

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE SARRAU

**Sur la propagation et la polarisation de la lumière dans
les cristaux; second Mémoire**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 13 (1868), p. 59-110.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13_59_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

SUR LA
PROPAGATION ET LA POLARISATION DE LA LUMIÈRE
DANS LES CRISTAUX ;

PAR M. ÉMILE SARRAU,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

SECOND MÉMOIRE.

Nous avons montré, dans un premier Mémoire inséré dans ce Journal, comment l'étude analytique des phénomènes lumineux dépend de trois fonctions symboliques à coefficients périodiques dont il importe de déterminer la forme essentielle pour réduire les équations auxiliaires. Ces fonctions, désignées par F, G, H dans le Mémoire précité, représentent les composantes de la force accélératrice appliquée à un point quelconque de l'éther : leur expression dépend nécessairement des idées admises sur la constitution de l'éther, et ce second Mémoire a pour objet l'examen des résultats qu'introduit une hypothèse particulière dont les conséquences paraissent conformes aux faits observés.

Cette hypothèse est développée dans les Chapitres II et III. Elle revient à supposer que, dans les milieux matériels comme dans le vide, l'éther est *isotrope* et que la seule modification introduite par l'action de la matière pondérable consiste dans une altération périodique de la densité.

Les Chapitres IV et V sont consacrés à l'étude des propriétés des ondes planes propagées par les cristaux des divers systèmes déduites des équations obtenues dans les Chapitres précédents.

Nous avons cru utile de rappeler brièvement dans le premier Chapitre la méthode générale qui a été appliquée par Cauchy à l'étude des mouvements simples, afin de fixer les notations qui sont constan-

ment employées dans ce travail. Nous indiquons à cette occasion une règle fort simple pour déterminer les éléments d'une vibration elliptique.

CHAPITRE PREMIER.

RAPPEL DES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES. — DÉTERMINATION DES ÉLÉMENTS D'UNE ONDE POLARISÉE ELLIPTIQUEMENT.

1. Soit en général un système d'équations auxiliaires de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} D_t^2 u = L_1 u + L_2 v + L_3 w, \\ D_t^2 v = M_1 u + M_2 v + M_3 w, \\ D_t^2 w = N_1 u + N_2 v + N_3 w, \end{cases}$$

les L, M, N étant des fonctions symboliques entières, à coefficients constants, de D_x, D_y, D_z ; on a un système d'intégrales particulières, en posant

$$(2) \quad \frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

P, Q, R; $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ étant des constantes, réelles ou imaginaires, satisfaisant aux équations

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma^2 P = A_1 P + A_2 Q + A_3 R, \\ \sigma^2 Q = B_1 P + B_2 Q + B_3 R, \\ \sigma^2 R = C_1 P + C_2 Q + C_3 R, \end{cases}$$

où les A, B, C représentent les résultats obtenus en écrivant α, β, γ au lieu de D_x, D_y, D_z dans les L, M, N des équations (1). En éliminant P, Q, R entre les équations (3) on a une équation *caractéristique*

$$(4) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, \sigma) = 0.$$

Enfin, on déduit des mêmes équations les rapports de deux des constantes P, Q, R à la troisième.

2. On sait que tout système d'intégrales des équations (1) s'obtient

en combinant par addition un nombre fini ou infini d'intégrales *simples* de la forme (1). Il est aisé d'en conclure que tout mouvement du système peut être considéré comme résultant de la composition d'un nombre fini ou infini de mouvements dans lesquels les déplacements sont les parties réelles d'un système d'intégrales simples. De la seule considération de ces mouvements *simples*, on peut déduire, comme l'a fait Cauchy, les propriétés générales des vibrations.

3. Supposons les coordonnées rectangulaires, et soit généralement

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = a' + ai, & \beta = b' + bi, & \gamma = c' + ci, & \sigma = s' + si, \\ P = pe^{\lambda i}, & Q = qe^{\mu i}, & R = re^{\nu i}. \end{cases}$$

Désignons de plus par ρ et ρ' les distances du point x, y, z aux plans ayant pour équations

$$(6) \quad aX + bY + cZ = 0,$$

$$(7) \quad a'X + b'Y + c'Z = 0,$$

il est aisé de voir que les déplacements du mouvement simple correspondant aux intégrales (2) sont

$$(8) \quad \begin{cases} \bar{u} = pe^{h'\rho' - s't} \cos(h\rho - st + \lambda), \\ \bar{v} = qe^{h'\rho' - s't} \cos(h\rho - st + \mu), \\ \bar{w} = re^{h'\rho' - s't} \cos(h\rho - st + \nu), \end{cases}$$

h et h' étant déterminés par les formules

$$(9) \quad h^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad h'^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Les formules (8) représentent un mouvement par *ondes planes* parallèles au plan fixe (6). Les valeurs absolues de $\frac{2\pi}{h}$ et $\frac{2\pi}{s}$ donnent la *longueur d'ondulation* et la *durée de la vibration*. La *vitesse de propagation* des ondes planes est fournie par le rapport $\omega = \frac{s}{h}$. Les quantités h' et s' sont des *coefficients d'extinction*. Quand h' n'est pas nul, l'am-

plitude des déplacements décroît en progression géométrique quand on s'éloigne d'un certain côté du plan représenté par l'équation (7). Quand s' est positif, le mouvement s'éteint pour des valeurs croissantes du temps; si $s' = 0$, l'amplitude est constante en chaque point et le mouvement est dit *persistant*.

4. Nous ne considérons dans ce qui suit que des mouvements simples persistants : dans ce cas, on déduit aisément des formules (8) les deux équations

$$(10) \quad \frac{\bar{u}}{p} \sin(\mu - \nu) + \frac{\bar{v}}{q} \sin(\nu - \lambda) + \frac{\bar{w}}{r} \sin(\lambda - \mu) = 0,$$

$$(11) \quad \left(\frac{\bar{v}}{q}\right)^2 - 2 \frac{\bar{v}}{q} \frac{\bar{w}}{r} \cos(\mu - \nu) + \left(\frac{\bar{w}}{r}\right)^2 = e^{2h'\rho'} \sin^2(\mu - \nu),$$

qui montrent que les trajectoires atomiques sont généralement elliptiques. Si $h' = 0$ toutes les ellipses sont égales; si h' n'est pas nul, les points à égale distance du plan (7) ont des trajectoires égales.

Les ellipses peuvent se réduire à des cercles ou à des droites. Suivant les cas, la *polarisation* du mouvement simple est *elliptique, circulaire* ou *rectiligne*.

5. PROBLÈME. — *Déterminer la grandeur et la direction des axes principaux des trajectoires elliptiques dans un mouvement simple persistant.*

Les déplacements \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} sont les parties réelles des valeurs (2) de u , v , w , qui, en posant $s' = 0$ et $h\rho - st = \varphi$, deviennent

$$(12) \quad u = P e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad v = Q e^{h'\rho' + \varphi i}, \quad w = R e^{h'\rho' + \varphi i};$$

par suite, en désignant par P_0 , Q_0 , R_0 les imaginaires conjuguées de P , Q , R , on aura

$$(13) \quad \begin{cases} 2\bar{u} = e^{h'\rho'} (P e^{\varphi i} + P_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\bar{v} = e^{h'\rho'} (Q e^{\varphi i} + Q_0 e^{-\varphi i}), \\ 2\bar{w} = e^{h'\rho'} (R e^{\varphi i} + R_0 e^{-\varphi i}). \end{cases}$$

A l'aide de ces valeurs, et en posant

$$(14) \quad M e^{\theta i} = e^{2h'\rho'} (P^2 + Q^2 + R^2),$$

$$(15) \quad I = e^{2h'\rho'} (p^2 + q^2 + r^2),$$

on trouve aisément que la distance δ , qui sépare un point quelconque de sa position d'équilibre, est déterminée par la formule

$$(16) \quad 2\delta^2 = I + M \cos(2\varphi + \theta),$$

de sorte que le maximum et le minimum de δ s'obtiennent en posant $2\varphi + \theta = 0$ et $2\varphi + \theta = \pi$, et se déduisent de la relation

$$(17) \quad 2\delta^2 = I \pm M.$$

Pour le grand axe, on a $\varphi = -\frac{\theta}{2}$, et les projections de demi-grand axe sont les parties réelles des valeurs correspondantes de u, v, w , qui sont, d'après les formules (12),

$$(18) \quad u = P e^{h'\rho'} e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad v = Q e^{h'\rho'} e^{-\frac{\theta}{2}i}, \quad w = R e^{h'\rho'} e^{-\frac{\theta}{2}i}.$$

Pour le petit axe, on a

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2};$$

par suite, les projections du demi-petit axe sont les parties réelles de trois imaginaires obtenues en multipliant les précédentes par $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, c'est-à-dire les *coefficients des parties imaginaires* des expressions (18).

Les formules (17) et (18) ramènent la solution du problème à la détermination du module et de l'argument de la forme imaginaire

$$A = P^2 + Q^2 + R^2.$$

Quand le mouvement se propage sans s'affaiblir, on a $h' = 0$, et on déduit de ce qui précède le théorème suivant :

Dans tout mouvement simple polarisé elliptiquement, représenté par

les intégrales (2), les demi-axes principaux des trajectoires sont donnés par la formule $\delta^2 = \frac{1}{2}(I \pm M)$, dans laquelle I désigne l'intensité du mouvement vibratoire, et M le module de l'expression

$$A = P^2 + Q^2 + R^2.$$

De plus, les projections sur les trois axes coordonnés du demi-grand axe (et du demi-petit axe) sont représentées par les parties réelles (et les coefficients de i) des trois imaginaires que l'on obtient en multipliant les constantes P, Q, R par $\left(\frac{M}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$.

6. Polarisation circulaire. — Pour qu'un mouvement persistant soit polarisé circulairement, il faut et il suffit que les deux valeurs (17) de δ soit égales, et, par suite, que M soit nul; on doit donc avoir

$$P^2 + Q^2 + R^2 = 0.$$

7. Polarisation rectiligne. — Pour que la polarisation soit rectiligne, il faut et il suffit que les valeurs des déplacements soient, quel que soit φ , proportionnelles à des constantes réelles. Il faut donc que les rapports de deux des quantités P, Q, R à la troisième soient réels.

8. Nous terminerons ce qui est relatif à la polarisation des mouvements simples par une remarque sur le sens dans lequel s'effectuent les vibrations non rectilignes.

Nous appellerons *direct* le mouvement d'un point se mouvant sur les plans coordonnés de oy vers oz , de oz vers ox , ou de ox vers oy . Cela posé, si on considère un mouvement simple projeté sur le plan xoy , les équations de ce mouvement seront

$$\begin{aligned}\bar{u} &= pe^{h'\rho'} \cos(h\rho - st + \lambda), \\ \bar{v} &= qe^{h'\rho'} \cos(h\rho - st + \mu).\end{aligned}$$

Soit φ l'angle (croissant dans le sens direct) que fait avec ox la pro-

jection ε du rayon vecteur. De la relation $\text{tang } \varphi = \frac{\bar{v}}{u}$, on déduit

$$\varepsilon^2 \frac{d\varphi}{dt} = spqe^{2h'\rho'} \sin(\mu - \lambda).$$

Donc, le sens du mouvement projeté est direct ou rétrograde suivant que $\sin(\mu - \lambda)$ est positif ou négatif, ou, ce qui revient au même, suivant que le coefficient de i , dans le rapport $\frac{Q}{P}$, est positif ou négatif.

9. On voit par ce qui précède comment toutes les particularités relatives à la *polarisation* d'un mouvement simple se déduisent des valeurs des constantes P, Q, R, auxquelles sont proportionnelles les intégrales simples correspondantes. C'est de l'équation caractéristique (4) que résultent les lois de la *propagation* du mouvement.

En effet, cette équation détermine en général la *longueur d'ondulation* et le *coefficient d'extinction* d'une onde plane persistante qui se propage dans une direction donnée, et s'éteint à partir d'un plan déterminé.

Soient effectivement (l, m, n) et (l', m', n') les cosinus des angles que les normales aux plans (6) et (7) font avec les axes. On aura, en conservant les notations des formules (5) et (9),

$$\alpha = h'l' + hli, \quad \beta = h'm' + hmi, \quad \gamma = h'n' + hni, \quad \sigma = si,$$

et l'équation caractéristique devient

$$(19) \quad F(h'l' + hli, h'm' + hmi, h'n' + hni, si) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est imaginaire de la forme $X + Yi$, et le système simultané $X = 0, Y = 0$, résolu par rapport à h et h' , devra présenter une solution réelle, si la propagation d'une onde plane évanescence dans la direction donnée est compatible avec la constitution du milieu que l'on considère; h' fournit le coefficient d'extinction, et la longueur d'ondulation s'obtient en divisant 2π par h .

Si une onde plane peut se propager sans affaiblissement dans une direction donnée, la valeur correspondante de h doit être une racine

réelle de l'équation

$$(20) \quad F(hli, hmi, hni, \sigma i) = 0.$$

10. Lorsque le plan des ondes coïncide avec le plan d'extinction, on a $l' = l$, $m' = m$, $n' = n$, et en posant $h' + hi = k$, $si = \sigma$, l'équation (19) devient

$$(21) \quad F(kl, km, kn, \sigma) = 0.$$

Dans ce cas, si on résout l'équation par rapport à k , toute racine dépourvue de partie réelle correspond à un mouvement simple non évanescant. De sorte que l'onde ne s'éteint pas, ou s'éteint, suivant que le rapport $\frac{k}{\sigma}$ est réel ou imaginaire.

La substitution de l'équation (21) à l'équation (19) simplifie notablement la discussion de l'équation caractéristique, et suffit à l'étude des propriétés essentielles des vibrations lumineuses propagées par les cristaux. Le cas particulier auquel elle se rapporte se réalise pour les ondes réfractées qui se propagent dans un cristal imparfaitement transparent, quand les ondes incidentes sont parallèles à la face réfringente du cristal.

CHAPITRE II.

RÉDUCTION DES ÉQUATIONS DES MOUVEMENTS VIBRATOIRES DE L'ÉTHER D'APRÈS L'HYPOTHÈSE QUI ASSIMILE CE MILIEU A UN SYSTÈME PÉRIODIQUEMENT ISOTROPE.

1. L'analyse qui fait l'objet de ce Chapitre est basée sur les hypothèses suivantes :

1° L'éther peut être assimilé à un système de points s'attirant ou se repoussant. L'action mutuelle de deux points, dirigée suivant la ligne qui les joint, est une fonction de la distance qui s'évanouit dès que la variable dont elle dépend dépasse une limite très-petite ;

2° La sphère d'activité de chaque point de l'éther renferme un nombre extrêmement grand d'atomes distribués sans régularité ;

3° La densité de l'éther renfermé dans un cristal est sensiblement constante dans l'étendue de la sphère d'action d'un de ses points.

Pour légitimer cette dernière supposition, il suffit d'admettre que le rayon de la sphère d'action est très-petit par rapport aux dimensions d'un parallépipède élémentaire de l'assemblage des molécules matérielles. En effet, la densité de l'éther en un point quelconque peut être considérée comme une fonction continue des coordonnées qui fixent la position de ce point dans l'intérieur d'une alvéole de l'assemblage moléculaire. Si on passe de ce point à un autre compris dans sa sphère d'action, les coordonnées varient, dans l'hypothèse adoptée, de quantités très-petites par rapport à elles-mêmes, et la densité reçoit un accroissement du même ordre, qui peut être négligé dans le calcul de certains termes.

2. En se basant sur ces hypothèses, on est conduit à des équations identiques à celles que l'on obtiendrait en supposant que la constitution de l'éther est la même, dans tous les sens, autour de chaque point.

Leur forme est la même que celle des équations auxquelles satisfont les vibrations d'un milieu homogène et isotrope; seulement, les coefficients sont alors des fonctions périodiques des coordonnées.

Les hypothèses admises reviennent donc à considérer l'éther renfermé dans un cristal comme constituant un système *périodiquement isotrope*.

3. Ce résultat paraîtra d'ailleurs fort naturel si on observe qu'un système de *points* doit être parfaitement mobile, à la manière des *fluides* pondérables dont les molécules sont sphériques, ou sont du moins assez éloignées les unes des autres pour que leur forme n'ait aucune influence sensible sur leur action mutuelle. En vertu de cette mobilité parfaite, les forces extérieures au système doivent disposer les points de manière que leur intervalle moyen soit le même autour d'un point, dans toutes les directions.

La cause particulière qui, dans les corps cristallisés ou non, retient les molécules sur les directions où elles sont plus ou moins resserrées ne peut être, suivant une remarque de Poisson [*], que la partie de leur action qui dépend de leur forme et de leur situation relatives.

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, XX^e cahier, p. 93.

Si donc on considère l'éther comme un système de points, l'état statique qu'il présente dans l'intérieur d'un corps pondérable doit être assimilé, non à la constitution d'un corps cristallisé ou d'un solide homogène déformé, mais à celle d'un *fluide* soumis à des forces extérieures. Tel serait, par exemple, un gaz magnétique répandu dans un système de petits aimants distribués périodiquement.

Il y a donc lieu de supposer que l'éther des corps pondérables n'est pas *homogène*, mais reste *isotrope*.

On verra d'ailleurs, dans la suite de ce travail, qu'il suffit d'avoir égard à la *périodicité* des coefficients dont dépendent les équations de ses mouvements vibratoires, pour expliquer, dans cette hypothèse, non-seulement la double réfraction, mais encore la polarisation elliptique et circulaire qu'impriment à la lumière certains cristaux dissymétriques. Il n'est donc pas nécessaire de supposer, comme on l'a fait jusqu'à présent, que l'action de la matière pondérable modifie l'intervalle moyen des atomes de l'éther dans les diverses directions, autour d'un même point.

Analyse.

4. Supposons d'abord l'éther en équilibre. Soient :

- μ et m les masses de deux atomes voisins;
- x, y, z les coordonnées rectangulaires de μ ;
- $x + h, y + k, z + l$, celles de m ;
- r la distance des deux atomes;
- $\mu m r f(r)$ leur action mutuelle.

Les composantes suivant les axes de la force accélératrice exercée par m sur μ sont $mh f(r), mk f(r), ml f(r)$, et en désignant par X, Y, Z les composantes de la force accélératrice exercée par la matière sur ce même point, les équations de l'équilibre sont

$$(1) \quad \begin{cases} X + \sum mh f(r) = 0, \\ Y + \sum mk f(r) = 0, \\ Z + \sum ml f(r) = 0, \end{cases}$$

le \sum s'étendant à tous les atomes m compris dans la sphère d'action de μ .

5. Supposons maintenant que le milieu vibre. Soient u, v, w les déplacements de μ et $u + \delta u, v + \delta v, w + \delta w$ ceux de m : la distance de ces points devient $r + \delta r$, et en négligeant les produits des δ , on a, pour les composantes de la force accélératrice exercée sur le point μ par l'éther environnant,

$$(2) \quad \begin{cases} \sum mh f(r) + \sum m f(r) \delta u + \sum mh f'(r) \delta r, \\ \sum mk f(r) + \sum m f(r) \delta v + \sum mk f'(r) \delta r, \\ \sum ml f(r) + \sum m f(r) \delta w + \sum ml f'(r) \delta r. \end{cases}$$

Si on suppose enfin que les déplacements de l'éther sont très-petits par rapport aux dimensions d'un parallélépipède élémentaire de l'assemblage moléculaire, les variations correspondantes de X, Y, Z sont négligeables, et, en ayant égard aux équations (1), on obtient pour les équations du mouvement

$$(3) \quad \begin{cases} D_i^2 u = \sum m f(r) \delta u + \sum mh f'(r) \delta r, \\ D_i^2 v = \sum m f(r) \delta v + \sum mk f'(r) \delta r, \\ D_i^2 w = \sum m f(r) \delta w + \sum ml f'(r) \delta r. \end{cases}$$

La variation δr est donnée par la formule

$$(r + \delta r)^2 = (h + \delta u)^2 + (k + \delta v)^2 + (l + \delta w)^2,$$

qui se réduit à

$$r \delta r = h \delta u + k \delta v + l \delta w$$

dans l'approximation adoptée.

6. Pour transformer les équations (3) en équations aux dérivées partielles, il suffit de développer les δ par la série de Taylor, suivant

la formule symbolique

$$\delta = e^{hD_x + kD_y + lD_z} - 1.$$

On obtient ainsi les équations des mouvements vibratoires sous la forme

$$(4) \quad \begin{cases} D_t^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ D_t^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ D_t^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w, \end{cases}$$

les F, G, H étant déterminés par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} F_1 = \sum m f(r) (e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} h^2 (e^\lambda - 1), \\ G_2 = \sum m f(r) (e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} k^2 (e^\lambda - 1), \\ H_3 = \sum m f(r) (e^\lambda - 1) + \sum m \frac{f'(r)}{r} l^2 (e^\lambda - 1), \\ F_2 = G_1 = \sum m \frac{f'(r)}{r} kl (e^\lambda - 1), \\ H_1 = F_3 = \sum m \frac{f'(r)}{r} lh (e^\lambda - 1), \\ G_3 = H_2 = \sum m \frac{f'(r)}{r} hk (e^\lambda - 1), \\ \lambda = hD_x + kD_y + lD_z. \end{cases}$$

Cauchy a écrit les équations (4) sous une forme symbolique fort simple. Écrivant $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ au lieu de D_x, D_y, D_z, D_t , il pose

$$(6) \quad \begin{cases} A = \sum m f(r) (e^\lambda - 1), \\ B = \sum m \frac{f'(r)}{r} \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right); \end{cases}$$

on a alors

$$(7) \quad \begin{cases} F_1 = A + D_\alpha^2 B, & F_2 = G_1 = D_\beta D_\gamma B, \\ G_2 = A + D_\beta^2 B, & H_1 = F_3 = D_\gamma D_\alpha B, \\ H_3 = A + D_\gamma^2 B, & G_3 = H_2 = D_\alpha D_\beta B; \end{cases}$$

et les équations (4) deviennent

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = Au + D_\alpha(D_\alpha Bu + D_\beta Bv + D_\gamma Bw), \\ \sigma^2 v = Av + D_\beta(D_\alpha Bu + D_\beta Bv + D_\gamma Bw), \\ \sigma^2 w = Aw + D_\gamma(D_\alpha Bu + D_\beta Bv + D_\gamma Bw), \end{cases}$$

les seconds membres représentant les fonctions symboliques F, G, H dont dépend la forme des équations auxiliaires. Le calcul de ces fonctions est ainsi ramené à celui des deux fonctions A et B dont la réduction peut d'ailleurs être effectuée comme si ses symboles α, β, γ étaient des quantités réelles.

7. Pour réduire A et B, il suffit d'employer la méthode indiquée par Cauchy dans son Mémoire sur les deux espèces d'ondes planes qui peuvent se propager dans les systèmes isotropes de points (1).

Soit un point m compris dans la sphère d'action du point μ , désignons par r la distance μm et par φ et θ la colatitude et la longitude de cette distance, de sorte que les projections de r sur les trois axes sont

$$h = r \cos \varphi, \quad k = r \sin \varphi \cos \theta, \quad l = r \sin \varphi \sin \theta.$$

Imaginons un cône très-délié, ayant son sommet au point μ , renfermant le point m et découpant sur une sphère concentrique de rayon égal à 1 l'élément superficiel ω . Décrivons de plus, du point μ comme centre, deux sphères très-rapprochées avec les rayons r et $r + \Delta r$. Le volume très-petit compris entre ces trois surfaces est $r^2 \omega \Delta r$; il renferme un grand nombre d'atomes dont la masse s'obtient en multipliant le volume par la densité de l'éther au point m , que nous supposons ne pas différer sensiblement de la densité ρ de l'éther au point μ .

On voit que l'on a, dans cette hypothèse,

$$(9) \quad \begin{cases} A = \rho \sum \sum r^2 f(r) (e^\lambda - 1) \omega \Delta r, \\ B = \rho \sum \sum r f'(r) \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) \omega \Delta r. \end{cases}$$

(1) *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. I^{er}.

Le premier signe de sommation \sum s'étend à tous les éléments ω d'une sphère de rayon égal à l'unité, et le second à toutes les valeurs de r croissant par degrés très-petits Δr d'une valeur très-petite à une limite égale au rayon de la sphère d'activité de l'éther.

Enfin, si l'on substitue, avec Poisson, à la première sommation une intégrale définie, il vient

$$(10) \quad \begin{cases} A = \rho \sum r^2 f(r) I \Delta r, \\ B = \rho \sum r f'(r) I' \Delta r, \end{cases}$$

I et I' désignant les deux intégrales définies

$$(11) \quad \begin{cases} I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi (e^\lambda - 1) \sin \varphi d\varphi, \\ I' = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \left(e^\lambda - 1 - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \right) \sin \varphi d\varphi, \end{cases}$$

où l'on a

$$\lambda = r(\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi \cos \theta + \gamma \sin \varphi \sin \theta).$$

Ces intégrales sont réductibles à une intégrale simple. En effet, d'après une formule de Poisson, on a généralement

$$(12) \quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(u) \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{k} \int_{-k}^k f(x) dx,$$

en posant

$$\begin{aligned} u &= \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi \cos \theta + \gamma \sin \varphi \sin \theta, \\ k^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de cette formule, on trouve

$$(13) \quad \begin{cases} I = 2\pi \left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2 \right) = 4\pi \left(\frac{k^2 r^2}{6} + \dots \right), \\ I' = 2\pi \left(\frac{e^{kr} - e^{-kr}}{kr} - 2 - \frac{k^2 r^2}{3} \right) = 4\pi \left(\frac{k^4 r^4}{120} + \dots \right). \end{cases}$$

Substituant enfin ces valeurs de I, I' dans les formules (10), il ne reste qu'à effectuer la sommation relative à r .

8. Cette sommation ne peut être qu'indiquée puisque la forme de la fonction $f(r)$ est inconnue. Mais, sans qu'il soit nécessaire d'effectuer le calcul, on voit que A et B sont des fonctions de k^2 . En désignant alors par B' et B'' les dérivées première et seconde de B par rapport à k^2 , et posant

$$(14) \quad \begin{cases} A + 2B' = E(k^2), & 4B'' = F(k^2), \\ \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w, \end{cases}$$

on réduit les équations (8) aux suivantes

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = E(k^2) u + F(k^2) \alpha \theta, \\ \sigma^2 v = E(k^2) v + F(k^2) \beta \theta, \\ \sigma^2 w = E(k^2) w + F(k^2) \gamma \theta. \end{cases}$$

Telles sont les équations des vibrations de l'éther, *dans le vide comme dans les milieux matériels*. Dans le vide, les coefficients sont des constantes. Dans les milieux matériels, ils sont des fonctions de x, y, z .

9. En supposant constants les coefficients des équations (15), on en déduit aisément, comme Cauchy l'a fait le premier, les propriétés des ondes planes propagées par l'éther du vide.

Pour qu'un mouvement simple représenté par les intégrales

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

soit compatible avec la constitution du système, il faut que ses paramètres satisfassent aux trois équations obtenues en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans le système (15), et en y considérant $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$, non plus comme des caractéristiques de dérivation, mais comme des constantes.

Éliminant P, Q, R, on a l'équation caractéristique qui se dédouble

comme il suit :

$$(16) \quad \sigma^2 = E(k^2),$$

$$(17) \quad \sigma^2 = E(k^2) + F(k^2)k^2.$$

Dans le premier cas, on trouve

$$(18) \quad \theta = \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

et dans le second

$$(19) \quad \frac{P}{\alpha} = \frac{Q}{\beta} = \frac{R}{\gamma},$$

relations d'où il résulte que les mouvements simples et non évanescents que peut propager l'éther du vide sont nécessairement de deux sortes : les uns dans lesquels les vibrations sont parallèles au plan des autres, sans polarisation déterminée; les autres, dans lesquels les vibrations sont perpendiculaires à ce plan. Ces deux genres de vibrations constituent les ondes *transversales* et *longitudinales*.

10. Ces propriétés cessent de subsister, en général, pour les vibrations propagées dans un milieu cristallisé. Les coefficients des équations (15) deviennent des fonctions périodiques des coordonnées, et il faut appliquer la méthode d'intégration développée dans le premier Mémoire. Les équations auxiliaires se déduisent alors, d'après la règle générale énoncée dans ce Mémoire, des trois fonctions symboliques F, G, H, qui se réduisent actuellement aux seconds membres des équations (15). D'ailleurs, la forme de ces trois fonctions se simplifie encore en ayant égard aux remarques suivantes.

11. L'observation indique que dans le vide :

- 1° Les vibrations lumineuses sont transversales;
- 2° Les rayons de différentes couleurs se propagent avec la même vitesse.

Il résulte de ces deux propriétés que la valeur de $\frac{\sigma}{k}$ déduite de l'équation (10) est indépendante de σ , et que, par suite, la fonction $E(k^2)$ se réduit sensiblement à son premier terme.

Il suffit, pour que cette condition soit réalisée, que les deux séries (13) très-convergentes à cause de la petitesse de r , se réduisent sensiblement à leurs premiers termes. Comme il n'existe d'ailleurs aucune raison de supposer que les termes négligeables dans le vide aient une valeur sensible dans l'intérieur des corps pondérables, on voit que les équations générales des vibrations se réduisent aux suivantes :

$$(20) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = ek^2 u + f\alpha\theta, \\ \sigma^2 v = ek^2 v + f\beta\gamma, \\ \sigma^2 w = ek^2 w + f\gamma\theta, \end{cases}$$

dans lesquelles e et f désignent des constantes ou des fonctions périodiques, suivant que l'on considère l'éther libre ou l'éther renfermé dans un cristal.

Les coefficients e et f ont les valeurs suivantes, d'après les formules (14), (10) et (13) :

$$(21) \quad \begin{cases} e = \frac{4\pi\rho}{6} \sum [r^4 f(r) + \frac{1}{5} r^5 f'(r)] \Delta r, \\ f = \frac{4\pi\rho}{6} \sum \frac{2}{5} r^5 f'(r) \Delta r. \end{cases}$$

12. Appliquant actuellement aux équations (20) la règle générale qui sert à former les équations auxiliaires qui régissent les vibrations moyennes [*], on trouve que ces équations sont de la forme suivante :

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = k^2 (F_1 u + F_2 v + F_3 w) + (f_1 \alpha + f_2 \beta + f_3 \gamma) \theta, \\ \sigma^2 v = k^2 (G_1 u + G_2 v + G_3 w) + (g_1 \alpha + g_2 \beta + g_3 \gamma) \theta, \\ \sigma^2 w = k^2 (H_1 u + H_2 v + H_3 w) + (h_1 \alpha + h_2 \beta + h_3 \gamma) \theta, \end{cases}$$

les f, g, h, F, G, H désignant des fonctions symboliques entières et à coefficients constants de α, β, γ .

Nous rappelons que $\sigma, \alpha, \beta, \gamma$ représentent les caractéristiques de dérivation D_t, D_x, D_y, D_z , et que l'on a, dans les équations (22),

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \quad \theta = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 17.

13. En se reportant d'ailleurs à l'analyse du Mémoire précité, on voit que les fonctions indéterminées dont dépendent les équations (22) doivent être considérées comme des séries ordonnées suivant les puissances de α , β , γ , très-rapidement convergentes en général. On pourra donc, dans une première approximation, les réduire à des constantes. Dans ce cas, les équations (22) renferment 18 termes du second ordre au lieu de 54 que laissait subsister l'analyse du premier Mémoire.

On obtient de nouvelles approximations en conservant successivement dans ces fonctions les termes du premier, du deuxième, etc., ordre par rapport à α , β , γ . Les termes dont il s'agit fournissent l'explication de la dispersion, de la polarisation elliptique et de l'extinction que présentent certains cristaux.

14. Les équations (22) constituent le résultat définitif que nous nous proposons d'obtenir dans ce Chapitre. Le système (20) dont elles dérivent, quand on y considère les coefficients comme constants, ne sont pas altérées par une substitution linéaire orthogonale appliquée aux variables x , y , z , ou, ce qui revient au même, restent les mêmes quand on déplace d'une manière quelconque autour de l'origine le système des axes coordonnés.

Les hypothèses d'où se déduisent les équations (20) reviennent par conséquent à considérer l'éther comme présentant, en chacun de ses points, la même constitution dans toutes les directions.

Cette constitution varie d'ailleurs d'un point à un autre de l'éther compris dans l'intérieur d'un corps; mais, en un point déterminé, elle est la même dans tous les sens. Ainsi se trouve justifiée la dénomination de *périodiquement isotrope* que nous avons employée au commencement de ce Chapitre pour caractériser la constitution que présente probablement l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

15. Les équations (22) reçoivent d'importantes réductions par suite de la symétrie propre aux divers systèmes cristallins. On obtient ces réductions par la méthode générale qui est développée dans notre premier Mémoire.

D'après cette méthode [*], on détermine l'influence des divers élé-

[*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XII, 1867, p. 25.

ments de symétrie communs au polyèdre moléculaire et à l'assemblage cristallin, en exprimant que les équations auxiliaires, mises sous la forme générale

$$(23) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 u + F_2 v + F_3 w, \\ \sigma^2 v = G_1 u + G_2 v + G_3 w, \\ \sigma^2 w = H_1 u + H_2 v + H_3 w, \end{cases}$$

ne sont pas altérées par certaines substitutions linéaires appliquées simultanément à u, v, w et à α, β, γ . Les seconds membres des équations (21) sont linéaires et homogènes par rapport à u, v, w , et de cette condition résulte essentiellement la forme que présentent, suivant les cas, les F, G, H fonctions de α, β, γ .

Cela posé, si on revient aux équations (22), et si on observe :

1° Que k^2 et θ se reproduisent identiquement quand on applique une substitution linéaire quelconque aux variables u, v, w et α, β, γ ;

2° Que les termes proportionnels à k^2 et à θ sont fonctions linéaires et homogènes, les premiers de u, v, w , les seconds de α, β, γ .

Il sera aisé de conclure que, dans chaque symétrie particulière, les fonctions F_1 et f_1 des équations (22) seront composées en α, β, γ comme la fonction F_1 des équations (23); les fonctions F_2 et f_2 du système (22) comme la fonction F_2 du système (23), et ainsi de suite.

On pourra donc écrire sans difficulté, en se reportant aux divers systèmes précédemment obtenus [*], les diverses classes d'équations auxiliaires qui se déduisent des équations (22), quand on tient compte, non-seulement du système cristallin, mais encore des divers cas de méridrie (hémiedrie ou tétartoédrie) que présente chaque système.

16. Parmi les divers systèmes d'équations que l'on obtient ainsi, il faut remarquer celui qui est relatif à l'*holoaxie centrée de la symétrie terbinaire* (système du prisme droit à base rectangle), lorsque dans une première approximation on réduit les équations auxiliaires à l'homogénéité.

Ce système doit fournir, en effet, l'explication complète des phénomènes optiques que présentent (quand on néglige la dispersion) les

[*] *Loc. cit.*, p. 34 et suivantes.

cristaux holoédriques connus sous le nom de *cristaux à deux axes optiques*, c'est-à-dire des phénomènes qui, sous le nom de *double réfraction* et *polarisation*, ont si vivement attiré, depuis Fresnel, l'attention des physiciens et des géomètres.

Or, en ayant égard aux remarques du numéro précédent, on obtient immédiatement les équations dont il s'agit :

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f k^2 u + f_1 \alpha \theta, \\ \sigma^2 v = g k^2 v + g_1 \beta \theta, \\ \sigma^2 w = h k^2 w + h_1 \gamma \theta, \end{cases}$$

les f, g, h de ces formules représentant des paramètres constants.

Rétablissant enfin les caractéristiques de dérivation, on obtient le système suivant :

$$(25) \quad \begin{cases} D_x^2 u = f (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) u + f_1 D_x (D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_x^2 v = g (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) v + g_1 D_y (D_x u + D_y v + D_z w), \\ D_x^2 w = h (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) w + h_1 D_z (D_x u + D_y v + D_z w). \end{cases}$$

Ces équations conduisent à de nouvelles et importantes propriétés des ondes lumineuses, dont l'étude fait l'objet d'un des Chapitres suivants.

Nous nous bornerons à remarquer ici que ces équations renferment *six paramètres distincts*. L'étude approfondie des phénomènes lumineux semble indiquer que *trois* seulement de ces paramètres, correspondant aux *trois indices principaux de réfraction*, sont réellement indépendants.

On verra, en effet, que l'on reproduit exactement les faits d'observation en supposant les trois relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Il paraît assez difficile de déterminer avec précision la cause physique de ces dernières relations, qui introduisent une extrême simplicité dans les équations des phénomènes et dans l'énoncé des lois qui en résultent. Nous essayerons cependant de montrer, dans le Chapitre

suivant, comment on peut en retrouver l'origine dans une hypothèse de Fresnel sur la constitution de l'éther. La discussion qui fait l'objet de ce Chapitre signalera plus d'un rapprochement entre les principes de la théorie que nous exposons et les hypothèses admises par l'illustre physicien sur la nature intime de l'agent qui propage les phénomènes lumineux.

CHAPITRE III.

REMARQUES SUR DEUX POINTS FONDAMENTAUX DE LA THÉORIE PHYSIQUE DE LA LUMIÈRE.

REMARQUE I. — *L'hypothèse de Fresnel sur la variation de densité que la matière pondérable imprime à l'éther peut servir de base à une théorie de la double réfraction.*

1. On sait qu'une des hypothèses admises par Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* consiste à supposer que l'indice de réfraction d'une substance est proportionnel à la racine carrée de la densité de l'éther, contrairement aux idées admises depuis par Mac-Cullagh et M. Newmann, qui supposent que la densité de l'éther est la même dans tous les corps, et que son élasticité est seule altérée différemment par les divers milieux pondérables.

Or cette hypothèse de l'illustre physicien ne paraît guère conciliable avec les idées qu'il avait précédemment adoptées dans son célèbre *Mémoire sur la double réfraction*, où, négligeant toute variation de densité de l'éther dans les cristaux, il attribue la production des phénomènes à une variation de l'élasticité dans les diverses directions autour d'un point.

De là une sorte de contradiction que les considérations développées dans le Chapitre précédent font complètement disparaître, en établissant que la théorie de la double réfraction peut être exclusivement basée, comme celle de la réflexion, sur la variation périodique qu'éprouve la *densité* de l'éther dans l'intérieur des corps cristallisés.

2. En effet, les équations (25) du Chapitre précédent renferment évidemment une théorie complète de la double réfraction et de la po-

larisation, qui, si l'on fait provisoirement abstraction des relations naturelles qui peuvent exister entre les paramètres, ne doit différer de celle de Fresnel que par certaines particularités relatives à la direction des vibrations et à la forme de la surface des ondes. Ces équations ont été d'ailleurs déduites du système (20), en supposant seulement que les coefficients e et f sont des fonctions périodiques des coordonnées.

3. Cela posé, il est aisé de voir que la périodicité de ces deux coefficients dépend de celle d'un seul élément, qui est la *densité de l'éther*. En se reportant, en effet, aux valeurs (12) de e, f , on voit qu'elles s'obtiennent en multipliant la densité ρ par certaines sommes dont le calcul ne pourrait être achevé que si l'on connaissait la loi qui régit les actions intérieures de l'éther.

En considérant l'éther comme continu, les sommes pourraient être réduites à des intégrales définies prises entre deux limites égales à zéro et au rayon de la sphère d'activité de l'éther. Elles auraient donc des valeurs égales pour l'éther libre ou pour l'éther renfermé dans un corps quelconque, de sorte que e et f seraient proportionnels à la densité.

Mais, suivant une remarque de Poisson, ces intégrations autour d'un point ne sont pas admissibles en général, et il est nécessaire de considérer les \sum comme des sommes aux différences finies.

4. Dans ce cas, on pourra effectuer ces sommations sur des termes tous proportionnels à l'*intervalle moyen* δ qui sépare deux points voisins de l'éther. Cet intervalle peut être considéré comme constant dans toute l'étendue de la sphère d'activité, puisqu'il est lié à la densité, supposée constante dans la même étendue, par une relation de la forme $\rho = \frac{k}{\delta^3}$, k désignant un nombre constant.

En conséquence, le résultat final des sommations ne pourra contenir que des nombres, des constantes dépendant de la fonction des forces intérieures, et enfin l'intervalle δ . Les sommes \sum sont des fonctions de δ , qui, puisque δ est inversement proportionnel à $\rho^{\frac{1}{3}}$, se transforment

en fonctions de ρ . On peut donc poser

$$e = \varphi(\rho), \quad f = \psi(\rho),$$

et l'on voit clairement ainsi qu'il suffit d'admettre une variation périodique de la densité pour déduire des équations (20), par la méthode générale d'intégration, le système auxiliaire (25), d'où on déduit enfin les lois qui régissent la double réfraction et la polarisation des vibrations moyennes.

REMARQUE II. — *Les relations qui existent entre les paramètres des équations auxiliaires peuvent être rattachées à la cause physique qui, suivant une hypothèse de Fresnel, produit l'absence de toute vibration longitudinale dans l'éther.*

5. Nous avons remarqué, à la fin du Chapitre précédent, que l'on était conduit à des résultats conformes aux faits observés, en supposant entre les paramètres des équations (25) les relations

$$f + f_1 = g + g_1 = h + h_1 = 0.$$

Pour admettre ces relations, il suffit d'admettre que les deux fonctions φ et ψ sont égales et de signes contraires, de sorte que l'on a

$$(1) \quad \varphi(\rho) + \psi(\rho) = 0.$$

Or il est remarquable que dans cette hypothèse la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans l'éther libre, déduite de l'équation $\sigma^2 = (e + f)k^2$, se réduit à zéro.

On voit donc que la relation hypothétique (1) revient à attribuer à l'éther cette inaptitude à propager les vibrations longitudinales que Fresnel considérait comme la propriété caractéristique de ce milieu élastique.

6. Sans rechercher ici quelle peut être l'origine de cette propriété, nous l'admettrons avec la relation fondamentale (1), qui en est la formule équivalente, comme un postulat dont l'exactitude est démontrée par la confirmation expérimentale des conséquences qui en résultent.

Nous supposons donc désormais que les vibrations de l'éther, dans un milieu quelconque, sont régies par les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = e(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = e(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = e(k^2 w - \gamma\theta), \end{cases}$$

dans lesquelles e désigne une fonction de la densité, et, par suite, une fonction périodique des coordonnées.

En posant, pour abrégé,

$$(3) \quad U = k^2 u - \alpha\theta, \quad V = k^2 v - \beta\theta, \quad W = k^2 w - \gamma\theta,$$

on trouve que le système des équations auxiliaires est réductible à la forme

$$(4) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = F_1 U + F_2 V + F_3 W, \\ \sigma^2 v = G_1 U + G_2 V + G_3 W, \\ \sigma^2 w = H_1 U + H_2 V + H_3 W, \end{cases}$$

et que les F, H, G , fonctions de α, β, γ , éprouvent, par suite de la symétrie cristalline, les mêmes réductions que les fonctions désignées par les mêmes lettres dans le système général des équations auxiliaires considérées au second Chapitre de notre premier Mémoire. Par suite, on obtiendra les équations (4) relatives aux divers systèmes et cas particuliers de mériédrie, en écrivant U, V, W au lieu de u, v, w dans les seconds membres des équations obtenues dans le Mémoire précité.

7. Pour donner une idée des résultats définitifs que fournit la théorie précédente, nous avons réuni dans un tableau, à la fin de ce Chapitre, les équations aux dérivées partielles qui, *en conservant les termes du second et du troisième ordre*, régissent les vibrations lumineuses dans les principaux systèmes.

Nous laissons de côté les systèmes *asymétrique* et *binnaire*, qui donnent lieu à des équations assez complexes, et exigent, suivant toute probabilité, l'emploi spécial de certaines coordonnées obliques.

Nous renvoyons enfin aux deux Chapitres suivants l'étude des propriétés principales des ondes planes.

8. Il importe d'observer que les principes d'où résultent ces équations font de notre théorie une sorte de commentaire à celle qu'a adoptée Fresnel dans son *Mémoire sur les modifications que la réflexion imprime à la lumière polarisée* [*]. Ce Mémoire peut être considéré comme l'expression des idées définitives de son auteur sur le mécanisme des phénomènes optiques. Il est, en effet, postérieur au *Mémoire sur la double réfraction* [**] et à un premier *Mémoire sur la réflexion* [***], où Fresnel a cherché à expliquer les lois de ce phénomène à l'aide d'hypothèses autres que celles d'une densité variable de l'éther.

Les physiciens ne verront donc peut-être pas sans intérêt que les notions fondamentales qui ont paru les plus plausibles à l'illustre physicien suffisent à une théorie complète de la double réfraction et de la polarisation rectiligne, et permettent même d'obtenir analytiquement les lois de la polarisation elliptique et circulaire constatées expérimentalement sur la lumière propagée par certains cristaux hémisédriques.

TABEAU DES ÉQUATIONS QUI RÉGISSENT LES PHÉNOMÈNES OPTIQUES DANS LES CRISTAUX CLASSÉS D'APRÈS LA NATURE ET LE NOMBRE DE LEURS ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE.

Observation générale. — On a simplifié les équations ci-après en observant que la dilatation cubique θ des vibrations lumineuses, rigoureusement nulle dans les milieux isotropes, est généralement *très-petite* dans les cristaux. On peut, par suite, réduire approximativement, dans les termes du troisième ordre, U, V, W aux valeurs simples

$$U = k^3 u, \quad V = k^2 v, \quad W = k^2 w.$$

[*] Janvier 1823.

[**] Novembre 1821.

[***] Novembre 1819.

I. — Symétrie terbinaire.

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* [$\Lambda^2, 2L^2, C, \Pi, 2P$] :

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [$\Lambda^2, 2L^2, oC, oP$] :

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \gamma u + \varphi_2 \beta w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \alpha w + \chi_2 \gamma u), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \beta u + \psi_2 \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémi-axie dichosymétrique* [$\Lambda^2, oL^2, oC, 2P$] :

$$(7) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + k^2(\varphi_1 \alpha u + \varphi_2 \beta v + \varphi_3 \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2(\chi_1 \beta u + \chi_2 \alpha v), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(\psi_1 \gamma u + \psi_2 \alpha w). \end{cases}$$

II. — Symétrie ternaire.

1° *Holoaxie centrée ou homoédrie* [$\Lambda^3, 3L^2, C, \Pi, 3P^2$] :

$$(8) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [$\Lambda^3, 3L^2, oC, oP$] :

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2(\beta w - \gamma v), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) - k^2(g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) + h_1 k^2(\beta v - \gamma w), \\ \sigma^2 w = h(k^2 w - \gamma\theta) + k^2(g_1 \beta u + g_2 \alpha v) - h_1 k^2(\beta w + \gamma v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^3 , oL^2 , oC , $3P$] :

$$(10) \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2 (\beta v + \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2 (g_1 \beta u + g_2 \alpha v) + h_1 k^2 (\beta v - \gamma w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2 (g_1 \gamma u + g_2 \alpha w) - h_1 k^2 (\beta w + \gamma v). \end{cases}$$

III. — *Symétries quaternaire et sénnaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* [Λ^4 , $4L^2$, C , Π , $4P^2$], [Λ^6 , $6L^2$, C , Π , $6P^2$] :

$$(11) \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [Λ^2 , $4L^2$, oC , oP], [Λ^6 , $6L^2$, oC , oP] :

$$(12) \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2 (\beta w - \gamma v), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) - k^2 (g_1 \gamma u + g_2 \alpha w), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2 (g_1 \beta u + g_2 \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémiaxie dichosymétrique* [Λ^4 , oL^2 , oC , $4P$], [Λ^6 , oL^2 , oC , $6P$] :

$$(13) \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta) + f_1 k^2 (\beta v + \gamma w), \\ \sigma^2 v = g(k^2 v - \beta\theta) + k^2 (g_1 \beta u + g_2 \alpha v), \\ \sigma^2 w = g(k^2 w - \gamma\theta) + k^2 (g_1 \gamma u + g_2 \alpha w). \end{cases}$$

IV. — *Symétrie terquaternaire.*

1° *Holoaxie centrée* ou *homoédrie* [$3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C , $3P^4$, $6P^2$] :

$$(14) \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha\theta), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta\theta), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma\theta). \end{cases}$$

2° *Holoaxie hémisymétrique* [3L⁴, 4L³, 6L², oC, oP] :

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha \theta) + f_1 k^2 (\gamma v - \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta \theta) + f_1 k^2 (\alpha w - \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma \theta) + f_1 k^2 (\beta u - \alpha v). \end{cases}$$

3° *Hémi-axie hémisymétrique* [3L², 4L³, oC, oP] :

$$(16) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha \theta) + k^2 (f_1 \gamma v + f_2 \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta \theta) + k^2 (f_1 \gamma w + f_2 \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma \theta) + k^2 (f_1 \beta u + f_2 \alpha v). \end{cases}$$

4° *Hémi-axie dichosymétrique* [3L², 4L³, oC, 6P] :

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma^2 u = f(k^2 u - \alpha \theta) + f_1 k^2 (\gamma v + \beta w), \\ \sigma^2 v = f(k^2 v - \beta \theta) + f_1 k^2 (\alpha w + \gamma u), \\ \sigma^2 w = f(k^2 w - \gamma \theta) + f_1 k^2 (\beta u + \alpha v). \end{cases}$$

CHAPITRE IV.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHÉR RENFERMÉ DANS UN MILIEU HOMOÉDRIQUE.

1. Ce Chapitre est consacré à l'étude des ondes planes déduite des formules (5), (8) et (14) du tableau précédent.

Voici le résumé des principaux résultats obtenus :

Dans les cristaux à deux axes optiques, l'équation aux vitesses des ondes planes coïncide *rigoureusement* avec celle de Fresnel.

Quant à la polarisation, elle est déterminée par le théorème suivant : *La vibration d'une onde plane est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant; elle est de plus perpendiculaire au rayon.* La vibration n'est donc pas comprise dans le plan de l'onde, comme le supposait Fresnel; sa direction fait avec ce plan un angle qui pour certains corps très-biréfringents, l'azotate de soude par exemple, peut dépasser 9 degrés.

2. Ce résultat conduit à des conséquences importantes pour la théorie de la réflexion et de la réfraction de la lumière à la surface des cristaux.

Bien que ces conséquences ne soient pas développées dans ce Mémoire, nous croyons devoir les indiquer brièvement, afin de préciser les circonstances qui servent de contrôle à la théorie et aux hypothèses sur lesquelles elle est basée.

3. La théorie de la réflexion et de la réfraction cristallines comprend deux problèmes distincts :

Le premier a pour objet la recherche des équations de condition auxquelles satisfont les déplacements atomiques sur la surface de séparation des deux milieux ;

Le second comprend l'étude des mouvements simples ou par ondes planes que peuvent propager ces milieux.

4. *Principales solutions du premier problème.* — Dans ces recherches sur la réflexion, Fresnel a admis : 1° que le déplacement d'un atome de la surface réfringente, *estimé parallèlement à cette surface*, dans l'onde réfractée, se confond avec la résultante de ses déplacements estimés de la même manière dans l'onde incidente et dans l'onde réfléchie ; 2° que la force vive des ondes réfléchie et réfractée est égale à celle de l'onde incidente.

Ces principes donnent trois équations à la surface. Il en faut quatre dans le cas des cristaux. Mac-Cullagh et M. Newmann ont complété la solution en étendant le *principe de continuité* de Fresnel aux déplacements *estimés suivant la normale* à la surface réfringente.

De son côté, Cauchy a obtenu, par diverses méthodes dont la rigueur serait difficilement contestée, quatre équations de condition qui reproduisent celles de Fresnel par la suppression de certains termes très-petits, mais sont incompatibles avec la quatrième condition introduite par Mac-Cullagh et M. Newmann.

5. *Principales solutions du second problème.* — Le second problème a été l'objet de nombreuses recherches des physiciens et des géomètres.

Suivant Fresnel, la vibration est dans le plan de l'onde et est dirigée dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux.

D'après Mac-Cullagh et M. Newmann, elle est située dans le plan de l'onde et est perpendiculaire au rayon. M. Lamé trouve le même résultat dans ses *Leçons sur l'Élasticité*.

D'après notre théorie, la vibration est dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon, comme le supposait Fresnel, et elle est perpendiculaire au rayon.

6. Cela posé, lorsque l'on introduit la polarisation de Fresnel dans les équations à la surface de Cauchy, on obtient des formules qui représentent la marche générale des phénomènes, mais attribuent à certains éléments directement mesurables, tels que les angles de polarisation totale, des valeurs numériques notablement différentes des valeurs observées.

Au contraire, en combinant la polarisation de Mac-Cullagh et de M. Newmann avec les équations à la surface admises par ces physiciens, on obtient des formules parfaitement concordantes avec les faits.

Enfin, en combinant les équations à la surface de Cauchy avec la polarisation que nous avons trouvée, on reproduit les formules exactes de Mac-Cullagh et de M. Newmann.

7. Dans son *Traité d'Optique physique*, M. Billet avait déjà remarqué qu'il n'est pas nécessaire d'apporter à la théorie de Fresnel les modifications profondes introduites par Mac-Cullagh et M. Newmann, pour ramener entre les limites des erreurs expérimentales les différences entre les résultats du calcul et ceux de l'observation. La modification qui place la vibration perpendiculaire au rayon lui paraît seule importante.

C'est cette modification qu'introduisent les hypothèses fondamentales de ce Mémoire.

Il est à peine nécessaire de faire remarquer qu'elles laissent, conformément à la théorie de Fresnel, la vibration perpendiculaire au plan de polarisation dans les milieux isotropes. La théorie de Mac-Cullagh et de M. Newmann la place au contraire dans ce plan.

8. En résumé, si on accepte comme rigoureuses les considérations sur lesquelles reposent les équations de condition données par Cauchy,

on est conduit à admettre que la théorie opposée à celle de Fresnel a abordé le problème à l'aide de deux hypothèses physiquement fausses, qui, par suite d'une compensation, ont fourni un résultat définitif conforme à la réalité.

Bien que donnant des formules moins exactes, les principes fondamentaux de Fresnel paraissent plus voisins de la vérité; et c'est parce que la théorie que nous exposons ici apporte à ces principes la modification nécessaire pour supprimer toute discordance avec les faits que nous croyons à la réalité physique du principe introduit.

9. Terminons par une dernière observation. Les équations auxquelles nous sommes parvenus pour représenter les propriétés optiques des cristaux à deux axes, lorsque l'on néglige la dispersion, sont essentiellement distinctes de celles auxquelles satisfont les vibrations d'un système *homogène* d'atomes ou de molécules. Bien qu'elles ne renferment que trois paramètres, il est impossible de les faire rentrer dans les équations des vibrations des systèmes de points matériels données par Cauchy, ou même dans les équations à 36 indéterminées de M. Lamé.

Leur forme dérive essentiellement de la *constitution périodique* du milieu vibrant, c'est-à-dire d'un état statique qu'on ne peut expliquer simplement qu'en admettant qu'il est dû aux actions perturbatrices d'un second milieu différent. Ce résultat est important parce qu'il implique la nécessité de faire intervenir dans la production des phénomènes lumineux deux systèmes distincts qui ne peuvent être que la matière pondérable, et cet agent mystérieux et insaisissable, l'éther, que toutes les théories physiques s'accordent aujourd'hui à révéler à notre esprit comme l'élément le plus actif, le plus puissant de la force universelle.

Analyse.

10. Les généralités du Chapitre I^{er} permettront d'établir rapidement les propriétés des ondes planes.

Conformément aux notations de ce Chapitre, ces propriétés seront déduites des intégrales simples correspondantes prises sous la forme

$$\frac{u}{P} = \frac{v}{Q} = \frac{w}{R} = e^{\alpha x + \beta y + \gamma z - \sigma t},$$

et les relations entre les constantes s'obtiendront, dans chaque cas, en écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w dans chacun des groupes du tableau général, et en y considérant $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ comme des quantités, et non comme des symboles.

Suivant une remarque faite précédemment (Chap. I^{er}, n^o 10), nous supposerons constamment que le plan d'une onde évanescence est parallèle au plan à partir duquel elle s'éteint. En désignant alors par l, m, n les cosinus des angles que la normale à l'onde fait avec les axes, on aura

$$\alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn;$$

et le rapport $\omega = \frac{\sigma}{k}$ sera réel ou imaginaire, suivant que l'onde ne sera pas ou sera évanescence. Dans le premier cas, il se réduira à la vitesse de propagation de l'onde.

Cela posé, nous passons à l'étude des cas particuliers.

Symétrie terbinaire.

II. Les équations relatives à ce cas sont les équations (5) du tableau. En y écrivant P, Q, R au lieu de u, v, w , il vient

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma^2 P = f(k^2 P - \alpha \theta), \\ \sigma^2 Q = g(k^2 Q - \beta \theta), \\ \sigma^2 R = h(k^2 R - \gamma \theta), \end{cases}$$

où on suppose toujours $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\theta = \alpha P + \beta Q + \gamma R$.

Éliminant P, Q, R, on obtient l'équation caractéristique

$$(2) \quad \frac{f\alpha^2}{\sigma^2 - fk^2} + \frac{g\beta^2}{\sigma^2 - gk^2} + \frac{h\gamma^2}{\sigma^2 - hk^2} + 1 = 0.$$

De plus, des équations (1), on déduit les rapports

$$(3) \quad \frac{P}{\left(\frac{f\alpha}{\sigma^2 - fk^2}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{g\beta}{\sigma^2 - gk^2}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{h\gamma}{\sigma^2 - hk^2}\right)} = -\theta.$$

12. Si l'on pose actuellement dans les équations (2) et (3)

$$\alpha = kl, \quad \beta = km, \quad \gamma = kn, \quad \omega = \frac{\sigma}{k},$$

$$\varphi = lP + mQ + nR,$$

elles se transforment comme il suit

$$(4) \quad \frac{fl^2}{\omega^2 - f} + \frac{gm^2}{\omega^2 - g} + \frac{hn^2}{\omega^2 - h} + 1 = 0,$$

$$(5) \quad \frac{P}{\left(\frac{fl}{\omega^2 - f}\right)} = \frac{Q}{\left(\frac{gm}{\omega^2 - g}\right)} = \frac{R}{\left(\frac{hn}{\omega^2 - h}\right)} = -\varphi.$$

Telles sont les équations d'où résultent les lois de la propagation et de la polarisation du mouvement.

L'équation (4) résolue par rapport à ω^2 admet évidemment deux racines positives et une racine nulle. Aux deux premières correspondent deux ondes se propageant sans s'affaiblir dans la même direction, avec des vitesses différentes.

Pour la racine $\omega^2 = 0$ les équations se réduisent aux suivantes

$$(6) \quad \frac{P}{l} = \frac{Q}{m} = \frac{R}{n} = \varphi.$$

Ces équations correspondent à un mouvement simple *longitudinal*; mais la condition $\omega^2 = 0$ montre que ce mouvement ne peut se propager.

Les deux autres racines ω^2 sont fournies par l'équation

$$(7) \quad \frac{l^2}{\omega^2 - f} + \frac{m^2}{\omega^2 - g} + \frac{n^2}{\omega^2 - h} = 0,$$

qui coïncide rigoureusement avec l'équation aux vitesses des ondes planes trouvée par Fresnel. Mais le mode de polarisation qui résulte alors des formules (5) diffère notablement de celui qui se déduit de la théorie de l'illustre physicien.

13. On voit d'abord que les quantités P, Q, R étant proportionnelles à des quantités réelles (Chap. I, n° 7), la trajectoire ato-

mique se réduit à une ligne droite. La polarisation est donc *rectiligne*.

Pour la définir avec précision, il est utile de rappeler brièvement le calcul de la *surface des ondes*.

On sait que son équation s'obtient en cherchant l'enveloppe du plan

$$(8) \quad lx + my + nz = \omega,$$

les paramètres l, m, n, ω étant liés par l'équation (7) et la relation

$$(9) \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

D'après la théorie des enveloppes, on doit différentier successivement les équations (7), (8) et (9) par rapport aux deux paramètres laissés indépendants, on obtient ainsi les équations ci-dessous, où l'on a représenté, pour abrégé, par \mathcal{F} le premier membre de l'équation (7) :

$$(10) \quad \begin{cases} x + z \frac{dn}{dl} - \frac{d\omega}{dl} = 0, \\ l + n \frac{dn}{dl} = 0, \\ \frac{d\mathcal{F}}{dl} + \frac{d\mathcal{F}}{dn} \frac{dn}{dl} + \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} \frac{d\omega}{dl} = 0, \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} y + z \frac{dn}{dm} - \frac{d\omega}{dm} = 0, \\ m + n \frac{dn}{dm} = 0, \\ \frac{d\mathcal{F}}{dm} + \frac{d\mathcal{F}}{dn} \frac{dn}{dm} + \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} \frac{d\omega}{dm} = 0, \end{cases}$$

et l'équation de l'enveloppe s'obtient en éliminant les paramètres l, m, n, ω et les dérivées partielles de n et ω entre les équations (7), (8), (9), (10) et (11). On simplifie l'élimination, en substituant aux équations (10) et (11) les suivantes

$$(12) \quad \begin{cases} x + \lambda l + \mu \frac{d\mathcal{F}}{dl} = 0, \\ y + \lambda m + \mu \frac{d\mathcal{F}}{dm} = 0, \\ z + \lambda n + \mu \frac{d\mathcal{F}}{dn} = 0, \\ -1 + \mu \frac{d\mathcal{F}}{d\omega} = 0. \end{cases}$$

En effet, l'élimination de λ et μ entre les équations (12) conduit au même résultat que l'élimination des dérivées partielles de n et ω entre les équations (10) et (11).

Ajoutons que les équations (12) déterminent les coordonnées x, y, z du point de contact de l'enveloppe avec le plan tangent et, par suite, la direction du *rayon lumineux* correspondant à l'onde plane qui se propage dans la direction (l, m, n) .

14. Ajoutant les trois premières équations (12) respectivement multipliées 1° par $\frac{dF}{dl}, \frac{dF}{dm}, \frac{dF}{dn}$; 2° par l, m, n ; 3° par x, y, z , et observant que l'on a $l \frac{dF}{dl} + m \frac{dF}{dm} + n \frac{dF}{dn} = 2F = 0$, il vient

$$\begin{aligned} x \frac{dF}{dl} + y \frac{dF}{dm} + z \frac{dF}{dn} + \mu \left[\left(\frac{dF}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dm} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dn} \right)^2 \right] &= 0, \\ \omega + \lambda &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \mu \left(x \frac{dF}{dl} + y \frac{dF}{dm} + z \frac{dF}{dn} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que $\left(\frac{dF}{dl} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dm} \right)^2 + \left(\frac{dF}{dn} \right)^2 = -\frac{1}{\omega} \frac{dF}{d\omega}$.

Observant de plus que $\mu \frac{dF}{d\omega} = 1$, et posant $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, les trois relations ci-dessus deviennent

$$(13) \quad \begin{cases} x \frac{dF}{dl} + y \frac{dF}{dm} + z \frac{dF}{dn} = \frac{1}{\omega}, \\ \lambda = -\omega, \\ \mu = -\omega(\rho^2 - \omega^2). \end{cases}$$

Portant les valeurs de λ et μ dans les équations (12) on a

$$(14) \quad \begin{cases} x = l\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2) \frac{dF}{dl}, \\ y = m\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2) \frac{dF}{dm}, \\ z = n\omega + \omega(\rho^2 - \omega^2) \frac{dF}{dn}; \end{cases}$$

ou bien

$$(15) \quad \frac{x}{\rho^2 - f} = \frac{l\omega}{\omega^2 - f}, \quad \frac{y}{\rho^2 - g} = \frac{m\omega}{\omega^2 - g}, \quad \frac{z}{\rho^2 - h} = \frac{n\omega}{\omega^2 - h};$$

ajoutant enfin ces dernières équations, respectivement multipliées par x , y , z , et ayant égard à la première des équations (13), on obtient l'équation de la surface des ondes

$$(16) \quad \frac{x^2}{\rho^2 - f} + \frac{y^2}{\rho^2 - g} + \frac{z^2}{\rho^2 - h} = 1.$$

15. Revenant actuellement aux équations (5), on voit que les projections du déplacement atomique sont proportionnelles aux quantités

$$\frac{fl}{\omega^2 - f}, \quad \frac{gm}{\omega^2 - g}, \quad \frac{hn}{\omega^2 - h},$$

que nous désignerons par X , Y , Z . On a d'ailleurs identiquement

$$(17) \quad \begin{cases} X = \frac{\omega^2 l}{\omega^2 - f} - l = \omega^2 \frac{dF}{dl} - l, \\ Y = \frac{\omega^2 m}{\omega^2 - g} - m = \omega^2 \frac{dF}{dm} - m, \\ Z = \frac{\omega^2 n}{\omega^2 - h} - n = \omega^2 \frac{dF}{dn} - n; \end{cases}$$

formules qui permettent, en ayant égard aux valeurs (13) de λ et μ , d'écrire les équations (14) comme il suit

$$(18) \quad \begin{cases} x - \frac{\rho^2}{\omega} l + \frac{\mu}{\omega^2} X = 0, \\ y - \frac{\rho^2}{\omega} m + \frac{\mu}{\omega^2} Y = 0, \\ z - \frac{\rho^2}{\omega} n + \frac{\mu}{\omega^2} Z = 0. \end{cases}$$

Éliminant $\frac{\rho^2}{\omega}$ et $\frac{\mu}{\omega^2}$, on a la relation

$$(19) \quad X(yn - zm) + Y(zl - xn) + Z(xm - yl) = 0,$$

qui montre que *la vibration, la normale à l'onde et le rayon lumineux sont dans un même plan.*

Ajoutant enfin les équations (18) respectivement multipliées par x , y , z on a immédiatement

$$(20) \quad xX + yY + zZ = 0,$$

relation qui montre que *la vibration est perpendiculaire au rayon lumineux.*

Ces deux propriétés définissent d'une manière simple la polarisation d'une onde plane dans un milieu biréfringent, et constituent un théorème remarquable dont voici l'énoncé :

Toute onde plane propagée par un milieu biréfringent est polarisée rectilignement. La direction de la vibration est comprise dans le plan déterminé par la normale à l'onde et le rayon lumineux correspondant. Elle est de plus perpendiculaire au rayon.

Symétries ternaire, quaternaire et sénaire.

16. En supposant $h = g$, on obtient les équations relatives aux mouvements simples propagés par les milieux à un axe.

Dans ce cas, les deux racines de l'équation (4) sont les suivantes :

$$(21) \quad \omega^2 = g,$$

$$(22) \quad \omega^2 = gl^2 + f(m^2 + n^2).$$

Le premier correspond au rayon *ordinaire* des physiciens, la seconde au rayon *extraordinaire*. Le mode de polarisation se déduit sans difficulté des équations (5) qui donnent :

1° Pour l'onde ordinaire

$$(23) \quad P = 0, \quad mQ + nR = 0;$$

2° Pour l'onde extraordinaire

$$(24) \quad \frac{P}{f(m^2 + n^2)} = \frac{Q}{-glm} = \frac{R}{-gln}.$$

Ces formules montrent que la vibration *ordinaire* est comprise dans le plan de l'onde. Mais il n'en est pas de même pour l'onde extraordinaire.

On trouve sans difficulté que l'angle V compris entre la vibration extraordinaire et le plan de l'onde est déterminé par la formule

$$(25) \quad \sin V = \frac{1}{2} \frac{(f-g) \sin 2\tau}{\sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}},$$

en appelant τ l'angle que la normale à l'onde fait avec l'axe principal de symétrie.

L'observation indique que g diffère généralement fort peu de f . L'angle V est donc très-petit, mais il n'est pas nul comme le supposait Fresnel.

Pour le spath, on trouve, en donnant aux coefficients f, g les valeurs que leur attribue l'expérience, que, pour $\tau = \frac{\pi}{4}$, l'inclinaison de la vibration extraordinaire sur l'onde est de $6^\circ 12'$. Pour l'azotate de soude, qui est très-biréfringent, sa valeur s'élève à $9^\circ 38'$.

17. Il ne reste plus qu'à mentionner les phénomènes optiques des cristaux du système cubique. En ne conservant dans les équations que les termes du second ordre, ces phénomènes sont identiques à ceux qui se produisent dans le vide et dans les corps isotropes. La double réfraction disparaît, et la vitesse de propagation est seule modifiée par l'action de la matière pondérable sur l'éther.

CHAPITRE V.

SUR LES PROPRIÉTÉS DES ONDES PLANES DE L'ÉTHÉR RENFERMÉ DANS UN MILIEU HÉMIÉDRIQUE.

1. Parmi les phénomènes lumineux qui offrent le plus d'intérêt, on doit citer ceux que présentent le quartz, le sulfate de strychnine et quelques cristaux du système cubique.

Les cristaux de quartz et de sulfate de strychnine appartiennent, les premiers au système rhomboédrique, les seconds au système du prisme

droit à base carrée. Ils présentent donc un *axe principal de symétrie*, sénnaire pour le quartz, quaternaire pour le sulfate de strychnine.

Ces cristaux possèdent la propriété de transmettre, parallèlement à l'axe principal, deux systèmes d'ondes polarisées circulairement et se propageant avec des vitesses différentes. Les phénomènes constatés dans les ondes transmises dans une direction perpendiculaire à l'axe ne diffèrent pas sensiblement de ceux qui se produisent dans les cristaux biréfringents homoédriques, tels que le spath.

2. La double réfraction circulaire donne lieu au phénomène connu sous le nom de *rotation du plan de polarisation*. Ce phénomène, que le quartz et le sulfate de strychnine présentent dans une direction parallèle à l'axe principal de symétrie, est produit dans toutes les directions par certains cristaux du système cubique, le chlorate de soude par exemple.

3. Les faits que nous venons de rappeler sont d'une haute importance, et ont depuis longtemps attiré l'attention des physiciens et des géomètres. D'après les découvertes de M. Pasteur, ils sont toujours associés à une certaine dissymétrie de la forme cristalline. Dans ses *Études cristallographiques*, Bravais a précisé le genre de dissymétrie qui est l'origine de ces phénomènes, en énonçant ce fait remarquable que *tous les cristaux connus jusqu'à ce jour comme doués du pouvoir rotatoire optique, appartiennent à la catégorie des cristaux hémissymétriques* [*].

Nous verrons, en effet, que tous les faits constatés par l'expérience et les lois qui le régissent se déduisent des équations relatives aux *cristaux hémissymétriques* possédant un axe principal de symétrie.

4. Les lois qui dérivent des équations propres aux cristaux dichosymétriques sont fort différentes.

La polarisation n'est jamais circulaire : elle est toujours rectiligne ou faiblement elliptique. Ce qui semble caractériser la *dichosymétrie*, c'est l'extinction plus ou moins grande de certaines radiations lumineuses.

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34^e cahier, p. 222.

Les équations indiquent, par exemple, que les cristaux *dichosymétriques* du système *ternaire* ne peuvent transmettre que des ondes évanescentes parallèlement à l'axe principal de symétrie, et que des deux ondes propagées dans une direction perpendiculaire à l'axe, l'onde extraordinaire se propage sans s'affaiblir, et l'onde ordinaire est généralement évanescente.

Ces résultats de la théorie se constatent effectivement sur la tourmaline, dont les cristaux appartiennent à l'*hémiaxie dichosymétrique du système ternaire* [*]. On sait, en effet, qu'une plaque de tourmaline taillée perpendiculairement à l'axe éteint plus complètement la lumière qu'une plaque de même épaisseur taillée parallèlement à l'axe [**], et qu'une plaque à faces parallèles à l'axe, d'une assez faible épaisseur, éteint généralement le rayon ordinaire, et laisse passer le rayon extraordinaire.

5. Les équations relatives au sulfate de strychnine sont les équations (12) du tableau.

Celles du quartz sont en réalité les équations (9). En effet, bien que le quartz appartienne au système *sénaire*, ses cristaux sont *hémiaxes*, et la symétrie de sa molécule représentée par le symbole

$$(\Delta^3, 3L^2, oC, oP)$$

est *ternaire* [***]. Mais les termes par lesquels le système (9) diffère du système (12) sont évidemment négligeables quand les rayons transmis sont peu inclinés sur l'axe. Or, ces rayons seuls offrent des particularités importantes : on pourra par suite déduire les propriétés du quartz des équations (12).

Enfin les systèmes (10) et (15) du tableau correspondent à la tourmaline et à ceux des cristaux du système cubique (chlorate et bromate de soude, acétate d'urane, etc.) qui, d'après les expériences de M. Marbach, possèdent le pouvoir rotatoire.

[*] *Journal de l'École Polytechnique*, 34^e cahier, p. 244.

[**] Voir la *Cristallographie* de M. Des Cloizeaux.

[***] *Journal de l'École Polytechnique*, 34^e cahier, p. 240.

6. Nous ajouterons que le tableau comprend aussi (système n° 6) les équations qui régissent les phénomènes optiques des cristaux hémisymétriques du système prismatique.

Ces équations sont assez simples, et ne renferment qu'un assez petit nombre de paramètres indéterminés.

Il sera intéressant de rechercher les lois qui s'en déduisent pour les comparer aux faits d'expérience auxquels donnent lieu certains cristaux, tels que le *formiate de strontiane*, étudié par M. Violette, l'*asparagine*, le *glucosate de sel marin*, etc., qui remplissent, suivant Bravais, les conditions de symétrie dont il s'agit.

Nous essayerons de le faire dans un autre travail. En se limitant aux faits qui ont été signalés précédemment, et à ceux qui font l'objet du Chapitre précédent, la théorie nous semble offrir un accord avec l'observation assez satisfaisant pour que les principes qui lui servent de base paraissent dignes de l'attention des physiciens.

Les relations nouvelles qu'elle établit entre les phénomènes optiques des corps et leur forme cristalline nous paraissent particulièrement importantes, parce que leur vérification expérimentale doit être considérée comme une confirmation, non-seulement de la théorie des ondes, mais encore des conceptions sur lesquelles repose, dans l'état actuel de la science, l'explication des phénomènes et des lois cristallographiques.

Analyse.

7. *Holoaxie hémisymétrique des systèmes quaternaire et sénnaire.* — Écrivant P, Q, R au lieu de μ , ν , w dans les équations (12) du Chapitre III, et posant dans les mêmes équations

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\sigma}{k}, & \alpha &= kl, & \beta &= km, & \gamma &= kn, \\ \varphi &= lP + mQ + nR, \\ \varepsilon &= \omega^2 - f, & \varepsilon' &= \omega^2 - g, \end{aligned}$$

on obtient le système suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi + f_1k(mR - nQ), \\ \varepsilon'Q = -gm\varphi - k(g_1nP + g_2lR), \\ \varepsilon'R = -gn\varphi + k(g_1mP + g_2lQ). \end{cases}$$

Par suite, P, Q, R, φ sont respectivement proportionnels aux quantités

$$\begin{aligned} & fl\epsilon'^2 + g_2 k^2 l [fg_2 l^2 + gf_1 (m^2 + n^2)], \\ & gm\epsilon\epsilon' - kln (gg_2 \epsilon + fg_1 \epsilon') - g_1 k^2 m [fg_2 l^2 + gf_1 (m^2 + n^2)], \\ & gn\epsilon\epsilon' + klm (gg_2 \epsilon + fg_1 \epsilon') - g_1 k^2 n [fg_2 l^2 + gf_1 (m^2 + n^2)], \\ & - \epsilon\epsilon'^2 - g_2^2 k^2 l^2 \epsilon + f_1 g_1 k^2 (m^2 + n^2) \epsilon'. \end{aligned}$$

Je pose

$$(2) \quad \begin{cases} A = g_2 l^2 + f_1 (m^2 + n^2), \\ B = g_2 l^2 - g_1 (m^2 + n^2), \\ \Delta = gg_2 \epsilon + fg_1 \epsilon', \\ \delta = g - f, \end{cases}$$

et je néglige le produit de deux paramètres f_1, g_1, g_2 multiplié par une des différences $\delta, \epsilon, \epsilon'$; je trouve ainsi : 1° les rapports

$$(3) \quad \frac{P}{fl(\epsilon'^2 + g_2 k^2 A)} = \frac{Q}{gm(\epsilon\epsilon' - g_1 k^2 A) - kln\Delta} = \frac{R}{gn(\epsilon\epsilon' - g_1 k^2 A) + klm\Delta} = \frac{\varphi}{-\epsilon\epsilon'^2};$$

2° l'équation caractéristique

$$(4) \quad \epsilon'^2 + \delta (m^2 + n^2) \epsilon' + k^2 AB = 0.$$

8. Soit τ l'angle que la normale à l'onde plane fait avec l'axe de symétrie, on aura

$$\begin{aligned} l &= \cos \tau, \quad \sqrt{m^2 + n^2} = \sin \tau, \\ A &= g^2 \cos^2 \tau + f_1 \sin^2 \tau, \quad B = g_2 \cos^2 \tau - g_1 \sin^2 \tau, \end{aligned}$$

et l'équation (4), résolue par rapport à ϵ' , fournira les deux valeurs

$$2\epsilon' = -\delta \sin^2 \tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4 \tau - 4k^2 AB},$$

le signe + correspondant à l'onde ordinaire et le signe - à l'onde extraordinaire.

Dans ces valeurs on peut, avec une approximation suffisante, remplacer k sous le radical par la valeur approchée $\sqrt{g} \sigma$ ou $\sqrt{g} si$, et

l'on obtient ainsi

$$(5) \quad 2\varepsilon' = -\delta \sin^2 \tau \pm \sqrt{\delta^2 \sin^4 \tau + 4g_2^2 AB}.$$

On voit aisément que, pour des rayons peu inclinés sur l'axe, les deux valeurs de ω qui résultent de la formule (5) sont réelles : par suite, les deux ondes se propagent sans extinction.

9. Par suite aussi, la valeur de k , correspondant à chacune des deux ondes, est imaginaire de la forme hi . Les rapports (3) peuvent donc s'écrire

$$(6) \quad \frac{P}{fl(\varepsilon'^2 - g_2 h^2 A)} = \frac{Q}{gm(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A) - hln \Delta i} = \frac{R}{gn(\varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A) + hlm \Delta i} = \frac{\varphi}{-\varepsilon\varepsilon'}.$$

Ces expressions peuvent être transformées à l'aide de l'équation (4). On tire, en effet, de cette équation

$$\begin{aligned} \varepsilon'^2 - g_2 h^2 A &= -(m^2 + n^2) [\delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2) A], \\ \varepsilon\varepsilon' + g_1 h^2 A &= l^2 [\delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2) A]; \end{aligned}$$

par suite, en posant

$$(7) \quad \lambda = \delta\varepsilon' + h^2(g_1 + g_2) A,$$

il viendra

$$(8) \quad \frac{P}{-fl(m^2 + n^2)\lambda} = \frac{Q}{gml^2\lambda - hln \Delta i} = \frac{R}{gnl^2\lambda + hlm \Delta i} = \frac{\varphi}{-\varepsilon\varepsilon'^2},$$

ou bien, en désignant par τ l'angle que fait avec l'axe des x la normale à l'onde, et par ω l'azimut de cette ligne compté à partir du plan xoy ,

$$(9) \quad \frac{P}{-f \sin \tau \lambda} = \frac{Q}{g \cos \omega \cos \tau \lambda - h \sin \omega \Delta i} = \frac{R}{g \sin \omega \cos \tau \lambda + h \cos \omega \Delta i}.$$

La polarisation qui résulte de ces formules est généralement elliptique. Pour étudier les lois de cette polarisation, nous négligerons le produit de deux des quantités f_1, g_1, g_2 , et même celui d'une de ces

quantités par δ ou un paramètre de même ordre. En admettant cette approximation, on a les réductions suivantes.

10. Onde extraordinaire. — Nous réduisons les valeurs (7) et (2) de λ et Δ aux suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda &= \delta \varepsilon', \\ \Delta &= g (g_2 \varepsilon + g_1 \varepsilon'),\end{aligned}$$

et y remplaçons, au même degré d'approximation, $\varepsilon, \varepsilon'$ par leurs valeurs approchées

$$\varepsilon = \delta \cos^2 \tau, \quad \varepsilon' = -\delta \sin^2 \tau,$$

de sorte que

$$\Delta = g \delta (g_2 \cos^2 \tau - g_1 \sin^2 \tau) = g \delta B.$$

Par suite, les formules (9) deviennent

$$(10) \quad \frac{P}{-f \sin \tau \varepsilon'} = \frac{Q}{g (\cos \omega \cos \tau \varepsilon' - h \sin \omega B i)} = \frac{R}{g (\sin \omega \cos \tau + h \cos \omega \Delta i)}.$$

Tous les éléments de la trajectoire elliptique se déduisent comme on l'a observé (Chapitre I, n° 5) de la quantité $P^2 + Q^2 + R^2$, qui se réduit, dans le cas actuel, à la suivante :

$$M e^{\theta i} = \varepsilon'^2 (f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau) - g^2 h^2 B^2,$$

d'où l'on tire évidemment

$$(11) \quad \begin{cases} M = \varepsilon'^2 (f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau) - g^2 h^2 B^2, \\ \theta = 0. \end{cases}$$

De plus, l'intensité du mouvement est donnée par la formule

$$(12) \quad I = \varepsilon'^2 (f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau) + g^2 h^2 B^2.$$

On aura donc, pour la valeur $\rho = \sqrt{\frac{I-M}{I+M}}$ du rapport du petit axe au grand

$$(13) \quad \rho = \frac{ghB}{\varepsilon' \sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}},$$

ou, approximativement,

$$(14) \quad \rho = \frac{hB}{\varepsilon'}.$$

L'argument θ se réduisant à zéro, les projections du demi-petit axe sont représentées par les coefficients de i dans P, Q, R. D'après les valeurs (10), ces projections sont proportionnelles à

$$0, \quad \sin \omega, \quad -\cos \omega,$$

d'où l'on déduit immédiatement :

Que le petit axe de l'ellipse est perpendiculaire à l'axe principal de symétrie et est compris dans le plan de l'onde, de sorte qu'il est perpendiculaire au plan déterminé par la normale à l'onde plane et l'axe de symétrie.

Pour achever de déterminer les éléments du mouvement elliptique, il suffit de calculer l'angle V que le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde. On obtient cet angle en déduisant préalablement des formules (10) les cosinus des angles que la normale au plan des deux axes de l'ellipse fait avec les axes des coordonnées. On trouve ainsi

$$\sin V = \frac{1}{2} \frac{(g-f) \sin^2 \tau}{\sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}}.$$

Par suite, au degré d'approximation adopté, l'angle du plan de l'ellipse avec l'onde plane extraordinaire se confond avec celui que forme, dans les cristaux homoédriques, la vibration rectiligne extraordinaire avec le plan de l'onde.

11. Onde ordinaire. — Désignant par ε_1 la racine de l'équation (4) qui correspond à l'onde ordinaire, et par ε' celle qui se rapporte à l'onde extraordinaire, on a

$$\varepsilon' \varepsilon_1 = -h^2 AB.$$

Par suite, la valeur (7) de λ relative à l'onde extraordinaire peut être

mise sous la forme

$$\lambda = \frac{-\delta h^2 AB + \varepsilon' h^2 (g_1 + g_2) A}{\varepsilon'}.$$

Remplaçant au numérateur ε' par sa valeur approchée $-\delta \sin^2 \tau$ et B par sa valeur $g_2 \cos^2 \tau - g_1 \sin^2 \tau$, on obtient

$$(15) \quad \lambda = -\frac{\delta h^2 g_2 A}{\varepsilon'}.$$

Quant à la valeur de Δ , elle peut être réduite dans l'approximation adoptée à

$$(16) \quad \Delta = g g_2 \delta.$$

En tenant compte des valeurs (15) et (16) de λ et Δ , les rapports (9) deviennent

$$(17) \quad \frac{P}{-fh \sin \tau A} = \frac{Q}{g(h \cos \omega \cos \tau A + \varepsilon' \sin \omega i)} = \frac{R}{g(h \sin \omega \cos \tau A - \varepsilon' \cos \omega i)}.$$

La quantité $P^2 + Q^2 + R^2$ devient alors

$$h^2 A^2 (f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau) - g^2 \varepsilon'^2,$$

de sorte que l'on a

$$(18) \quad \begin{cases} M = g^2 \varepsilon'^2 - h^2 A^2 (f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau), \\ \theta = \pi. \end{cases}$$

Dans ce cas, le rapport du petit axe au grand est donné par la formule

$$(19) \quad \rho = \frac{g \varepsilon'}{h A \sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}},$$

ou approximativement

$$(20) \quad \rho = \frac{\varepsilon'}{h A}.$$

L'argument θ étant égal à π , on aura $e^{-\frac{i\theta}{2}} = -i$. Donc d'après le

théorème général du Chapitre I les projections du demi-grand axe sont les parties réelles des trois quantités que l'on obtient en multipliant par $-i$ les quantités auxquelles les constantes P, Q, R sont proportionnelles d'après les relations (17). On en conclut que la direction du grand axe de la trajectoire elliptique ordinaire coïncide avec le petit axe de la trajectoire elliptique extraordinaire.

12. Le sens du mouvement elliptique dans chacun des deux rayons dépend, comme on l'a vu (Chap. I, n° 8), du signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{Q}{P}$. Ce coefficient est égal à $\frac{gh \sin \omega}{f \sin \tau} \frac{B}{g'}$ pour le rayon extraordinaire, et à $-\frac{g \sin \omega}{fh \sin \tau} \frac{e'}{A}$ pour le rayon ordinaire. D'ailleurs, pour des valeurs de τ voisines de zéro, le signe de B et celui de A sont égaux à celui de $g_2 \cos^2 \tau$. Donc, le mouvement elliptique s'effectue en sens inverse dans les ondes ordinaire et extraordinaire.

13. En résumé, on voit que dans les cristaux hémisymétriques qui ont un axe principal :

1° Deux ondes planes peuvent se propager dans la même direction avec des vitesses différentes données par la formule

$$(21) \quad \omega^2 = g - \frac{\delta \sin^2 \tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2 \sin^4 \tau}{4} + g s^2 AB},$$

le signe + appartenant à l'onde ordinaire, et le signe - à l'onde extraordinaire ;

2° Les deux ondes planes qui peuvent se propager dans une direction inclinée sur l'axe principal sont polarisées elliptiquement.

Le grand axe de la vibration ordinaire est perpendiculaire à la section principale. Le plan de la trajectoire se confond avec celui de l'onde.

La direction du petit axe de la vibration extraordinaire se confond avec celle du grand axe de la vibration ordinaire. Le plan de la trajectoire fait avec le plan de l'onde un angle très-petit déterminé par la formule

$$(22) \quad \sin V = \frac{1}{2} \frac{\delta \sin^2 \tau}{\sqrt{f^2 \sin^2 \tau + g^2 \cos^2 \tau}},$$

3° Le rapport du petit axe au grand, dans les ondes ordinaire et extraordinaire, est donné par les formules

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\varepsilon'}{h(g_2 \cos^2 \tau + f_1 \sin^2 \tau)}, \\ \rho' = \frac{h(g_2 \cos^2 \tau - g_1 \sin^2 \tau)}{\varepsilon'}, \\ 2\varepsilon' = -\delta \sin^2 \tau - \sqrt{\delta^2 \sin^2 \tau + 4g_2^2 (g_2 \cos^2 \tau + f_1 \sin^2 \tau)(g_2 \cos^2 \tau - g_1 \sin^2 \tau)}. \end{array} \right.$$

Le rapport des axes diminue à mesure que la direction des ondes s'éloigne de l'axe principal.

Pour les ondes dont la direction est peu inclinée sur l'axe, les deux valeurs de ρ satisfont sensiblement à la relation

$$\rho\rho' = 1.$$

Enfin, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

14. En supposant $\tau = 0$, les formules (23) donnent $\varepsilon' = hg_2 \cos^2 \tau$, $\rho = \rho' = 1$. Donc les ondes propagées parallèlement à l'axe principal de symétrie sont polarisées *circulairement*.

Il est remarquable que ce résultat soit indépendant de toute hypothèse sur la constitution de l'éther, et soit la conséquence nécessaire de la modification particulière de la forme cristalline que Bravais a désignée sous le nom d'hémisymétrie.

Si on considère, en effet, les équations générales des vibrations de l'éther renfermé dans un cristal hémisymétrique doué d'un axe principal de symétrie, sous la forme que nous leur avons trouvée dans notre premier Mémoire, on voit qu'elles se réduisent aux suivantes pour les ondes perpendiculaires à l'axe

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 u = f_1 u, \\ \sigma^2 v = g_2 v - G_2 \alpha w, \\ \sigma^2 w = g_2 w + G_2 \alpha v; \end{array} \right.$$

f_1 , g_2 , G_2 désignant nécessairement des fonctions de α^2 . Par suite, les propriétés des ondes planes se déduisent des relations obtenues en

écrivait P, Q, R au lieu de u, v, w dans les équations ci-dessus. Or, si on ajoute ces relations respectivement multipliées par P, Q, R, on obtient la condition nécessaire et suffisante de la polarisation circulaire $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$.

15. M. Airy a démontré le premier que dans le quartz les rayons inclinés sur l'axe sont polarisés elliptiquement. Il a montré que les faits observés s'expliquent en admettant que les vibrations s'exécutent en sens inverse suivant deux ellipses dont les grands axes sont à angle droit, et qui s'allongent de plus en plus quand la direction des rayons s'éloigne de l'axe [*].

Les formules de la théorie confirment cette hypothèse, et donnent le rapport des axes dans chaque ellipse et la différence de marche des deux rayons. Elles concordent avec celles que Cauchy a données pour les rayons peu inclinés sur l'axe, et que M. Jamin a vérifiées par ses belles recherches expérimentales [**].

16. *Hémiaxie dichosymétrique du système ternaire.* — On déduit des équations (10) du tableau (Chap. III), le système suivant

$$(25) \quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi + f_1 k(mQ + nR), \\ \varepsilon' R = -gm\varphi + k(g_1 mP + g_2 lQ) + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' Q = -gn\varphi + k(g_1 nP + g_2 lR) - h_1 k(mR + nQ). \end{cases}$$

En négligeant les produits deux à deux des coefficients des termes du troisième ordre, on peut remplacer dans ces termes P, Q, R par les valeurs que prennent ces quantités, quand on ne prend que les termes du second ordre.

En opérant ainsi, on obtient le résultat que voici :

17. 1° *Onde ordinaire.* — Une première approximation donne

$$P = 0, \quad \varphi = 0.$$

[*] Transactions de Cambridge, 1832.

[**] Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. XXX.

Introduisant ces valeurs dans les termes du troisième ordre, il vient

$$(26) \quad \begin{cases} \varepsilon P = -fl\varphi \\ \varepsilon' Q = -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k(mQ - nR), \\ \varepsilon' R = -gn\varphi + g_2 klR - h_1 k(mR + nQ). \end{cases}$$

D'ailleurs, au même degré d'approximation, on déduit de l'équation $mQ + nR = 0$, les relations

$$\frac{Q}{n} = \frac{R}{-m} = \frac{mQ - nR}{2mn} = \frac{mR + nQ}{-m^2 + n^2} = \frac{nQ - mR}{m^2 + n^2},$$

qui permettent d'écrire la deuxième et la troisième des équations (26), sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \varepsilon' Q &= -gm\varphi + g_2 klQ + h_1 k \frac{2mn}{m^2 + n^2} (nQ - mR), \\ \varepsilon' R &= -gn\varphi + g_2 klR + h_1 k \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} (nQ - mR). \end{aligned}$$

En multipliant la première de ces nouvelles équations par n , la deuxième par m , et retranchant les résultats l'un de l'autre, on a l'équation caractéristique

$$(27) \quad \omega^2 = g + g_2 kl + h_1 k \frac{3mn^2 - m^3}{m^2 + n^2}.$$

18. 2° Onde extraordinaire. — Multiplions la première équation (26) par ε , et les deux autres par ε' . Dans les résultats, substituons aux P, Q, R des termes du troisième ordre ainsi qu'à $\varepsilon, \varepsilon'$ leurs valeurs approchées tirées des formules (21), (22) et (24) du Chapitre IV. Négligeons enfin les produits de f_1, g_1, g_2, h_1 par $\delta = g - f$. Il vient

$$(28) \quad \begin{cases} \varepsilon\varepsilon' P = -[fl\varepsilon' + gf_1 k(m^2 + n^2)]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' Q = -\left[gm\varepsilon + gg_1 klm + gg_2 k \frac{l^2 m}{m^2 + n^2} + gh_1 k \frac{l^2(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \\ \varepsilon\varepsilon' R = -\left[gn\varepsilon + gg_1 kln + gg_2 k \frac{l^2 n}{m^2 + n^2} - gh_1 k \frac{2l^2 mn}{m^2 + n^2}\right]\varphi, \end{cases}$$

et on en déduit l'équation caractéristique

$$(29) \quad \omega^2 = f + \delta l^2 - (f_1 + g_1)kl(m^2 + n^2) + g_2kl^3 + h_1k \frac{l^2(m^3 - 3mn^2)}{m^2 + n^2}.$$

19. Soit τ l'angle de la normale à l'onde avec ox , et ω son azimut.

$$l = \cos \tau, \quad m = \sin \tau \cos \omega, \quad n = \sin \tau \sin \omega,$$

les équations (27) et (29) deviennent

$$(30) \quad \omega^2 = g + k(g_2 \cos \tau - h_1 \sin \tau \cos 3\omega),$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 = f + \delta \cos^2 \tau \\ + k \cos \tau [g_2 \cos^2 \tau - (f_1 + g_1) \sin^2 \tau + h_1 \sin \tau \cos \tau \cos 3\omega]. \end{array} \right.$$

Pour qu'une onde plane persistante se propage sans s'affaiblir, il faut que k soit de la forme hi et la valeur de ω réelle. Or les équations (30) et (31) ne peuvent être satisfaites par de pareilles valeurs de k et ω . Les ondes sont donc généralement évanescentes.

Mais si on suppose $\cos \tau = 0$, c'est-à-dire si le plan de l'onde est parallèle à l'axe principal, le coefficient de k s'annule dans l'équation (31). Dans la même hypothèse, il ne s'annule pas dans l'équation (30).

Donc une *onde plane ordinaire* parallèle à l'axe est généralement évanescente, et une *onde plane extraordinaire* peut se propager sans s'affaiblir.

Une onde plane ordinaire peut cesser d'être évanescente, d'après la formule (30), quand on a $\cos \tau = 0$, $\cos 3\omega = 0$, c'est-à-dire quand elle est parallèle à l'axe principal et perpendiculaire à un des trois plans de symétrie de l'assemblage. Il serait intéressant de rechercher expérimentalement les phénomènes que présente une tourmaline dans ces conditions.

20. *Holoaxie hémisymétrique du système terquaternaire*. [Équations (15) du tableau]. — Les propriétés des ondes planes résultent des équations

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega^2 - f) P = -fl \varphi + f_1 k (n Q - m R), \\ (\omega^2 - f) Q = -fm \varphi + f_1 k (l R - n P), \\ (\omega^2 - f) R = -fn \varphi + f_1 k (m P - l Q). \end{array} \right.$$

En ajoutant ces équations multipliées par l , m , n , il vient

$$\omega^2 \varphi = 0$$

d'où $\omega^2 = 0$ ou bien $\varphi = 0$. Cette dernière condition est celle des ondes lumineuses. En l'introduisant dans (32), on a

$$(33) \quad \begin{cases} (\omega^2 - f) P = f_1 k (n Q - m R), \\ (\omega^2 - f) Q = f_1 k (l R - n P), \\ (\omega^2 - f) R = f_1 k (m P - l Q). \end{cases}$$

Des deux premières équations (3), on tire les relations

$$(34) \quad \frac{P}{f_1^2 k^2 l n - (\omega^2 - f) f_1 k m} = \frac{Q}{f_1^2 k^2 m n + (\omega^2 - f) f_1 k l} = \frac{R}{f_1^2 k^2 n^2 + (\omega^2 - f)^2},$$

qui, en ayant égard à $lP + mQ + nR = 0$ donnent l'équation caractéristique

$$(35) \quad (\omega^2 - f)^2 + f_1^2 k^2 = 0$$

qui pour une valeur de k de la forme hi fournit deux valeurs réelles de ω . Le milieu propage donc sans extinction, avec des vitesses différentes, deux ondes planes dans la même direction.

21. La polarisation se déduit immédiatement des équations (33) qui entraînent la relation $P^2 + Q^2 + R^2 = 0$. Elle est donc *circulaire*.

D'ailleurs, en tenant compte de l'équation (35), les relations (34) deviennent

$$(36) \quad \frac{P}{ln \mp mi} = \frac{Q}{mn \pm li} = \frac{R}{n^2 - 1}.$$

Le signe du coefficient de i dans le rapport $\frac{Q}{R}$ change donc quand on passe d'une des deux ondes à l'autre. Par suite, les deux ondes sont polarisées en sens contraires.

En résumé, les cristaux holoaxes hémisymétriques du système terquaternaire propagent dans toutes les directions deux ondes planes polarisées circulairement en sens inverse et possédant des vitesses de propagation différentes. De là résulte le pouvoir rotatoire.

