qui comprennent un angle donné*.

Les équations qui donnent n^2 et φ sont

$$(15)\qquad \begin{cases} (r^2 - q^2)n^4 - r(q^2 - 4t)n^2 - t(q^2 - 4t) = 0, \\ (q - r)^2 \operatorname{tang}^4\varphi - 4(qr - 4t)\operatorname{tang}^2\varphi + 16t = 0. \end{cases}$$

Résolvant les équations (13) et (15) et établissant la concordance des signes par les relations (14) et (11), on obtient

$$(16)\qquad \begin{cases} m^2 = \dfrac{q(r^2 - 4t) + r\sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q^2 - r^2)}, \\[2ex] n^2 = \dfrac{-r(q^2 - 4t) - q\sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q^2 - r^2)}, \\[2ex] \operatorname{tang}^2\varphi = 2\,\dfrac{(qr - 4t) + \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{(q - r)^2}, \end{cases}$$

J'appellerai Λ_1 et Λ_2 les deux coniques que nous venons de déterminer. Leurs axes seront m_1, n_1 et m_2, n_2.

155. L'équation de la spirique à centre ne contenant que trois coefficients, il existe nécessairement une relation entre les longueurs des axes des deux coniques Λ_1 et Λ_2.

Je pose

$$n^2 = km^2;$$

l'équation (14) donne

$$m^2 = -\frac{2t}{q+kr}, \quad n^2 = -\frac{2kt}{q+kr}. \tag{17}$$

En portant ces valeurs dans l'une des équations (12), on obtient

$$k^2 = \frac{q^2-4t}{r^2-4t}. \tag{18}$$

Les deux valeurs de k sont égales et de signes contraires; par conséquent on a

$$\frac{n_1^2}{m_1^2} + \frac{n_2^2}{m_2^2} = 0. \tag{19}$$

Les deux coniques Λ_1 et Λ_2 sont de genres différents; l'hyperbole a pour asymptotes les diagonales du rectangle circonscrit à l'ellipse.

Une spirique est déterminée par deux coniques satisfaisant aux relations qui viennent d'être indiquées. Si l'on désigne par k_1 le rapport des carrés des axes de la conique Λ_1, on trouve que l'équation de la spirique en fonction de m_1^2, m_2^2 et k_1 est

$$\left\{\begin{aligned}&(x^2+y^2)^2-(1-k_1^2)(m_1^2+m_2^2)x^2+\frac{1-k_1^2}{k_1}(m_1^2-m_2^2)y^2\\&\qquad\qquad+(1-k_1^2)m_1^2m_2^2=0.\end{aligned}\right. \tag{20}$$

On peut prendre pour les coniques Λ_1 et Λ_2 un cercle et une hyperbole équilatère; k^2 est alors égal à l'unité, et la spirique se réduit à son centre, à moins toutefois que les axes de l'une des coniques ne soient infinies. Dans ce cas, suivant que la grandeur infinie est le diamètre du cercle ou l'axe de l'hyperbole, on a une cassinoïde ou deux cercles concentriques, comme je le dirai plus loin (n° **162**).

156. Le système des deux coniques Λ_1 et Λ_2 a pour équation

$$\frac{x^4}{m_1^2 m_2^2} + \frac{y^4}{n_1^2 n_2^2} + \frac{1}{n_1^2 n_2^2}\left(\frac{n_1^2}{m_1^2} + \frac{n_2^2}{m_2^2}\right) x^2 y^2 - \left(\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2}\right) x^2$$
$$- \left(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}\right) y^2 + 1 = 0.$$

Eu égard à la relation (19), le terme en x^2y^2 disparaît; en introduisant dans les coefficients des autres termes les valeurs de m_1^2, m_2^2, n_1^2 et n_2^2 prises dans les équations (16), on obtient

$$(21) \qquad -\frac{q^2 - r^2}{r^2 - 4t} x^4 + \frac{q^2 - r^2}{q^2 - 4t} y^4 + qx^2 + ry^2 + t = 0.$$

La courbe représentée par le système des deux coniques est de la quatrième classe, et par conséquent a seize foyers, dont quatre sont réels. Ceux-ci coïncident avec les foyers réels des coniques, quand les carrés de leurs axes sont réels; mais lorsque ces carrés sont imaginaires conjugués, les foyers réels de la courbe (21) se trouvent hors des axes, en des positions symétriques, et par conséquent sur un cercle décrit du point O comme centre.

157. On déduit des deux premières équations (16)

$$(22) \qquad m^2 - n^2 = \frac{qr - 4t \pm \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q - r)}.$$

En comparant les équations (7) et (22), on reconnaît que *les foyers du système des deux coniques* Λ_1 *et* Λ_2 *coïncident avec ceux de la spirique.* Quand les coniques sont réelles, les foyers réels de la spirique sont sur les axes de symétrie. Lorsque ces foyers se trouvent hors des axes, les coniques sont imaginaires, et les carrés des longueurs de leurs axes sont imaginaires conjuguées.

158. Les deux premières équations (11) donnent

$$q - r = -4(n^2 - m^2)\cot^2\varphi.$$

Cette valeur introduite dans la relation (3) donne

$$(23) \qquad -f^2 = (m^2 - n^2)\cot^2\varphi.$$

Les foyers singuliers sont les centres des cercles décrits sur le segment compris entre les foyers de l'une quelconque des coniques Λ_1 et Λ_2, *et capables de l'angle* φ *qui correspond à cette conique.* Cette proposition peut être déduite d'un théorème donné par M. Laguerre sur les foyers singuliers des lieux des points où se coupent les droites qui touchent deux courbes fixes et qui comprennent un angle donné (journal *l'Institut*, 30 novembre 1868).

La formule (23) est très-utile pour reconnaître dans chaque cas si un angle φ_1 ou φ_2 est réel ou imaginaire.

159. En ajoutant l'une à l'autre les deux premières équations (16), on a

$$m^2 + n^2 = -\frac{qr + 4t + \sqrt{(q^2 - 4t)(r^2 - 4t)}}{2(q + r)}.$$

D'après cette équation et la relation (2), on trouve

$$(24) \qquad (m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) = \mathrm{R}^4.$$

On déduit de la relation (24) et des théorèmes trouvés plus haut diverses constructions utiles.

Introduction des paramètres dans les formules.

160. Il nous sera commode d'avoir dans les formules, au lieu des coefficients q, r, t, les demi-axes c' et c'' des coniques Γ' et Γ'' (nº **83**), et l'abscisse f des foyers singuliers.

On trouve

$$(25) \qquad q = -2(c'^2 + c''^2), \quad r = -2(c'^2 + c''^2) + 4f^2, \quad t = (c'^2 - c''^2)^2.$$

A l'aide de ces valeurs, on obtient, pour les coordonnées des sommets de la spirique situés sur l'axe des y,

$$(26)\qquad y^2 = c'^2 + c''^2 - 2f^2 \pm 2\sqrt{(f^2 - c'^2)(f^2 - c''^2)}.$$

L'équation (7) relative aux foyers devient

$$(27)\qquad u^2 = c'^2 + c''^2 - 2\frac{c'^2c''^2}{f^2} \pm 2\frac{c'c''}{f^2}\sqrt{(f^2 - c'^2)(f^2 - c''^2)}.$$

Les grandeurs relatives aux coniques A_1 et A_2 sont données par les équations suivantes

$$(28)\left\{\begin{aligned}
m^2 &= \frac{-(c'^2+c''^2)(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)-(c'^2+c''^2-2f^2)c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2(c'^2+c''^2-f^2)},\\
n^2 &= \frac{(c'^2+c''^2-2f^2)c'^2c''^2+(c'^2+c''^2)c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2(c'^2+c''^2-f^2)},\\
u^2 &= \frac{f^2(c'^2+c''^2)-2c'^2c''^2-2c'c''\sqrt{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}}{f^2},\\
k^2 &= \frac{c'^2c''^2}{(f^2-c'^2)(f^2-c''^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Je n'indique pas les formules relatives aux tores. Il sera facile de faire la discussion à l'aide des équations (8) et (25).

161. Quand la spirique est réelle, elle a des sommets réels sur un de ses axes; car sans cela, eu égard à ses symétries, elle serait composée de quatre ovales, ce qui est impossible, puisqu'elle ne peut avoir que deux tangentes doubles perpendiculaires à un axe (nos **95** et **96**). En conséquence, si nous négligeons les variétés imaginaires, il nous suffira d'examiner les cas où la courbe a au moins deux points réels sur un axe qui sera pris pour axe des abscisses.

On a

$$(29)\qquad c'^2 = \frac{-q + \sqrt{4t}}{2},\quad c''^2 = \frac{-q - \sqrt{4t}}{2}.$$

Lorsque les quatre sommets sur l'axe des abscisses sont réels, c'^2 et c''^2 sont positifs. Si la courbe a seulement deux sommets réels, ces quantités sont imaginaires conjuguées. Quand une d'elles est négative, aucun des sommets sur l'axe n'est réel.

§ I. — *La courbe a quatre sommets réels sur un de ses axes.*

162. Je supposerai que les sommets sont fixes, et que les foyers singuliers occupent successivement toutes les positions possibles sur les axes. c'^2 et c''^2 sont alors des quantités positives constantes. Les formules du n° **160** permettent de faire facilement la discussion.

Première espèce. — Les foyers singuliers coïncident au centre de la courbe. f^2 étant nul, r est égal à q, et on voit par l'équation (1) que la spirique se décompose en deux cercles concentriques. Deux foyers ordinaires coïncident au centre; les autres sont à l'infini. Les déférentes sont des cercles.

Une des valeurs de m^2 est infinie; la conique correspondante est une hyperbole équilatère ayant des axes infinis. L'autre conique est un cercle.

La spirique appartient à deux tores distincts qui ont pour axe la perpendiculaire élevée par son centre à son plan. Ce plan représente un troisième tore.

Deuxième espèce. — Les foyers singuliers sont entre les sommets de la première déférente. f^2 est plus petit que c'^2, qui est supposé moindre que c''^2.

La courbe se compose de deux ovales dont un contient l'autre; les foyers ordinaires sont sur le second axe de symétrie. Les deux déférentes sont des ellipses.

Les coniques Λ_1 et Λ_2 sont réelles ainsi que les angles φ_1 et φ_2 qui leur correspondent. L'ellipse est dans l'intérieur des deux ovales.

Les tores T'_1, T''_1, T'''_1 sont réels, les autres imaginaires.

Troisième espèce. — Les foyers singuliers coïncident avec les sommets de la première déférente. La spirique se décompose en deux cercles égaux dont les centres sont sur l'axe des abscisses et qui se coupent sur l'axe des ordonnées. Ces cercles sont les méridiens d'un tore, et appartiennent à deux autres tores bitangents à leur plan et symétriques l'un de l'autre.

Les coniques Λ_1 et Λ_2 sont remplacées chacune par les deux points où les cercles se coupent.

Quatrième espèce. — Les foyers singuliers sont entre les sommets des deux déférentes. La spirique se compose de deux ovales extérieurs l'un à l'autre. Chaque ovale a deux sommets sur le cercle d'inversion réel. Les foyers ordinaires sont sur ce même cercle.

Une des déférentes est une ellipse et l'autre une hyperbole. Les coniques Λ_1 et Λ_2 sont imaginaires, le tore T''_1 est seul réel.

Cinquième espèce. — Les foyers singuliers coïncident avec la seconde déférente. La spirique est remplacée par deux cercles égaux qui ne se coupent pas.

Sixième espèce. — Les foyers singuliers sont au delà des sommets de la seconde déférente. Les déférentes sont des hyperboles ayant leurs sommets sur l'axe des abscisses. Les foyers ordinaires sont sur cet axe; ceux qui sont d'un même côté du centre se trouvent entre les deux sommets qui sont de ce côté.

La courbe est formée de deux ovales extérieurs l'un à l'autre.

Les angles φ_1 et φ_2 sont imaginaires. L'ellipse Λ_1 ou Λ_2 est réelle ou imaginaire suivant que f^2 est plus petit ou plus grand que $(c'^2 + c''^2)$.

Cas spécial de la cassinoïde. — Lorsque f^2 est égal à $(c'^2 + c''^2)$, les coefficients q et r sont égaux et de signes contraires, et la spirique est une cassinoïde. Les foyers singuliers coïncident avec deux des foyers ordinaires, résultat intéressant déjà signalé, pour cette courbe, par M. Salmon.

Si l'on étudie les tores qui passent par la cassinoïde, on obtient un théorème donné par M. J.-A. Serret dans le Mémoire cité à l'Avant-propos.

Une des coniques Λ_1 et Λ_2 est un cercle; l'autre est une hyperbole équilatère dont les foyers coïncident avec les foyers simples de la cassinoïde. L'angle φ correspondant à l'hyperbole est imaginaire. Si cet angle était réel, la cassinoïde aurait seulement deux sommets réels sur ses axes.

Une spirique étant donnée par un cercle d'inversion et une conique déférente concentriques, pour qu'elle soit une cassinoïde, il faut que le carré du rayon du cercle d'inversion soit égal à la somme des carrés des demi-axes de la conique.

Septième espèce. — Les foyers singuliers sont à l'infini. La spirique se réduit à un être géométrique.

Huitième espèce. — Les foyers singuliers sont sur le second axe de symétrie. La courbe se compose de deux ovales, dont un comprend l'autre. Les déférentes sont des ellipses. Les tores T', T'', T''' sont réels. Les foyers ordinaires se trouvent sur l'axe des abscisses : deux d'entre eux à l'intérieur de la petite déférente, et les deux autres à l'extérieur de la grande. Les coniques Λ_1, Λ_2 et les angles qui leur correspondent sont réels.

§ II. — *La courbe a sur chacun de ses axes deux sommets réels et deux imaginaires.*

163. Quand la courbe a sur un de ses axes deux sommets réels et deux imaginaires, elle se compose de deux ovales concentriques, dont un est imaginaire et l'autre réel.

Il est convenable de ne plus employer les quantités c'^2 et c''^2, parce qu'elles sont imaginaires. J'appelle 2α, 2β les longueurs des deux axes de la courbe. J'ai

$$\alpha^4 + q\alpha^2 + t = 0, \quad \beta^4 + r\beta^2 + t = 0;$$

et je pose

$$h^2 = \frac{4f^2}{\alpha^2 - \beta^2} - 1. \tag{30}$$

A l'aide de ces formules et de la relation (3), on obtient

$$q = h^2\beta^2 - \alpha^2, \quad r = h^2\alpha^2 - \beta^2, \quad t = -h^2\alpha^2\beta^2. \tag{31}$$

Une spirique quelconque peut être donnée par un système de valeurs des trois quantités α^2, β^2 et h^2. Dans le cas que j'examine, on peut prendre pour α^2 et β^2 des grandeurs réelles et positives, parce que la courbe rencontre chacun de ses axes; h^2 est alors essentiellement positif, car le coefficient t est négatif, puisque c'^2 et c''^2 sont imaginaires (n° **161**).

Je peux supposer que le plus grand des deux axes de la courbe a été pris pour axe des abscisses, et ainsi que α^2 est plus grand que β^2.

164. L'introduction des expressions (31) dans les équations (16) et (22) donne

$$\begin{cases} m_1^2 = -(h^2\alpha^2+\beta^2)\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-\beta^4}, \\ n_1^2 = (h^2\beta^2+\alpha^2)\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-\beta^4}, \\ u_1^2 = -(h^2+1)\dfrac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}; \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2^2 = (h^2\alpha^2+\beta^2)\dfrac{h^2}{h^4-1}, \\ n_2^2 = (h^2\beta^2+\alpha^2)\dfrac{h^2}{h^4-1}, \\ u_2^2 = \dfrac{h^2}{h^2+1}(\alpha^2-\beta^2). \end{cases}$$

La conique Λ_1 est une hyperbole ayant pour foyers les deux foyers que la spirique possède sur le plus petit de ses deux axes.

L'ellipse Λ_2 a ses foyers sur le grand axe; elle est réelle ou imaginaire suivant que h^2 est plus grand ou plus petit que l'unité. Quand h^2 est égal à 1, la courbe est une cassinoïde, et l'ellipse Λ_2 un cercle d'un rayon infini.

h^2 étant essentiellement positif, il résulte de l'équation (30) qu'on ne peut faire varier f^2 que depuis $\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}$ jusqu'à l'infini. Quand f^2 est plus grand que $\frac{\alpha^2-\beta^2}{2}$, l'ellipse Λ_2 est réelle.

On trouve par l'équation (23) que l'angle φ_1 est réel, et l'angle φ_2 imaginaire.

r est plus grand que q, et t est négatif; il résulte de là, d'après les formules et les considérations du n° **155**, que les deux tores symétriques qui ont leurs axes parallèles au petit axe de la courbe sont seuls réels.

§ III. — *Le centre de la courbe est un point double.*

165. Je désigne par $\pm\alpha$ et $\pm\beta$ les coordonnées des points où la courbe rencontre ses axes. On a

$$q = -\alpha^2, \quad r = -\beta^2, \quad t = 0,$$

Je suppose que α^2 est plus grand que β^2. Si la spirique a une branche réelle, α^2 est positif; β^2 peut être positif, nul ou négatif.

On trouve

$$m_1^2 = -\frac{\alpha^2\beta^4}{\alpha^4-\beta^4}, \quad n_1^2 = \frac{\alpha^4\beta^2}{\alpha^4-\beta^4}, \quad \operatorname{tang}^2\varphi_1 = \frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}, \quad u_1^2 = -\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

La conique Λ_2 est remplacée par les deux droites

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{-1}.$$

L'angle correspondant φ_2 est nul.

Lorsque β^2 est positif, la spirique se compose d'un ovale ayant à son centre un point conjugué. Λ_1 est une hyperbole ayant ses foyers sur le petit axe de la spirique, Λ_2 une ellipse réduite à un point; φ_1 est réel.

Quand β^2 est nul, la spirique est le système de deux cercles égaux et tangents l'un à l'autre. Les coniques Λ_1 et Λ_2 sont remplacées par la droite qui touche les deux courbes à leur point de contact.

Lorsque β^2 est négatif, la spirique est formée de deux ovales qui se rejoignent à un point double. Λ_1 est une ellipse imaginaire dont les foyers sont sur l'axe transverse; φ_1 est imaginaire. La conique Λ_2 se trouve remplacée par les deux tangentes de la courbe à son point double.

Lorsque β^2 n'est pas nul, la spirique appartient à quatre tores réels et distincts. Leurs axes sont dans le plan principal qui contient l'axe non transverse ou le petit axe de la courbe.

Je ne parlerai pas des déférentes et de la génération de la spirique comme podaire d'une conique, ces questions ayant été suffisamment examinées au Chapitre V.