JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BOUSSINESQ

Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 13 (1868), p. 377-424.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__377_0>

Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides;

Par M. J. BOUSSINESQ [*].

Ce Mémoire a principalement pour but de montrer : en premier lieu, que les formules données par Navier, pour représenter les mouvements des fluides en tenant compte du frottement, sont exactes et d'accord avec les faits (sauf une modification à introduire dans les conditions relatives à la surface), lorsque les vitesses des molécules fluides varient d'une manière continue d'un point aux points voisins; en deuxième lieu, que, si les mêmes formules ne s'appliquent pas aux mouvements dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts, cela doit tenir à ce que les molécules fluides décrivent alors des lignes sinueuses, et, par leurs passages irréguliers les unes devant les autres, développent des résistances très-différentes de celles qui auraient lieu si les vitesses ne variaient pas brusquement d'un point aux points voisins. Les mouvements sont bien réguliers dans les tubes capillaires : aussi les expériences très-précises de M. Poiseuille sur l'écoulement permanent des liquides dans de pareils tubes [**], et celles de M. Graham sur la transpiration des gaz [***], sont-elles complétement d'accord avec la théorie.

---

[*] Ce travail a été présenté le 27 juillet 1868 à l'Académie des Sciences, qui, dans sa séance du 3 août, en a ordonné l'insertion au *Recueil des Savants étrangers*. Depuis j'ai ajouté les §§ VI, XI, XII : M. de Saint-Venant, auteur du Rapport, a bien voulu m'indiquer les questions qui sont traitées dans ces paragraphes.

[**] *Comptes rendus* (27 novembre 1843, t. XVII, p. 124). *Voir* aussi les expériences antérieures de Girard (*Mémoires de l'Institut*, 1813, 1814, 1815), et celles de Coulomb (*Mémoires de la première classe de l'Institut*, an VI, t. III).

[***] *Physique moléculaire* de M. l'Abbé Moigno, p. 117.

Je trouve d'abord des équations indéfinies qui reviennent à celles de Navier. Je les établis presque sans calcul, et sans avoir besoin d'admettre, entre deux molécules très-voisines, une attraction ou une répulsion proportionnelles à la vitesse avec laquelle elles s'écartent ou s'approchent l'une de l'autre. La modification que je fais subir aux conditions relatives à la surface, modification vraisemblable *à priori* et montrée nécessaire par les faits, consiste à supposer la vitesse nulle près d'une paroi mouillée.

J'étudie ensuite le mouvement d'un liquide par filets rectilignes et parallèles. Il existe pour la dépense, soit dans l'état permanent des vitesses, soit dans leur état variable, des lois simples qui conviennent à toutes les sections normales de même forme, quelle que soit cette forme. Je démontre ces lois, et je traite spécialement les deux cas d'une section elliptique et d'une section rectangulaire.

La méthode employée dans la question précédente me permet d'obtenir les lois de l'écoulement des fluides dans les tubes très-étroits, droits ou courbes, et de section normale variable.

Je termine par un essai sur le mouvement permanent des liquides dans des tubes ou des canaux horizontaux à axe circulaire. Le mouvement ne peut se faire par filets circulaires et conaxiques que dans le seul cas où le liquide n'a ni fond, ni couvercle, mais est indéfini dans le sens vertical. S'il y a un fond et une surface libre, les molécules liquides, en même temps qu'elles avancent parallèlement à l'axe du lit, sont animées d'un mouvement transversal : celles qui sont près de la surface libre et possèdent la plus grande vitesse, vont à la dérive du côté du bord extérieur ou concave; les plus superficielles sont même jetées contre ce bord; puis elles plongent, perdent une partie de leur vitesse et refluent vers le bord convexe où elles remontent pour recommencer un trajet pareil. La masse fluide n'avance donc qu'en se tordant sans cesse, ou en formant un tourbillon. Lorsque le liquide est contenu dans un tube qu'il remplit, il y a deux tourbillons au lieu d'un. Le liquide contenu dans la moitié inférieure du tube en forme un premier pareil au précédent, et celui qui remplit la partie supérieure en forme un second symétrique du premier.

On sait qu'aux tournants des rivières la berge concave est sans cesse creusée, tandis que la berge convexe s'atterrit : cela doit être en effet, si les eaux sont jetées avec force contre la première et arrivent, au contraire, avec une petite vitesse sur la seconde.

§ I. — *Forces développées dans les fluides par le mouvement.*

Un fluide naturel, dont les molécules glissent à côté les unes des autres et s'écartent beaucoup des positions relatives qu'elles occupaient d'abord, peut être assimilé à un corps peu solide qui se déformerait sous l'action des plus petits efforts, et qui, dans son mouvement, passerait par une infinité d'états moléculaires distincts. Dans chacun de ces états, le corps pourrait rester en équilibre; mais le mouvement les détruit aussitôt après qu'ils se sont formés, pour les remplacer par d'autres. La résistance qu'oppose le fluide à sa déformation durant un instant très-court, est évidemment d'autant plus grande qu'est plus grand lui-même le nombre d'états moléculaires par lesquels il passe dans cet instant : cela revient à dire qu'elle dépend, en chaque point, de la vitesse relative des molécules très-voisines du point considéré. Cette résistance constitue, par ses composantes tangentielles, le frottement des fluides : nous nous proposons de l'évaluer.

Soient : x, y, z trois coordonnées rectangulaires d'un point M de l'espace; u, v, w les composantes suivant les axes, à l'époque t, de la vitesse que possède la molécule qui passe en M à cette époque. Si nous supposons les mouvements continus, c'est-à-dire les vitesses peu variables d'un point aux points voisins, les composantes, suivant les axes, de celle de la molécule qui passe en un point $(x+h,\ y+k,\ z+l)$ très-voisin de M, seront sensiblement

$$\begin{aligned}
&u + \frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l,\\
&v + \frac{dv}{dx}h + \frac{dv}{dy}k + \frac{dv}{dz}l,\\
&w + \frac{dw}{dx}h + \frac{dw}{dy}k + \frac{dw}{dz}l.
\end{aligned}$$

On voit que les vitesses relatives des molécules voisines de M sont déterminées par les dérivées partielles de u, v, w en x, y, z. Donc les forces développées par le mouvement dépendront de ces dérivées.

Concevons qu'on mène en M un élément plan quelconque, dont la normale fasse avec les axes des angles ayant respectivement pour cosinus d, e, f. Soient p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} les trois composantes, suivant les mêmes axes, de la force rapportée à l'unité de surface qui est exercée sur cet élément plan du côté où l'on a mené la normale. Les raisonnements exposés aux §§ 7 et 9 des *Leçons sur l'Élasticité* de M. Lamé, donneront

$$(1) \qquad \begin{cases} p_{nx} = \mathrm{N}_1 \mathrm{d} + \mathrm{T}_3 \mathrm{e} + \mathrm{T}_2 \mathrm{f}, \\ p_{ny} = \mathrm{T}_3 \mathrm{d} + \mathrm{N}_2 \mathrm{e} + \mathrm{T}_1 \mathrm{f}, \\ p_{nz} = \mathrm{T}_2 \mathrm{d} + \mathrm{T}_1 \mathrm{e} + \mathrm{N}_3 \mathrm{f}, \end{cases}$$

N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 désignant les composantes des forces exercées sur l'unité de surface des trois éléments perpendiculaires aux axes. Nous venons de voir qu'elles sont fonctions de $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$: comme nous n'avons pas de raison pour supposer les dérivées partielles de ces fonctions nulles ou infinies pour des valeurs nulles des variables, nous pourrons les développer par la série de Maclaurin, et nous arrêter même aux termes du premier degré quand les dérivées partielles de u, v, w en x, y, z ne seront pas trop grandes. Les expressions des forces développées par le mouvement seront donc pareilles à celles des forces élastiques dans un corps solide : seulement u, v, w y désigneront, non pas, comme pour les forces élastiques, les trois déplacements suivant les axes de la molécule dont x, y, z sont les coordonnées primitives, mais bien les trois vitesses suivant les mêmes axes de la molécule qui passe en (x, y, z) à l'époque t. Si nous observons qu'un fluide est isotrope, et que, d'autre part, lors d'un changement de coordonnées rectangulaires en d'autres rectangulaires, les vitesses u, v, w se transforment comme les déplacements de même nom relatifs à la théorie de l'élasticité, et les actions spéciales aux fluides, d'après (1), comme les forces élastiques, nous verrons que l'isotropie permet de mettre les premières de ces forces sous la même forme que les secondes. En désignant par p, K, H trois coefficients indépendants de u, v, w, et par θ la somme $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$, nous aurons donc, comme pour les forces élastiques dans un milieu isotrope,

$$(2)\quad\begin{cases} N_1 = -p + K\theta + 2H\dfrac{du}{dx}, & T_1 = H\left(\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dw}{dy}\right), \\ N_2 = -p + K\theta + 2H\dfrac{dv}{dy}, & T_2 = H\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right), \\ N_3 = -p + K\theta + 2H\dfrac{dw}{dz}, & T_3 = H\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right) \text{ [*]}. \end{cases}$$

Le coefficient p représente la pression qui serait exercée au point (x, y, z) du fluide, si les molécules perdaient instantanément leurs vitesses tout en gardant les mêmes places relatives. Quant aux coefficients H et K, ils varient sans doute avec la nature du fluide, et avec tous les éléments qui modifient sa constitution, tels que, par exemple, la température et la pression. Mais, lorsque ces éléments ne changent pas beaucoup, on peut négliger les variations de H et K, qui sont très-petites par rapport à H et K eux-mêmes.

Cherchons les équations du mouvement. Soient : ρ la densité du fluide; X, Y, Z les composantes, suivant les axes, de la force extérieure qui agit sur l'unité de masse; u', v', w' les trois accélérations, suivant les axes, de la molécule M. La considération du parallélipipède rectangle élémentaire donnera les trois équations du mouvement. La première est

$$\frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz} + \rho X = \rho u',$$

ou bien, d'après les formules (2), si nous représentons avec M. Lamé par Δ_2 l'expression symbolique $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, et si nous substituons à u' sa valeur connue,

$$(3)\quad -\frac{dp}{dx} + (H + K)\frac{d\theta}{dx} + H\Delta_2 u + \rho X = \rho\left(\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right).$$

Les deux autres équations se déduisent de celle-là par une ou par deux permutations circulaires, effectuées sur : x, y, z; u, v, w; X, Y, Z.

---

[*] *Voir* la Note I, à la fin du Mémoire.

Dans le cas d'un liquide, c'est-à-dire d'un fluide sensiblement incompressible, on sait que la condition de continuité est

$$(4) \qquad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0;$$

ce qui annule dans (2) les termes en K et dans (3) le terme en H + K. Ces formules deviennent ainsi pareilles à celles qu'à trouvées Navier.

A la surface du fluide, les vitesses u, v, w devront vérifier des relations spéciales, que nous chercherons seulement pour deux cas particuliers :

1° Près d'une paroi fixe mouillée par le fluide, les trois composantes u, v, w seront nulles. En effet, puisque une différence extrêmement petite de vitesse entre molécules très-voisines développe une force sensible, une différence finie de vitesse entre les molécules de la paroi et celles du fluide en contact développerait un frottement incomparablement plus considérable. Ce frottement, pour faire équilibre à l'action tangentielle exercée par le fluide sur sa surface, devra donc correspondre à une vitesse très-petite et analytiquement nulle.

2° A la surface libre d'un liquide, nous admettrons que ce liquide n'éprouve pas un frottement appréciable de la part du gaz adjacent. Les trois conditions s'obtiendront, en exprimant que les deux composantes tangentielles de la force exercée par le liquide sur sa surface libre sont nulles, et que la composante normale fait équilibre à la pression atmosphérique.

§ II. — *Mouvement rectiligne d'un liquide.*

Nous allons traiter en détail le cas d'un liquide homogène dont les molécules se meuvent suivant des droites parallèles. La surface sera un cylindre, parallèlement aux génératrices duquel nous prendrons l'axe des x. On aura donc

$$v = 0, \quad w = 0;$$

la condition (4) de continuité, réduite à

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

montre que la valeur u de la vitesse est seulement fonction de y, z et t. Enfin, nous admettrons que les composantes X, Y, Z de la force extérieure soient les trois dérivées partielles en x, y, z d'une même fonction U, en sorte que

$$X = \frac{dU}{dx}, \quad Y = \frac{dU}{dy}, \quad Z = \frac{dU}{dz}.$$

Les formules (2) deviennent

$$(5) \qquad N_1 = N_2 = N_3 = -p, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = H\frac{du}{dz}, \quad T_3 = H\frac{du}{dy},$$

et celles du mouvement

$$(6) \quad \frac{dp}{dx} - \rho\frac{dU}{dx} = H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt}, \quad \frac{dp}{dy} - \rho\frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dp}{dz} - \rho\frac{dU}{dz} = 0.$$

En retranchant de la première, différentiée par rapport à y, la seconde, différentiée par rapport à x, il vient

$$(6\ bis) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dy}\left(H\,\Delta_2 u - \rho\dfrac{du}{dt}\right) = 0. \\ \text{On aura de même} \\ \dfrac{d}{dz}\left(H\,\Delta_2 u - \rho\dfrac{du}{dt}\right) = 0. \end{array}\right.$$

On sait d'ailleurs que u ne dépend pas de x. Donc, en désignant par $\varphi(t)$ une fonction du temps, la même pour tous les points du fluide, on pourra poser

$$(7) \qquad H\,\Delta_2 u - \rho\frac{du}{dt} = \varphi(t).$$

Cette relation, comparée à la première (6), donne

$$(8) \qquad \varphi(t) = \frac{dp}{dx} - \rho\frac{dU}{dx}.$$

Les trois équations (6), respectivement multipliées par dx, dy, dz, ajoutées et intégrées, deviennent elles-mêmes

$$(9) \qquad p = \text{une fonction } \psi(t) + \rho U + x\varphi(t).$$

On déterminera $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, en exprimant que la pression p prend, en deux points, situés par exemple l'un au commencement et l'autre à la fin du canal rectiligne qui contient le liquide, deux valeurs données à chaque instant.

Occupons-nous actuellement des conditions relatives à la surface.

1° Près d'une paroi mouillée, on aura

$$u = 0. \tag{9 bis}$$

2° Près de la surface libre, la pression normale exercée du dehors sur le liquide sera égale et contraire à l'action du liquide lui-même sur sa surface.

Évaluons les composantes suivant les trois axes de cette dernière action, soit à la paroi, soit sur la surface libre. Menons au liquide une section normale, et appelons

$$ds$$

un élément du contour de cette section, dy et dz les projections de cet élément sur l'axe des y et sur celui des z. La normale à la surface, menée en un point de l'élément ds vers l'intérieur du liquide, fait avec les axes des angles dont les cosinus sont

$$\mathrm{d} = 0, \quad \mathrm{e} = \frac{\mp dz}{ds}, \quad \mathrm{f} = \frac{\pm dy}{ds},$$

les signes supérieurs ou les signes inférieurs devant être adoptés suivant qu'on parcourt l'élément ds à partir d'une de ses extrémités ou à partir de l'autre. Les formules (1) et (5) donneront, pour les trois composantes de l'action exercée par le liquide sur sa surface,

$$p_{nx} = \mp \mathrm{H}\left(\frac{du}{dy}\frac{dz}{ds} - \frac{du}{dz}\frac{dy}{ds}\right), \quad p_{ny} = -p\frac{\mp dz}{ds}, \quad p_{nz} = -p\frac{\pm dy}{ds}.$$

Les deux dernières équivalent à une composante normale $-p$; la première est tangentielle. En appelant p_0 la pression exercée sur la surface libre par l'atmosphère environnante, nous aurons donc, aux divers points de cette surface, $p_0 = p$. D'où, d'après (9), l'équation de la surface libre

$$p_0 = \psi(t) + \rho \mathrm{U} + x\varphi(t). \tag{10}$$

En ses divers points, la composante p_{nx} est nulle, et l'on a la condition

$$(11) \qquad \frac{du}{dy}\,dz - \frac{du}{dz}\,dy = 0 \text{ (surface libre).}$$

§ III. — *État permanent et état variable.*

Admettons que les composantes X, Y, Z de l'action extérieure soient indépendantes du temps, ainsi que les pressions exercées en deux points fixes. Les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ se réduiront à deux constantes; p ne dépendra pas de t, et il devra en être de même de p_0.

Posons

$$(12) \qquad \frac{-\varphi(t)}{H} = L, \quad \frac{\rho}{H} = L_1;$$

les équations du mouvement seront, en vertu de (7), (9 *bis*) et (11),

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{à l'intérieur du fluide, } \Delta_2 u + L = L_1 \dfrac{du}{dt}; \\ \text{à la surface-enveloppe } \left\{\begin{array}{l} \text{soit } u = 0 \text{ (paroi),} \\ \text{soit } \dfrac{du}{dy}\,dz - \dfrac{du}{dz}\,dy = 0 \text{ (surface libre).} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Le mouvement sera permanent, si l'on met pour u une valeur V, qui vérifie ces équations en y faisant $\frac{dV}{dt} = 0$. On obtient ainsi, avec les mêmes conditions à la surface, l'équation indéfinie

$$(14) \qquad \Delta_2 V + L = 0.$$

Généralement, on posera $u = V + V_0$, V_0 désignant la partie de u qui tend vers zéro à mesure que le mouvement approche d'être permanent, et l'on aura

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} \text{à l'intérieur du liquide, } \Delta_2 V_0 = L_1 \dfrac{dV_0}{dt}, \\ \text{à la surface, soit } V_0 = 0, \quad \text{soit } \dfrac{dV_0}{dy}\,dz - \dfrac{dV_0}{dz}\,dy = 0. \end{array}\right.$$

§ IV. — *État permanent : lois générales.*

Cherchons d'abord, pour l'état permanent, les lois générales de la dépense, c'est-à-dire celles qui régissent tous les cylindres liquides de même forme, quelle que soit cette forme.

Supposons en premier lieu que le volume liquide ait des dimensions données et que $L = 1$. Soit $f(y, z) = 0$ l'équation de la surface, qui est en partie paroi et en partie surface libre. Les équations du mouvement seront

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2V}{dy^2} + \dfrac{d^2V}{dz^2} + 1 = 0, \\ \text{et, pour } f(y, z) = 0, \text{ soit } V = 0, \text{ soit } \dfrac{dV}{dy}dz - \dfrac{dV}{dz}dy = 0. \end{array}\right.$$

Concevons maintenant un autre volume liquide, de section normale semblable à celle du premier, ayant sa surface paroi ou libre comme aux endroits homologues de celui-ci, et où L ait une valeur quelconque. En désignant par a le rapport de similitude et posant $y' = ay$, $z' = az$, y', z' seront les coordonnées du point de sa section normale, homologue au point (y, z) de la section pareille du premier volume. L'équation de la surface sera toujours $f(y, z) = 0$, et, si V' est la vitesse, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2V'}{dy'^2} + \dfrac{d^2V'}{dz'^2} + L = 0, \quad \text{ou bien} \quad \dfrac{d^2\frac{V'}{La^2}}{dy^2} + \dfrac{d^2\frac{V'}{La^2}}{dz^2} + 1 = 0; \\ \quad \text{pour } f(y, z) = 0, \text{ soit } V' = 0, \text{ soit } \dfrac{dV'}{dy'}dz' - \dfrac{dV'}{dz'}dy' = 0, \\ \quad \text{ou bien soit } \dfrac{V'}{La^2} = 0, \quad \text{soit } \dfrac{d\frac{V'}{La^2}}{dy}dz - \dfrac{d\frac{V'}{La^2}}{dz}dy = 0. \end{array}\right.$$

La quantité $\frac{V'}{La^2}$ est déterminée par les mêmes équations que la quantité V. On peut donc poser

$$(16) \qquad \frac{V'}{La^2} = V, \quad \text{ou} \quad V' = La^2 V.$$

D'où la loi suivante :

Si l'on considère deux volumes cylindriques de liquides différents et de dimensions différentes, mais de sections normales semblables, les vitesses permanentes en deux points homologues sont proportionnelles au coefficient L *et à la grandeur des sections.*

Pour avoir la dépense qui correspond à l'unité de temps, il faut multiplier chaque élément de la section normale par la vitesse correspondante, et intégrer dans toute l'étendue de la section. Comme deux éléments homologues des sections dans les deux volumes sont proportionnels au carré des dimensions de celles-ci, il en résulte que *la dépense est proportionnelle à leur quatrième puissance.*

Dans le cas d'un liquide pesant, supposons que l'axe des y soit horizontal, et que celui des z fasse avec la direction de la pesanteur un angle α. On aura

$$\frac{dU}{dx} = g \sin\alpha, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = g \cos\alpha.$$

S'il y a une surface libre, elle aura pour équation (10) et (8)

$$p_0 = \text{const} + \rho g z \cos\alpha + x \frac{dp}{dx}.$$

D'ordinaire la pression atmosphérique p_0 est sensiblement constante, et, comme l'équation ne doit pas dépendre de x, on devra avoir $\frac{dp}{dx} = 0$. Alors, d'après (8) et (12), L est égal à $\rho g \sin\alpha$ divisé par H : donc *la vitesse sera proportionnelle à la pente, c'est-à-dire au sinus de l'inclinaison des génératrices par rapport au plan horizontal.*

Ce serait le cas du mouvement permanent de l'eau dans un canal découvert à peu près rectiligne, si ce mouvement y existait au point de vue où nous nous sommes placés.

Supposons actuellement le liquide contenu dans un tube et le remplissant. Le coefficient constant L vaudra (8) et (12) $\frac{1}{H}\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$. On voit que la dérivée $\frac{dp}{dx}$ aura une valeur constante : elle s'obtiendra en divisant par la longueur du tube la différence des pressions exercées à ses deux extrémités. Si le terme $\rho g \sin\alpha$ n'a pas une influence appréciable, *la dépense sera* proportionnelle à cette dérivée, c'est-à-dire *en raison directe de la différence des pressions exercées aux deux extrémités du tube et en raison inverse de sa longueur.*

§ V. — *Cas d'un tube elliptique.*

Quand le tube, rempli de liquide, est elliptique et a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'axe des y étant d'ailleurs horizontal ou incliné, l'expression de la vitesse est

$$V = \frac{L}{2} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right). \tag{17}$$

En effet, elle satisfait à l'équation indéfinie (14), et à la condition $V = 0$ sur la paroi.

On aura pour la dépense

$$\iint V\,dy\,dz = L \frac{\pi bc}{4} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}. \tag{18}$$

Appelons σ l'étendue de la section, égale à πbc, et cette formule pourra se mettre sous la forme

$$\text{dépense} = \frac{1}{4\pi} \frac{L\sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}} = 0{,}0796\, \frac{L\sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}. \tag{19}$$

Dans le cas d'un tube circulaire de rayon R, horizontal ou assez étroit pour que la pesanteur n'ait pas d'influence sensible sur l'écoulement, elle devient (12) et (8)

$$\text{dépense} = \frac{\pi}{8H} \frac{-dp}{dx} R^4. \tag{19 bis}$$

Elle est bien, conformément aux trois lois générales démontrées ci-dessus, proportionnelle à la quatrième puissance du rayon, en raison inverse de la longueur du tube, et proportionnelle à la différence des pressions exercées à ses deux extrémités.

Si, l'axe des y étant horizontal, le liquide remplit seulement la moitié inférieure du tube, la surface libre aura pour équation $z = 0$, et la condition relative à cette surface deviendra $\frac{dV}{dz} = 0$. La même valeur de V la vérifiera, et la dépense sera la moitié de celle obtenue ci-dessus (18).

§ VI. — *Cas d'un tube rectangulaire.*

Traitons actuellement le cas d'un tube plein de liquide, à section rectangulaire. Appelons $2b$, $2c$ les deux dimensions de cette section, et prenons, à partir du centre de celle-ci, deux axes des y et des z parallèles aux côtés correspondants. Si k' désigne tout nombre entier positif,

$$k \text{ l'expression } (2k'+1)\frac{\pi}{2},$$

et B, C des coefficients arbitraires, une valeur de V qui vérifiera l'équation indéfinie (14) sera

$$\begin{aligned} V = \frac{L}{2}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left\{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \sum_{k'=0}^{k'=\infty}\left[B\frac{e^{k\frac{z}{b}} + e^{-k\frac{z}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}}\cos k\frac{y}{b}\right.\right. \\ \left.\left. + C\frac{e^{k\frac{y}{c}} + e^{-k\frac{y}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\cos k\frac{z}{c}\right]\right\}. \end{aligned}$$

Pour qu'elle soit nulle aux parois, c'est-à-dire quand on y fait, soit $y = \pm b$, soit $z = \pm c$, il suffira de choisir les coefficients B et C, de manière que

$$\frac{y^2}{b^2} = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} B\cos k\frac{y}{b}, \quad \frac{z^2}{c^2} = \sum_{k'=0}^{k'=\infty} C\cos k\frac{z}{c}.$$

D'après une formule d'analyse, toute fonction paire $f(y)$, donnée entre les limites $y = -b$ et $y = +b$, a sa valeur exprimée par

$$\frac{2}{b}\sum_{k'=0}^{k'=\infty} \cos k\frac{y}{b}\int_0^b f(y)\cos k\frac{y}{b}\,dy.$$

Nous devrons donc prendre

$$B = \frac{2}{b}\int_0^b \frac{y^2}{b^2}\cos k\frac{y}{b}\,dy = \frac{\pm 2}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

et de même

$$C = \frac{\pm 2}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right),$$

le signe $+$ correspondant à k' pair et le signe $-$ à k' impair.

L'expression définitive de la vitesse est donc

$$(17\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} V = \frac{L}{2}\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\Bigg\{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{\pm 1}{k}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\Bigg[&\frac{e^{k\frac{z}{b}} + e^{-k\frac{z}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}}\cos k\frac{y}{b} \\ &+ \frac{e^{k\frac{y}{c}} + e^{-k\frac{y}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\cos k\frac{z}{c}\Bigg]\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

On aura la dépense en multipliant par $dy\,dz$, et intégrant de $y = -b$ à $y = +b$ et de $z = -c$ à $z = +c$. Représentons par σ, afin d'abréger, l'étendue $4bc$ de la section, et posons

$$(18\ bis)\quad \alpha = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3} + 2\sum_{k'=0}^{k'=\infty}\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\left[\frac{b}{c}\,\frac{e^{k\frac{c}{b}} - e^{-k\frac{c}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}} + e^{-k\frac{c}{b}}} + \frac{c}{b}\,\frac{e^{k\frac{b}{c}} - e^{-k\frac{b}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}} + e^{-k\frac{b}{c}}}\right]\right\};$$

nous aurons

$$(19\ ter)\qquad \text{dépense} = \alpha\,\frac{L\sigma^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer numériquement α. Nous pourrons d'abord, dans son expression, remplacer respectivement

$$\frac{e^{k\frac{c}{b}}-e^{-k\frac{c}{b}}}{e^{k\frac{c}{b}}+e^{-k\frac{c}{b}}},\quad \frac{e^{k\frac{b}{c}}-e^{-k\frac{b}{c}}}{e^{k\frac{b}{c}}+e^{-k\frac{b}{c}}}$$

par

$$1-\frac{2}{1+e^{2k\frac{c}{b}}},\quad 1-\frac{2}{1+e^{2k\frac{b}{c}}};$$

puis nous aurons à évaluer les trois séries

$$2\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)=2\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)\right.$$
$$\left.-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\left(\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\ldots\right)\right],$$
$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{c}{b}}},$$
$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{b}{c}}},$$

qui seront respectivement, dans la parenthèse de α, les coefficients de $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$, de $\frac{b}{c}$ et de $\frac{c}{b}$.

Considérons en général la série

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots.$$

Si on l'arrête au terme $\frac{1}{(2^n-1)^m}$, la somme des 2^n premiers termes négligés sera inférieure à 2^n fois le premier d'entre eux, c'est-à-dire inférieure à $\frac{1}{2^{n(m-1)}}$. Les 2^{n+1} termes suivants ont de même une somme inférieure à $\frac{1}{2^{(n+1)(m-1)}}$. En continuant à grouper ainsi les termes négligés, on verra que le reste est plus petit que la progression

$$\frac{1}{2^{n(m-1)}}+\frac{1}{2^{(n+1)(m-1)}}+\frac{1}{2^{(n+2)(m-1)}}+\ldots$$

ou que

$$\frac{1}{(2^{m-1}-1)\,2^{(m-1)(n-1)}}.$$

Si nous prenons actuellement la série plus rapidement convergente

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\ldots,$$

et que nous l'arrêtions au même terme $\frac{1}{(2^n-1)^m}$, le reste

$$\frac{1}{(2^n+1)^m}+\frac{1}{(2^n+3)^m}+\ldots,\ \text{augmenté de la somme}\ \frac{1}{(2^n)^m}+\frac{1}{(2^n+2)^m}+\ldots,$$

plus grande que lui terme à terme, ne sera autre que celui de la série précédente : le reste à lui seul est donc plus petit que l'expression

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2^{m-1}-1)\,2^{(m-1)(n-1)}}.$$

Pour $m=3$ et $n=5$, cette expression vaut 0,0006; pour $m=5$ et $n=3$, elle vaut 0,0001. De telles erreurs étant suffisamment petites, on peut calculer $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots$ en s'arrêtant à $\frac{1}{31^3}$, et $\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\ldots$ en s'arrêtant à $\frac{1}{7^5}$. On trouve ainsi

$$2\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)=2(0,2713-0,2101)=0,1224,\ \text{avec erreur} < 0,0004.$$

Il reste à évaluer les deux sommes

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{c}{b}}},$$

$$-4\sum\frac{1}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\frac{1}{1+e^{2k\frac{b}{c}}},$$

qui sont beaucoup plus rapidement convergentes que la précédente.

Nous supposerons qu'on ait disposé les axes de manière que b soit $> c$. Alors le premier terme de la seconde somme est seul sensible. En effet le deuxième terme est, en valeur absolue, plus petit que

$$4\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\frac{1}{3^3}-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^5\frac{1}{3^5}\right]\frac{1}{1+e^{3\pi}}<0,00001.$$

En négligeant ce terme et les suivants, calculant les coefficients $\frac{-4}{k^3}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)$ de ceux de la première somme qui peuvent obtenir une valeur sensible, et observant enfin que $e^\pi = 23,14$, il vient

$$(18\ ter)\quad \alpha = \frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3} + 0,1224\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) - \frac{c}{b}\frac{0,1955}{1+(23,14)^{\frac{b}{c}}} \right.$$
$$- \frac{b}{c}\left[\frac{0,1955}{1+(23,14)^{\frac{c}{b}}} + \frac{0,0348}{1+(23,14)^{3\frac{c}{b}}} + \frac{0,0080}{1-(23,14)^{5\frac{c}{b}}}\right.$$
$$+ \frac{0,0030}{1+(23,14)^{7\frac{c}{b}}} + \frac{0,0014}{1+(23,14)^{9\frac{c}{b}}}$$
$$+ \frac{0,0008}{1+(23,14)^{11\frac{c}{b}}} + \frac{0,0005}{1+(23,14)^{13\frac{c}{b}}}$$
$$+ \frac{0,0003}{1+(23,14)^{15\frac{c}{b}}} + \frac{0,0002}{1+(23,14)^{17\frac{c}{b}}}$$
$$\left.\left. + \frac{0,0001}{1+(23,14)^{19\frac{c}{b}}}\right]\right\}.$$

Pour les valeurs particulières

1, 2, 3, 4, 5, 10 de $\frac{b}{c}$,

α vaut respectivement

0,0703, 0,0715, 0,0731, 0,0747, 0,0757, 0,0786.

Pour $\frac{b}{c} = \infty$, on peut, dans la formule (18 *bis*), négliger les termes qui ont pour coefficient $\frac{c}{b}$, et remplacer la différence et la somme $e^{k\frac{c}{b}} \mp e^{-k\frac{c}{b}}$ par $2k\frac{c}{b}$ et par 2. Alors il vient

$$\alpha = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{3} + 2\sum' \frac{1}{k^2}\left(1-\frac{2}{k^2}\right)\right].$$

Or les deux membres de l'égalité

$$\frac{y^2}{b^2} = 2\sum \frac{\pm 1}{k}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right)\cos k\frac{y}{b},$$

multipliés par dy, et intégrés de $y = 0$ à $y = b$, donnent

$$2\sum \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{2}{k^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

On aura donc, pour $\frac{b}{c} = \infty$,

$$\alpha = \frac{1}{12} = 0,0833.$$

Ainsi le coefficient α, égal à 0,0703 pour une section carrée, grandit sans cesse à mesure que la section s'aplatit, et tend vers la valeur limite 0,0833. Quand le rapport des deux dimensions est supérieur à 10, on peut faire $\alpha = 0,081$ avec une erreur relative au plus égale à $\frac{1}{40}$. Cette valeur est sensiblement la même que le coefficient 0,0796 de la formule (19) de la dépense dans un tube elliptique.

Observons, en terminant ce paragraphe, que l'expression (17 *bis*) de V donne $\frac{dV}{dz} = 0$ pour $z = 0$. Cette expression convient donc au cas d'un canal découvert à section rectangulaire, de largeur $2b$ et de profondeur c. La dépense sera la moitié de celle (19 *ter*) dans laquelle $\sigma = 4bc$.

§ VII. — *État variable.*

L'état variable est régi par les équations (15), pareilles à celles de la température dans un cylindre homogène et isotrope, athermane, ayant une portion de sa surface (la paroi) à la température zéro, et l'autre portion (surface libre) imperméable à la chaleur.

On prendra pour intégrale simple

$$V_0 = e^{-\frac{c_i^2 t}{L_1}} W_i,$$

W_i désignant une fonction de y et de z, et c_i une constante. Les équations du mouvement deviendront

$$\left\{\begin{array}{l} \text{à l'intérieur, } \dfrac{d^2 W_i}{dy^2} + \dfrac{d^2 W_i}{dz^2} + c^2 W_i = 0, \\ \text{à la surface, ou pour } f(y, z) = 0, \text{ soit } W_i = 0, \text{ soit } \dfrac{dW_i}{dy}dz - \dfrac{dW_i}{dz}dy = 0. \end{array}\right.$$

La quantité c_i sera racine d'une équation transcendante, et aura une infinité de valeurs distinctes. L'expression

$$(20) \qquad V_0 = \sum A_i e^{-\frac{c_i^2 t}{L_1}} W_i,$$

étendue à toutes ces valeurs, vérifiera les équations du problème. Elle sera donc l'intégrale cherchée, si pour $t = 0$ elle est égale à la valeur initiale de la portion non permanente de la vitesse. Cette valeur est une fonction donnée $F(y, z)$. En supposant qu'elle puisse être mise sous la forme $\sum A_i W_i$, des considérations qui appartiennent à la théorie de la chaleur [*] donneront, pour déterminer chaque coefficient A_i, la formule

$$A_i = \frac{\int\int F(y, z)\, W_i\, dy\, dz}{\int\int W_i^2\, dy\, dz}.$$

Les intégrales sont prises dans toute l'étendue qu'enferme le contour $f(y, z) = 0$.

Cherchons maintenant comment varie la vitesse, lorsqu'on considère des volumes semblables de deux liquides, et que les valeurs initiales de V_0 sont les mêmes aux points homologues.

Soient donc : $f(y, z) = 0$ l'équation du premier volume liquide, dans lequel nous supposerons $L_1 = 1$; (20) l'expression de la vitesse non permanente dans ce volume; $y' = ay$, $z' = az$ les coordonnées, dans un deuxième volume semblable au premier, du point d'une section normale homologue à (y, z); enfin L'_1 la valeur de L_1 dans ce volume, et V'_0 la portion non permanente de sa vitesse, exprimée par

$$\sum A'_i e^{-\frac{c_i'^2}{L'_1} t} W'_i.$$

---

[*] *Leçons sur la Chaleur* de M. Lamé, § LIX.

On aura

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2W'_i}{dy'^2}+\dfrac{d^2W'_i}{dz'^2}+c'^2_i W'_i=0, \quad \text{ou bien} \quad \dfrac{d^2W'_i}{dy^2}+\dfrac{d^2W'_i}{dz^2}+(ac'_i)^2 W'_i=0;\\ \quad\text{et, pour } f(y,z)=0,\\ \text{soit } W'_i=0, \text{ soit } \dfrac{dW'_i}{dy'}dz'-\dfrac{dW'_i}{dz'}dy'=0 \quad \text{ou} \quad \dfrac{dW'_i}{dy}dz-\dfrac{dW'_i}{dz}dy=0.\end{array}\right.$$

On voit que W'_i est déterminé en y, z et ac^i de la même manière que W_i en y, z et c_i. Par suite, les valeurs de ac'_i seront les mêmes que celles de c_i, et W'_i sera égal à W_i. D'ailleurs V'_0 étant, pour $t=0$, égal à V_0, on aura

$$(20\ bis) \qquad V'_0=\sum A_i e^{-\frac{c_i^2 t}{a^2 L'_1}t} W_i.$$

Au bout d'un temps égal à $a^2 L'_1 t$, la vitesse V'_0 est égale à la vitesse V_0 au bout du temps t. Donc *les vitesses spéciales à l'état variable se réduisent à une fraction donnée de leur valeur initiale, dans des temps proportionnels à* L_1 *et à la grandeur des sections normales semblables.*

La quantité totale de liquide écoulé, depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$, aura pour expression

$$\int\int a^2 dy\, dz \int_0^\infty V'_0\, dt = L'_1 a^4 \sum \frac{A_i}{c_i^2}\int\int W_i\, dy\, dz.$$

Elle est proportionnelle au coefficient L_1 *et à la quatrième puissance des dimensions homologues.*

Si les vitesses des deux liquides sont nulles pour $t=0$, V_0 et V'_0, changées de signe, vaudront à l'origine les valeurs permanentes V, V' des vitesses. On aura donc

$$\text{pour } t=0, \quad V_0=-V, \quad V'_0=-V'=-La^2V, \text{ d'après } (16).$$

Les dépenses totales correspondantes à l'état variable, dépenses négatives, seront dans ces deux volumes comme 1 est à

$$La^2\times L'_1 a^4 = LL'_1 a^6.$$

Les quantités totales de liquide qui, vers le commencement du mouvement, coulent de moins que si l'état permanent avait existé dès l'origine, sont donc entre elles comme les produits LL_1 *et comme les cubes des sections normales semblables*. L_1 est une constante, d'après (12), s'il s'agit toujours du même liquide à la même température; de plus, quand la pesanteur n'a pas d'influence sensible, L est le quotient par la longueur du tube de la différence des pressions exercées à ses deux extrémités. Donc *les quantités ci-dessus sont, comme la dépense dans l'état permanent, en raison directe de la différence des pressions et en raison inverse de la longueur*.

La forme (20), donnée à l'intégrale, a l'avantage de montrer comment V_0 tend vers zéro. Mais les résultats généraux obtenus ci-dessus peuvent se déduire directement des équations (15). En effet, celles-ci, appliquées au second volume liquide, sont

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{à l'intérieur} & \dfrac{d^2V'_0}{dy'^2}+\dfrac{d^2V'_0}{dz'^2}=L'_1\dfrac{dV'_0}{dt} & \text{ou bien} & \dfrac{d^2V'_0}{dy^2}+\dfrac{d^2V'_0}{dz^2}=\dfrac{dV'_0}{d\left(\dfrac{t}{L'_1 a^2}\right)}, \\ \text{à la surface,} & \text{soit } V'_0=0, & \text{soit} & \dfrac{dV'_0}{dy}dz-\dfrac{dV'_0}{dz}dy=0. \end{array}\right.$$

Elles donnent bien, pour tous les volumes liquides de même forme, et chez lesquels les portions non permanentes des vitesses ont les mêmes valeurs initiales aux points homologues,

$$V'_0 = \text{la même fonction de } y,\ z \text{ et } \frac{t}{L'_1 a^2},$$

formule qui contient les résultats dont il s'agit.

Dans le cas d'un tube circulaire plein de liquide, en supposant que toutes les molécules situées à une distance r de l'axe eussent à l'origine la même vitesse, V_0 dépendrait seulement de r et t, et on prendrait pour W_i l'expression

$$1-\left(\frac{c_i r}{2}\right)^2+\left(\frac{c_i^2 r^2}{2.4}\right)^2-\left(\frac{c_i^3 r^3}{2.4\,6}\right)^2+\ldots=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(c_i r\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Les valeurs de c_i seraient racines de l'équation transcendante qu'on obtient en égalant à zéro cette expression, après y avoir substitué à r le rayon du tube. Mais nous ne croyons pas très-utile de nous étendre sur cette question.

§ VIII. — *Écoulement permanent d'un liquide dans un tube très-étroit imparfaitement cylindrique.*

Lorsque le liquide coule dans un tube très-étroit, son mouvement permanent est soumis à des lois simples, alors même que la section normale varie beaucoup, mais d'une manière continue, sur une longueur finie. Que le tube soit droit ou courbe, on peut, dans une petite étendue, l'assimiler sensiblement à un cylindre, et prendre l'axe des x parallèle à ses génératrices. Dans cette petite étendue, le mouvement se fait à peu près suivant des droites parallèles à l'axe des x; les composantes v, w de la vitesse y sont donc négligeables par rapport à u, et leurs dérivées de divers ordres en y et z le sont aussi relativement aux dérivées pareilles de u. Quant aux dérivées en x de u, v, w, ainsi qu'aux accélérations u', v', w', elles sont du même ordre de grandeur que les vitesses des divers filets liquides, c'est-à-dire très-petites à cause de l'étroitesse du tube. Les équations (2) et (3) deviennent donc à très-peu près (5) et (6), comme lorsque le mouvement se faisait suivant des droites parallèles. Mais la condition $\frac{du}{dx} = 0$ n'a plus lieu. Les relations (6 *bis*) seront encore vérifiées, et donneront, au lieu de (7) et (8), en supposant établi le mouvement permanent,

$$\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{H}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{dU}{dx}\right) = 0, \tag{21}$$

où la parenthèse qui termine le premier membre indique une fonction de x. Si on y joint la condition $u = 0$ sur la paroi, cette relation pourra s'intégrer dans toute l'étendue d'une section normale du tube. Soit a le rapport des dimensions de cette section aux dimensions homologues d'une section semblable de grandeur fixe, prise pour terme de comparaison, et F une fonction de deux variables, la même pour toutes les sections de même forme.

La méthode du § IV donne

$$u = \frac{1}{H}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{dU}{dx}\right)a^2 F\left(\frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right). \tag{22}$$

La dépense Q, c'est-à-dire le volume qui s'écoule dans l'unité de temps, est à très-peu près

$$(23)\qquad Q = \int\int u\,dy\,dz = \frac{1}{H}\left(-\frac{dp}{dx} + \rho\frac{dU}{dx}\right)Ia^4,$$

I désignant l'intégrale $\int\int F\left(\frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) d\frac{y}{a}\, d\frac{z}{a}$, prise dans toute l'étendue de la section, et constante pour toutes les sections de même forme.

Si dl désigne un élément de l'axe, droit ou courbe, du tube, et l la somme des éléments pareils compris entre le commencement du tube et la section considérée, il est évident que I et a seront des fonctions déterminées de l, pourvu que la forme et la grandeur du tube en chaque point soient connues. D'ailleurs $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{dU}{dx}$ sont identiques à $\frac{dp}{dl}$ et $\frac{dU}{dl}$; de plus Q est constante. On peut donc, de (23), tirer $\frac{dp}{dl}$ et intégrer par rapport à l. Soient : p_0, p_1 les pressions exercées sur le fluide au commencement et à la fin du tube; U_0, U_1 les deux valeurs de U aux mêmes points; l_1 la longueur totale du tube. Il viendra

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} & -p + \rho U = -p_0 + \rho U_0 + HQ\int_0^l \frac{dl}{Ia^4}, \\ & \text{d'où}\quad Q = \frac{p_0 - p_1 + \rho(U_1 - U_0)}{H\int_0^{l_1}\frac{dl}{Ia^4}}. \end{aligned}\right.$$

Comme le terme $\rho(U_1 - U_0)$ sera généralement négligeable à côté de $p_0 - p_1$, on peut dire que *la dépense est proportionnelle à la pression* $p_0 - p_1$, *qui produit l'écoulement.*

Quand toutes les sections normales du tube sont semblables, I est une constante, et *la dépense varie en raison inverse de l'intégrale* $\int_0^{l_1}\frac{dl}{a^4}$.

Si en particulier le tube est conique, ou du moins le devient quand on le rectifie sans changer la grandeur de ses sections normales, en désignant par a_0, a_1 les valeurs de a à ses deux extrémités, on aura

$$a = a_0 + \frac{a_1 - a_0}{l_1}\,l,\quad \int_0^{l_1}\frac{dl}{a^4} = \frac{l_1}{a_1 - a_0}\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{a^4} = \frac{l_1}{a_0^2 a_1^2}\cdot\frac{a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2}{3a_0 a_1}.$$

Enfin, lorsque la différence $a_1 - a_0$ sera assez petite pour qu'on puisse négliger son carré, la dernière fraction ne différera pas sensiblement de l'unité, et il viendra

$$(25)\qquad Q = \frac{p_0 - p_1 + \rho(U_1 - U_0)}{H} \cdot \frac{I a_0^2 a_1^2}{l_1}.$$

La dépense sera : 1° proportionnelle à la pression; 2° en raison inverse de la longueur du tube; 3° proportionnelle au produit des deux sections normales extrêmes.

§ IX. — *Vérification expérimentale des lois précédentes. Cas où elles cessent d'être applicables.*

Examinons si l'observation confirme nos formules. Pour cela, nous avons les expériences très-précises de M. Poiseuille sur l'écoulement permanent des liquides dans les tubes circulaires, de très-petite section, mouillés par ces liquides [*]. Le tube étant horizontal, M. Poiseuille a reconnu que la dépense est en raison inverse de sa longueur, proportionnelle à la différence des pressions exercées à ses deux extrémités et à la quatrième puissance de son diamètre. Ce sont précisément les lois générales que nous avons obtenues au § IV, et qu'exprime, pour le cas d'un tube circulaire, la formule (19 *bis*). Enfin, la nature du tube ne paraît pas influer sur la dépense, mais seulement celle du liquide [**] : c'est encore conforme à notre théorie, qui n'introduit pas d'autre coefficient que celui de frottement intérieur du liquide.

Navier ne pensait pas que la vitesse fût nulle près d'une paroi mouillée : il la croyait simplement une fonction de la force tangentielle exercée par le liquide sur sa surface. Pour un tube circulaire, son hypothèse donne une dépense qui ne peut pas vérifier à la fois les trois lois de M. Poiseuille [***]. On doit donc adopter la modification

---

[*] *Voir* aux *Comptes rendus*, séance du 26 décembre 1842, t. XV, p. 1167, où se trouve le Rapport de M. Regnault.

[**] Voir *Physique moléculaire* de M. l'abbé Moigno, p. 35.

[***] En effet, dans ce cas, la vitesse est la même en tous les points d'une même section situés à une même distance r de l'axe du tube. En négligeant l'action de la pesan-

que j'ai introduite, et qui consiste à supposer la vitesse nulle près d'une paroi mouillée [*].

A la température de 10 degrés centigrades, et en prenant la seconde pour unité de temps, le millimètre pour unité de longueur et le milli-

---

teur, et désignant par L la longueur du tube, par P la différence des pressions exercées à ses deux extrémités, l'équation (14) devient

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{P}{HL} = 0.$$

Intégrons, et il viendra

$$r\frac{dV}{dr} + \frac{P}{2HL}r^2 = 0;$$

il ne faut pas de constante, car, pour $r = 0$, le premier membre s'annule.

Intégrons une seconde fois, et désignons par V_1 la vitesse à la paroi. Nous aurons

$$V = \frac{P}{4HL}(R^2 - r^2) + V_1.$$

D'après Navier, V_1 serait une fonction F du frottement, $-H\frac{dV}{dr}$, exercé par le liquide sur sa surface. On aurait donc

$$V = \frac{P}{4HL}(R^2 - r^2) + F\left(\frac{PR}{2L}\right).$$

On en déduit

$$\text{Dépense} = 2\pi\int_0^R V r\,dr = \pi R^2\left[\frac{PR^2}{8HL} + F\left(\frac{PR}{2L}\right)\right].$$

Pour qu'elle soit proportionnelle au rapport $\frac{P}{L}$, la fonction F doit être du premier degré; mais alors la dépense n'est en raison directe de R^4 que pour $F = 0$ ou $V_1 = 0$: ce qu'il fallait démontrer.

L'hypothèse de Navier sera sans doute exacte si le liquide ne mouille pas le tube. A cause de la petitesse de R, on pourra développer F suivant les puissances ascendantes de sa variable, et ne garder que le terme du premier degré. La dépense sera proportionnelle au rapport $\frac{P}{L}$, et très-sensiblement au cube du rayon.

[*] On vient de me faire remarquer que M. Émile Mathieu avait, dans un article inséré aux *Comptes rendus* (séance du 10 août 1863, t. LVII, p. 320), supposé aussi la vitesse nulle à la paroi d'un tube circulaire ou elliptique, ce qui l'a conduit, comme moi, à des résultats conformes aux expériences de M. Poiseuille. Je suis arrivé, comme on voit, à des résultats plus généraux et plus nombreux.

gramme pour unité de force, les expériences de M. Poiseuille conduisent à poser pour l'eau

$$H = \frac{1}{7488} = 0,0001336.$$

(Cette valeur est déduite de la formule de M. Poiseuille

$$Q = 183,783 \frac{PD^4}{L},$$

où D désigne le diamètre et L la longueur, comparée à la nôtre (19 *bis*)

$$Q = \frac{\pi}{128 H} \frac{PD^4}{L}.)$$

Si l'unité de longueur devient le mètre, et l'unité de force le kilogramme, la pression H restera la même; car cette pression, équivalant par millimètre carré à 1 milligramme divisé par 7488 ou à 1 kilogramme divisé par 7488000000, vaudra, sur la nouvelle unité de surface, qui est le mètre carré, 1 kilogramme divisé par 7488.

Le coefficient de frottement de l'eau est donc très-petit, et il faudra des variations rapides de vitesse dans un sens transversal aux filets contigus pour lui faire produire un effet sensible. Par exemple, dans le cas d'un canal découvert rempli d'eau, ayant pour section normale un demi-cercle de 1 mètre de rayon, et une pente seulement égale à 0,0001, la formule (17) donnera, pour la vitesse permanente du filet central, en y faisant $L = \frac{\rho g \sin\alpha}{H} = 748,8$ et $b = c = 1$,

$$V = \frac{748,8}{4} = 187^{m},2.$$

Des vitesses très-considérables sont donc nécessaires pour que le frottement fasse équilibre à la pesanteur dans un volume liquide de dimensions finies, lorsque les vitesses u, v, w varient avec continuité d'un point aux points voisins, ainsi que le suppose notre théorie. Or, bien avant que de pareilles vitesses aient pu s'établir, les plus petits tournoiements, produits par les inégalités du fond ou de toute autre manière, doivent amener une perte de force vive capable de neutraliser l'accélération due à la pesanteur ou aux variations de pression.

En d'autres termes, dans un canal découvert ou dans un tuyau de conduite d'un certain calibre, les molécules liquides ne décrivent pas, avec une régularité absolue, la courbe continue qui représente en somme leur trajectoire; mais elles s'en écartent en roulant autour de leurs voisines : ces irrégularités donnent naissance à des résistances spéciales, bien plus considérables que les frottements obtenus en supposant les vitesses continues, et capables de produire un état permanent très-distinct de celui dont nous sommes occupés. Voilà pourquoi le mouvement de l'eau dans les canaux découverts et dans les tuyaux de conduite d'une certaine dimension n'est pas soumis aux lois que nous avons trouvées.

Les résistances ainsi produites ont peut-être une expression très-compliquée. Il est toutefois visible qu'elles doivent diminuer avec la section du tube et tendre vers zéro quand cette section décroît indéfiniment; car alors les écarts des molécules hors de leurs trajectoires moyennes deviennent forcément très-restreints. Aussi voyons-nous ces résistances disparaître en général, et ne plus masquer les forces régulières de frottement, lorsque le tube est capillaire. Des observations faites par M. Darcy lui ont montré que les forces qu'il croyait de viscosité, et qui n'étaient, à mon avis, que les résistances dues aux tournoiements des molécules, grandissaient au contraire avec les dimensions des tuyaux : ce fait, difficile à expliquer autrement, devient très-naturel dans ma manière de le concevoir.

§ X. — *Écoulement permanent des gaz dans des tubes capillaires. — Digression sur la diffusion des gaz.*

Un gaz, contenu dans un réservoir à une pression constante p_0, s'écoule par un long tube capillaire et se rend dans le récipient d'une machine pneumatique, où l'on maintient une très-petite pression p_1. Proposons-nous d'obtenir les lois de son mouvement permanent, en supposant : 1° les coefficients H et K des formules (2) très-petits et sensiblement constants; 2° la vitesse nulle tout près de la paroi du tube.

Nous prendrons, dans une petite étendue, comme au § VIII, un axe des x parallèle aux génératrices du tube; mais il ne sera pas nécessaire que celui-ci soit étroit au point de rendre la vitesse moyenne très-petite. Il suffira que cette vitesse ne soit pas très-grande. Les composantes v, w seront très-petites par rapport à u, et leurs dérivées en y et z pourront être négligées relativement aux dérivées pareilles de u. Celles-ci auront des valeurs considérables, à cause de la petitesse des coefficients de frottement, tandis que les dérivées de u, v, w en x seront du même ordre que la vitesse et par conséquent finies. D'ailleurs, ρ étant un petit nombre dans tous les gaz naturels, on pourra négliger les composantes ρX, ρY, ρZ de l'action extérieure, et même celles $\rho u'$, $\rho v'$, $\rho w'$ de la force motrice, dès que le mouvement permanent sera établi et que l'accélération sera du même ordre que la vitesse. Les trois équations du mouvement se réduiront donc, comme au § VIII, à la relation (21), où la parenthèse qui termine le premier membre contiendra de moins le terme en ρ, et sera encore une simple fonction de x. La vitesse aura toujours pour formule (22), moins le terme en ρ. La masse M du gaz qui traversera la section dans l'unité de temps vaudra $\int\int \rho u\,dy\,dz$. D'après la loi de Mariotte, la température ne changeant pas, et k désignant une constante, on peut poser

$$\rho = kp.$$

D'ailleurs p varie très-peu sur toute l'étendue d'une même section normale du tube. Nous aurons donc, au lieu de (23),

$$(26)\qquad M = -\frac{1}{H}\frac{d\frac{kp^2}{2}}{dx}\,\mathrm{I}a^4.$$

Elle se déduirait de (23), en faisant $\rho = 0$, et en changeant Q en M et p en $\frac{kp^2}{2}$. On en tirera donc denx équations semblables à (24):

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{kp^2}{2} &= -\frac{kp_0^2}{2} + \mathrm{HM}\int_0^l \frac{dl}{\mathrm{I}a^4},\\ \mathrm{M} &= \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2\mathrm{H}\int_0^{l_1}\frac{dl}{\mathrm{I}a^4}}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier d'un tube légèrement conique, cette dernière formule devient, pareillement à (25),

$$(28) \qquad M = \frac{k(p_0^2 - p_1^2)}{2H} \frac{I a_0^2 a_1^2}{l_1}.$$

La masse du gaz qui s'écoule dans l'unité de temps est : 1° en raison directe de la différence des carrés des pressions exercées aux deux extrémités du tube; 2° en raison inverse de la longueur; 3° proportionnelle au produit des deux sections normales extrêmes.

M. Graham a trouvé expérimentalement les deux premières lois [*]. Il a reconnu aussi que la vitesse, toutes choses égales d'ailleurs, varie avec la nature du gaz, mais non avec celle du tube : ce qui est bien conforme à nos formules, et n'aurait pas lieu si la condition relative à la surface n'était pas la même pour toutes les parois. Enfin il a trouvé que la vitesse diminuait avec la température, ce qui prouve que H augmente avec elle, contrairement à ce qui a lieu pour beaucoup de liquides.

Les expériences de M. Poiseuille et de M. Graham, ayant été faites dans des limites de pression étendues, et se trouvant d'accord avec l'hypothèse $H =$ constante, prouvent que les coefficients de frottement ne varient pas beaucoup avec la pression.

On sait que M. Graham a fait encore de nombreuses recherches sur la diffusion des fluides, et qu'il est arrivé à cette loi remarquable : *Lorsqu'un gaz traverse une paroi poreuse, sa vitesse est en raison inverse de la racine carrée de sa densité* (voir *Physique moléculaire* de M. l'abbé Moigno, p. 111). Elle peut être obtenue théoriquement au moyen des considérations suivantes.

Concevons un gaz en repos, dans un milieu solide poreux sans action chimique sur lui : on doit naturellement penser, par analogie à ce qui arrive lors du mélange des fluides élastiques, qu'il se comportera comme s'il était seul, c'est-à-dire qu'il sera soumis dans tous les sens à une pression correspondante à sa densité d'après la loi de Mariotte. Mais s'il entre en mouvement, une résistance spéciale se développera

---

[*] Voir *Physique moléculaire*, de M. l'abbé Moigno, p. 117.

entre le milieu poreux et lui; rapportée à l'unité de masse du gaz, cette résistance devra être proportionnelle : 1° à la vitesse u, ou au nombre des molécules du milieu poreux qui s'opposent, dans l'unité de temps, au mouvement du gaz; 2° à une certaine fonction de la vitesse, $f(u)$, s'annulant pour $u = 0$, et représentant proportionnellement la résistance due à chaque molécule de milieu poreux.

Supposons actuellement que le milieu poreux soit une plaque ou une membrane à faces parallèles, d'épaisseur E, à travers laquelle passe un gaz soumis respectivement à deux pressions constantes p_0, p_1, à l'entrée et à la sortie. Si la plaque est composée de couches infiniment minces, parallèles à ses faces, et dont chacune soit homogène dans toute son étendue, le mouvement aura lieu perpendiculairement aux faces; p désignant la pression et ρ la densité en chaque point, x une coordonnée comptée à partir de la face d'entrée dans le sens du mouvement, la première équation de l'hydrodynamique donnera

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -uf(u) - u\frac{du}{dx}.$$

Admettons que la vitesse soit assez peu considérable pour que $f(u)$ puisse être développée par la série de Maclaurin limitée au terme du premier degré : $f(u)$ sera ainsi remplacée par Cu, C désignant un coefficient de résistance qui varie avec la nature des couches, et qui sera par conséquent une fonction déterminée de x. De plus, D étant un autre coefficient dépendant du gaz, et $\varphi(p)$ une certaine fonction, qui, d'après la loi de Mariotte, n'est autre que p, mais que nous supposerons seulement la même pour tous les gaz, nous pourrons poser

$$(\beta) \qquad \rho = D\varphi(p).$$

Enfin, si nous appelons ρ_0 et u_0 la densité et la vitesse au départ, la condition de continuité sera

$$(\gamma) \qquad \rho u = \rho_0 u_0 \quad \text{ou} \quad u\varphi(p) = u_0\varphi(p_0).$$

On peut de (β) et (γ) tirer les valeurs de ρ et u, pour les porter dans (α). Cette équation devient alors intégrable, et donne

$$(\delta)\qquad u_0^2\varphi(p_0) = \frac{\dfrac{1}{D\varphi(p_0)}\displaystyle\int_p^{p_0}\varphi(p)\,dp}{\displaystyle\int_0^x C\,dx + \log\frac{\varphi(p_0)}{\varphi(p)}}.$$

Faisons $x = E$, $p = p_1$, et multiplions les deux membres par D : il viendra

$$(\varepsilon)\qquad \rho_0\, u_0^2 = \frac{\dfrac{1}{\varphi(p_0)}\displaystyle\int_{p_1}^{p_0}\varphi(p)\,dp}{\displaystyle\int_0^E C\,dx + \log\frac{\varphi(p_0)}{\varphi(p_1)}}.$$

Le second membre ne dépend que de C, E, p_0, p_1; il ne varie pas avec la nature du gaz. Donc le produit $\rho_0\, u_0^2$ est constant pour tous les gaz soumis aux deux mêmes pressions p_0, p_1, à l'entrée et à la sortie de la plaque; c'est-à-dire que la vitesse de diffusion est bien en raison inverse de la racine carrée de la densité.

Il se peut que plusieurs gaz traversent à la fois la plaque ou la membrane, les uns dans un sens et les autres en sens contraire. Il est probable que les actions qu'ils exerceront les uns sur les autres seront, à cause de leurs faibles densités, très-petites par rapport à la résistance exercée sur eux par le milieu poreux. L'équation (α) sera donc sensiblement vérifiée pour chacun d'eux, qui se comportera comme si les autres n'y étaient pas.

§ XI. — *Mouvement permanent d'un liquide par filets horizontaux circulaires et conaxiques.*

Après le mouvement permanent d'un liquide par filets rectilignes et parallèles, le plus simple est celui qui se fait par filets circulaires horizontaux, ayant tous leurs centres sur une même verticale.

Nous prendrons pour axe des z cette verticale dirigée en haut, et pour axes des x et des y deux horizontales rectangulaires. Si r désigne la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ d'un point quelconque à l'axe des z, les composantes u, v, w de la vitesse V de la molécule qui passe en (x, y, z) à un instant quelconque, seront

$$(29)\qquad u = V\frac{-y}{r},\quad v = V\frac{x}{r},\quad w = 0.$$

D'ailleurs, à cause de l'incompressibilité du fluide, la vitesse sera constante tout le long d'un même filet liquide, ce qui revient à dire que V est seulement fonction de r et z. En calculant les expressions $\Delta_2 u$, $\Delta_2 v$, $\Delta_2 w$, on trouve aisément :

$$(30)\quad \begin{cases} \Delta_2 u = \dfrac{-y}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right), \quad \Delta_2 v = \dfrac{x}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right), \quad \Delta_2 w = 0, \\ \text{avec}\quad \Delta_2 V = \dfrac{d^2 V}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dV}{dr} + \dfrac{d^2 V}{dz^2}. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement

$$(31)\quad \begin{cases} -\dfrac{dp}{dx} + H\,\Delta_2 u = \rho\left(u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{du}{dy}\right), \\ -\dfrac{dp}{dy} + H\,\Delta_2 v = \rho\left(u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{dv}{dy}\right), \\ -\dfrac{dp}{dz} - \rho g = 0; \end{cases}$$

et, de plus, évaluons, d'après (29), les seconds nombres de ces dernières. Il viendra

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = H\dfrac{-y}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + \rho\dfrac{V^2}{r}\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{dp}{dy} = H\dfrac{x}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + \rho\dfrac{V^2}{r}\dfrac{y}{r}, \\ \dfrac{dp}{dz} = -\rho g. \end{cases}$$

Tirons en différentiant, de la première de ces équations, les valeurs de $\dfrac{d^2 p}{dz\,dx}$, $\dfrac{d^2 p}{dx\,dy}$, de la deuxième celles de $\dfrac{d^2 p}{dx\,dy}$, $\dfrac{d^2 p}{dy\,dz}$, et de la troisième celles de $\dfrac{d^2 p}{dy\,dz}$, $\dfrac{d^2 p}{dz\,dx}$; puis égalons deux à deux ces dérivées secondes. Nous aurons les trois conditions d'intégrabilité

$$(33)\quad \begin{cases} H\dfrac{-y}{r}\dfrac{d}{dz}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + 2\rho\dfrac{Vx}{r^2}\dfrac{dV}{dz} = 0, \\ H\dfrac{x}{r}\dfrac{d}{dz}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + 2\rho\dfrac{Vy}{r^2}\dfrac{dV}{dz} = 0, \\ \dfrac{1}{r}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) + \dfrac{d}{dr}\left(\Delta_2 V - \dfrac{V}{r^2}\right) = 0. \end{cases}$$

Les deux premières, respectivement multipliées par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et ajoutées, donnent

$$(34) \qquad \frac{dV}{dz} = 0,$$

condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient satisfaites. Cette relation entraîne une conséquence remarquable, savoir : que *la section normale du fluide doit être l'espace, illimité inférieurement, compris entre deux droites verticales*. Car, si les diverses verticales prises dans le fluide et suffisamment prolongées rencontraient un fond, on y aurait $V = 0$ d'après la condition relative à toute paroi mouillée : par suite la vitesse V serait nulle partout. Il est clair qu'on arriverait au même résultat $V = 0$, si la condition à la surface était celle de Navier, c'est-à-dire de la forme $\frac{dV}{dz} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots$.

La troisième condition (33), intégrée, donne à son tour, en désignant par c une constante,

$$(35) \qquad \Delta_2 V - \frac{V}{r^2} = \frac{-c}{r}.$$

Celle-ci a elle-même pour intégrale générale

$$(36) \qquad V = \frac{c}{2}\left[-r\log\frac{r}{A} + \frac{B}{r}\right],$$

où A et B sont les deux constantes arbitraires.

Appelons r_0, r_1 les distances à l'axe des z des deux verticales qui limitent une section normale du fluide. La condition $V = 0$ sur la paroi nous donnera, pour déterminer A et B, les deux équations du premier degré

$$r_0 \log A + \frac{1}{r_0} B = r_0 \log r_0, \quad r_1 \log A + \frac{1}{r_1} B = r_1 \log r_1.$$

Après quelques simplifications faciles, on trouve

$$(37) \qquad V = \frac{cr}{2}\left[\frac{1 - \frac{r_0^2}{r^2}}{1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}} \log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right].$$

La signification de la constante c est facile à obtenir. Les deux premières équations (32), respectivement multipliées par $\frac{-y}{r}$, $\frac{x}{r}$ et ajoutées, donnent

$$\frac{dp}{dx}\frac{-y}{r}+\frac{dp}{dy}\frac{x}{r}=-\mathrm{H}\frac{c}{r}. \tag{38}$$

Le premier membre de celle-ci est la dérivée de p le long de la tangente au filet liquide. Considérons deux sections normales du fluide, inclinées l'une sur l'autre d'un angle $d\alpha$: $rd\alpha$ sera l'élément du filet compris entre les deux sections, et, si dp désigne l'accroissement de pression que subit le filet de l'une à l'autre, la dérivée de p le long de cet élément sera $\frac{1}{r}\frac{dp}{d\alpha}$. La relation ci-dessus pourra s'écrire

$$c=\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{-dp}{d\alpha}. \tag{39}$$

On pourra remplacer c par cette valeur dans l'expression (37) de la vitesse : pour que celle-ci soit positive, il faudra que $\frac{dp}{d\alpha}$ soit négatif, comme il était évident.

Le rapport $\frac{dp}{d\alpha}$ est donc constant : d'où il résulte qu'aux points correspondants de deux sections normales, les pressions ne diffèrent que par une constante, proportionnelle à l'angle α.

Il ne reste plus qu'à trouver comment varie la pression aux divers points d'une même section normale. Multiplions les deux premières des équations (32), respectivement par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, et ajoutons. Il viendra

$$\frac{dp}{dr}=\rho\frac{\mathrm{V}^2}{r}. \tag{40}$$

D'où, dans l'étendue d'une même section,

$$p=\text{const}+\rho\left(-gz+\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{V}^2}{r}\,dr\right),$$

et, en général,

$$p=\text{const}+\rho\left(-\frac{\mathrm{H}}{\rho}c\alpha-gz+\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{V}^2}{r}\,dr\right), \tag{41}$$

où V doit être remplacé par sa valeur (36).

Évaluons la dérivée de V par rapport à r, dérivée qui mesure le glissement relatif de deux couches cylindriques infiniment voisines. La formule (37) la donne :

$$(42) \qquad \frac{dV}{dr} = \frac{c}{2}\left[\frac{1+\frac{r_0^2}{r^2}}{1-\frac{r_0^2}{r_1^2}} \log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0} - 1\right].$$

Cette dérivée décroît, dans chacun de ses termes variables, quand r grandit : or nous verrons bientôt qu'elle est positive pour $r = r_0$ et négative pour $r = r_1$; donc elle ne s'annule qu'une fois, pour une valeur de r comprise entre r_0 et r_1 : V, nul pour $r = r_0$ et pour $r = r_1$, croît avec r jusqu'à ce que r soit égal à cette valeur intermédiaire, et décroît ensuite.

Les valeurs de la dérivée pour $r = r_0$ et $r = r_1$ sont d'après (42), en changeant le signe de la dernière, et posant

$$(43) \qquad \frac{r_0^2}{r_1^2} = q = 1 - \varepsilon,$$

$$(44) \qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dr}\right)_0 &= \frac{c}{2}\left(\frac{-\log q}{1-q} - 1\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^3}{4} + \ldots\right), \\ -\left(\frac{dV}{dr}\right)_1 &= \frac{c}{2}\left(1 + \frac{q\log q}{1-q}\right) = \frac{c}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2.3} + \frac{\varepsilon^3}{3.4} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Les actions tangentielles exercées par le fluide sur les deux parois sont respectivement égales à H, multiplié par $\left(\frac{dV}{dr}\right)_0$ ou par $-\left(\frac{dV}{dr}\right)_1$. La première est plus grande que la seconde : donc la berge concave ou extérieure est soumise à un frottement moins considérable que la berge convexe.

Ce dernier résultat pourrait n'être plus vrai, si la condition relative aux parois cessait d'être $V = 0$. Admettons que cette condition soit généralement celle de Navier, c'est-à-dire de la forme

$$\text{pour} \quad r = r_0, \qquad \frac{dV}{dr} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots;$$

$$\text{pour} \quad r = r_1, \qquad -\frac{dV}{dr} = h_1 V + h_2 V^2 + \ldots.$$

Notre hypothèse $V = 0$ à la paroi n'en est qu'un cas particulier, celui où les coefficients h_1, h_2,... seraient infinis. Examinons le cas particulier contraire, celui où ces coefficients seraient très-petits.

Alors on aurait sensiblement aux deux parois,

$$\text{non plus}\quad V = 0, \quad \text{mais}\quad \frac{dV}{dr} = 0.$$

Toute notre analyse subsistera, sauf la formule (37) et ses conséquences. Pour déterminer les constantes A et B de l'intégrale (36), nous aurons les deux relations

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dV}{dr}\right)_1 = 0,$$

ou

$$-1 - \log\frac{r_0}{A} - \frac{B}{r_0^2} = 0, \quad -1 - \log\frac{r_1}{A} - \frac{B}{r_1^2} = 0,$$

qui donnent

$$B = \frac{r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0}, \quad \log A = 1 + \log r_0 + \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0},$$

et, par suite,

$$V = \frac{cr}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)\frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right],$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{c}{2}\left[\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)\frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1}{r_0} - \log\frac{r}{r_0}\right],$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{c}{2r^3}\left(\frac{r_1^2 r_0^2}{r_1^2 - r_0^2}\log\frac{r_1^2}{r_0^2} - r^2\right) = \frac{cr_0^2}{2r^3}\left(\frac{-\log q}{1-q} - \frac{r^2}{r_0^2}\right).$$

Il est clair que cette dernière dérivée, d'abord positive pour r assez petit, s'annule une fois et ne cesse pas ensuite d'être négative. La valeur de r qui l'annule est comprise entre r_0 et r_1. En effet, on a

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_0 = \frac{c}{2r_0}\left(\frac{-\log q}{1-q} - 1\right) = \frac{c}{2r_0}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right),$$

$$\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)_1 = -\frac{c}{2r_1}\left(1 + \frac{q\log q}{1-q}\right) = -\frac{c}{2r_1}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2.3} + \ldots\right).$$

Donc la dérivée première de V par rapport à r part de zéro pour

$r = r_0$, croît jusqu'à cette valeur intermédiaire de r, décroît ensuite et s'annule pour $r = r_1$: elle est constamment positive, ou plutôt, à cause de h_1, h_2,... très-petits, et non pas rigoureusement nuls, elle ne devient négative qu'au moment où r va devenir égal à r_1. Par suite, la vitesse croît sans cesse avec r : elle a sa valeur la plus petite pour $r = r_0$, et sa valeur la plus grande pour $r = r_1$. Ces deux valeurs sont

$$V_0 = \frac{cr_0}{2}\left(\frac{-\log q}{1-q} + 1\right) = cr_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \ldots\right)\right],$$
$$V_1 = \frac{cr_1}{2}\left(1 + \frac{-q\log q}{1-q}\right) = cr_1\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2.3} + \ldots\right)\right].$$

La berge concave est donc, contrairement à ce qui arrivait lors de la condition $V = 0$ à la paroi, soumise à un frottement plus grand que la berge convexe. Seulement ces deux frottements sont du même ordre de grandeur, et leur différence ne peut pas sans doute expliquer, d'une part, les dégradations que l'eau produit sur la première berge aux tournants des rivières, et, d'autre part, les atterrissements qu'elle forme sur la seconde. La vraie cause de ce phénomène est probablement celle indiquée à la fin de l'Introduction de ce Mémoire.

Le cas général où les coefficients h_1, h_2,... ne seraient ni nuls, ni infinis, conduirait naturellement à des résultats intermédiaires. Je l'ai traité en supposant la vitesse assez petite pour qu'on puisse négliger les termes de l'ordre de V^2. Mais les formules me paraissent trop compliquées pour qu'il en résulte quelque loi intéressante.

§ XII. — *Essai sur le mouvement permanent d'un liquide dans un canal horizontal à axe circulaire.*

Nous avons démontré que le mouvement permanent d'un liquide peut se faire par filets circulaires et conaxiques dans le cas seulement où il n'y a ni fond, ni couvercle. Cherchons actuellement ce qui arrivera si le canal horizontal, à axe circulaire, a une section normale finie en tous sens et d'ailleurs constante.

Adoptons les mêmes axes qu'au paragraphe précédent, et décomposons en trois autres la vitesse du fluide en un point quelconque

(x, y, z) : la première composante V, la seule qui existât au paragraphe précédent, sera prise parallèle à l'axe du canal; la deuxième V', horizontale comme la première, sera dirigée suivant le prolongement du rayon r; enfin la troisième, verticale, n'est autre que w. La composante V fait avec les axes des angles qui ont pour cosinus $\frac{-y}{r}$, $\frac{x}{r}$, o, et la composante V' des angles qui ont pour cosinus $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, o. On aura donc

$$(29\ bis) \qquad u = \mathrm{V}\frac{-y}{r} + \mathrm{V}'\frac{x}{r}, \quad v = \mathrm{V}\frac{x}{r} + \mathrm{V}'\frac{y}{r}.$$

Le mouvement permanent étant supposé établi, et toutes les sections normales du canal se trouvant dans les mêmes conditions, nous admettrons que les vitesses V, V' sont les mêmes aux points correspondants des diverses sections normales, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de r et de z. Les formules (30) permettront d'écrire sans nouveau calcul :

$$(30\ bis) \quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_2 u &= \frac{-y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right),\\
\Delta_2 v &= \frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \frac{y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right),\\
\Delta_2 w &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \frac{d^2 w}{dz^2},\\
&\text{avec}\\
\Delta_2 \mathrm{V} &= \frac{d^2 \mathrm{V}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{d^2 \mathrm{V}}{dz^2},\\
\Delta_2 \mathrm{V}' &= \frac{d^2 \mathrm{V}'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{V}'}{dr} + \frac{d^2 \mathrm{V}'}{dz^2}.
\end{aligned}\right.$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du mouvement

$$(31\ bis) \quad \left\{\begin{aligned}
-\frac{dp}{dx} + \mathrm{H}\Delta_2 u &= \rho\left(u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}\right),\\
-\frac{dp}{dy} + \mathrm{H}\Delta_2 v &= \rho\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz}\right),\\
-\frac{dp}{dz} + \mathrm{H}\Delta_2 w - \rho g &= \rho\left(u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}\right);
\end{aligned}\right.$$

de plus, tirons, des formules (29 *bis*), les seconds nombres de ces dernières. Il viendra

$$(32\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \mathrm{H}\left[\frac{-y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)\right] \\
&\quad - \rho\left[-\frac{x}{r}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r} - \mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right) + \frac{-y}{r}\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + w\left(\frac{-y}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dz} + \frac{x}{r}\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right)\right], \\
\frac{dp}{dy} &= \mathrm{H}\left[\frac{x}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) + \frac{y}{r}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right)\right] \\
&\quad - \rho\left[-\frac{y}{r}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r} - \mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right) + \frac{x}{r}\mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + w\left(\frac{x}{r}\frac{d\mathrm{V}}{dz} + \frac{y}{r}\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right)\right], \\
\frac{dp}{dz} &= \mathrm{H}\Delta_2 w - \rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr} + w\frac{dw}{dz}\right) - \rho g.
\end{aligned}\right.$$

Les conditions d'intégrabilité pour la fonction p, obtenues en différentiant ces relations, sont

$$(33\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{x}{r}\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\Delta_2 w - \rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr} + w\frac{dw}{dz}\right)\right] \\
&\quad = \frac{-y}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right] \\
&\qquad + \frac{x}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right) + \rho\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r} - \mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right], \\
&\frac{y}{r}\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\Delta_2 w - \rho\left(\mathrm{V}'\frac{dw}{dr} + w\frac{dw}{dz}\right)\right] \\
&\quad = \frac{x}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right] \\
&\qquad + \frac{y}{r}\frac{d}{dz}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V}' - \frac{\mathrm{V}'}{r^2}\right) + \rho\left(\frac{\mathrm{V}^2}{r} - \mathrm{V}'\frac{d\mathrm{V}'}{dr}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}'}{dz}\right], \\
&\frac{d}{dr}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right] \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\mathrm{H}\left(\Delta_2 \mathrm{V} - \frac{\mathrm{V}}{r^2}\right) - \rho \mathrm{V}'\left(\frac{d\mathrm{V}}{dr} + \frac{\mathrm{V}}{r}\right) - \rho w\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les deux premières, respectivement multipliées par $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ et ajoutées, puis par $\frac{-y}{r}$, $\frac{x}{r}$ et ajoutées, se changent en

$$(34\ bis)\quad \begin{cases} \frac{d}{dr}\left[H\Delta_2 w - \rho\left(V'\frac{dw}{dr} + w\frac{dw}{dz}\right)\right] \\ \quad = \frac{d}{dz}\left[H\left(\Delta_2 V' - \frac{V'}{r^2}\right) + \rho\left(\frac{V^2}{r} - V'\frac{dV'}{dr}\right) - \rho w\frac{dV'}{dz}\right], \\ \frac{d}{dz}\left[H\left(\Delta_2 V - \frac{V}{r^2}\right) - \rho V'\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right) - \rho w\frac{dV}{dz}\right] = 0. \end{cases}$$

La troisième (33 *bis*), intégrée en même temps que la dernière de celles-ci, donne, en désignant par c une constante,

$$(35\ bis)\quad H\left(\Delta_2 V - \frac{V}{r^2}\right) - \rho V'\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r}\right) - \rho w\frac{dV}{dz} = \frac{-c}{r}.$$

La signification de la constante c s'obtiendra comme au paragraphe précédent (38) et (39). Elle n'est autre, changée de signe, que le quotient par H de la dérivée de la pression, quand on passe d'un point quelconque d'une section normale au point correspondant de la section infiniment voisine, inclinée sur la première d'un angle $d\alpha$: cette dérivée $\frac{dp}{d\alpha}$ est donc constante, comme si le mouvement se faisait par filets circulaires et conaxiques.

Les trois équations indéfinies qui serviront à déterminer V, V', w en fonction de r et de z sont donc : la première (34 *bis*), la relation (35 *bis*), et la condition de continuité (4), qui devient ici

$$(45)\qquad \frac{dV'}{dr} + \frac{V'}{r} + \frac{dw}{dz} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{drV'}{dr} + \frac{drV'}{dz} = 0.$$

Ces trois équations sont facilement intégrables, quand le canal est un tube qui a pour section normale un rectangle à base horizontale et d'une hauteur $2h$ très-petite.

Supposons le plan des xy à mi-hauteur de la section. D'après les conditions $V = 0$, $V' = 0$, $w = 0$ à la paroi, V devra s'annuler pour $z = +h$ et pour $z = -h$: elle sera donc de l'ordre de petitesse de h^2. V' devra s'annuler au moins une fois de plus, pour une valeur de z comprise entre $z = -h$, $z = h$: on doit avoir en effet

$$(46)\qquad \int_{-h}^{h} V'dz = 0;$$

car, si l'on considère le liquide contenu entre le bord convexe du tube, deux sections normales infiniment voisines, et un plan vertical quelconque mené dans le fluide perpendiculairement à ces sections, il faut que le liquide qui entre par une partie de cette face verticale soit égal à celui qui sort par l'autre partie de la même face, puisqu'il en entre autant par la première section normale qu'il en sort par la seconde. Ainsi V change de signe quand z va de $-h$ à h, et est au plus de l'ordre de h^3. Les dérivées de V et V' par rapport à r seront évidemment du même ordre que V et V', pour tous les points situés à une distance finie des bords verticaux du tube, tandis que leurs dérivées premières en z seront incomparablement plus grandes, et leurs dérivées secondes encore plus.

Quant à la composante w, l'équation (45) montre que sa dérivée première en z est de l'ordre de V', et qu'elle est par conséquent elle-même de l'ordre de $V'h$. En négligeant d'après ces remarques, dans l'équation (35 *bis*) et dans la première (34 *bis*), les termes qui sont très-petits par rapport à d'autres, on les changera en

$$H\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-c}{r},\quad \frac{d}{dz}\left(H\frac{d^2V'}{dz^2} + \rho\frac{V^2}{r}\right) = 0.$$

La première donne d'abord, en tenant compte des conditions $V = 0$ pour $z = \pm h$,

$$V = \frac{ch^2}{2Hr}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right). \tag{47}$$

Cette valeur de V, portée dans la seconde, permet de l'intégrer. En tenant compte des conditions $V' = 0$ pour $z = \pm h$, et désignant par A une fonction de r, il vient

$$V' = \frac{\rho c^2 h^6}{8H^3 r^3}\left[A\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z^4}{h^4}\right) + \frac{1}{15}\left(1 - \frac{z^6}{h^6}\right)\right].$$

Multiplions par dz et intégrons entre les limites $z = -h$ et $z = +h$. La condition (46) donnera $A = \frac{11}{35}$. Ensuite l'équation (45) sera devenue elle-même intégrable en z, et, avec les conditions $w = 0$ à la paroi, déterminera complétement w. Une décomposition facile en facteurs permettra finalement d'obtenir

$$(48)\quad \begin{cases} V' = \dfrac{\rho c^2 h^6}{120 H^3 r^3}\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)\left(2 + \sqrt{\dfrac{23}{7}} - \dfrac{z^2}{h^2}\right)\left(2 - \sqrt{\dfrac{23}{7}} - \dfrac{z^2}{h^2}\right), \\ w = \dfrac{2}{7}\dfrac{\rho c^2 h^7}{120 H^3 r^3}\dfrac{z}{h}\left(1 - \dfrac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5 - \dfrac{z^2}{h^2}\right). \end{cases}$$

Ces valeurs ne sont évidemment pas applicables aux points situés très-près des deux bords verticaux du tube.

V' étant une fonction paire de z, et w une fonction impaire, les phénomènes se passent symétriquement au-dessus et au-dessous du plan des xy : il suffit d'examiner ce qui a lieu au-dessus.

V' est positif de $z = 0$ à $z = h\sqrt{2 - \sqrt{\frac{23}{7}}} = 0,431h$; au delà V' est négatif. Donc les molécules situées vers la partie moyenne du tube, entre les valeurs $z = 0$ et $z = 0,431h$, c'est-à-dire celles qui, d'après (47), sont animées de la plus grande vitesse, vont à la dérive en s'approchant du bord concave ou extérieur du tube; celles qui sont plus près de la paroi supérieure s'approchent au contraire du bord convexe ou intérieur. Il y a deux maximums pour la valeur absolue de V' : l'un correspond à $z = 0$, l'autre à $z = h\sqrt{\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{76}{63}}} = 0,754h$. Abstraction faite du facteur $\frac{\rho c^2 h^6}{120 H^3 r^3}$, ces deux maximums sont respectivement 2,856 et 2,144.

w est partout positif pour $z > 0$: donc les molécules montent. Celles qui, sur une même verticale, ont le plus de vitesse ascendante, correspondent à $\frac{dw}{dz} = 0$ ou $V' = 0$, c'est-à-dire à la valeur $0,431h$ de z, pour laquelle les molécules cessent d'aller vers le bord concave du tube pour revenir vers le bord convexe. La vitesse ascendante n'est nulle que pour les molécules situées sur le plan des xy, et pour celles qui adhèrent aux parois [*].

---

[*] Il est clair que les molécules liquides, après être venues, en montant, près du bord convexe du tube, descendent pour faire place à celles qui les suivent : mais nos formules ne s'appliquent pas à cette partie de leur mouvement.

Si dr et dz sont les accroissements simultanés que reçoivent, durant l'instant dt, le r et le z d'une molécule, il est clair qu'on aura

$$\frac{dr}{V'} = \frac{dz}{w},$$

ou bien, à cause de $V' = \frac{r}{2}\frac{dw}{dz}$,

$$2\frac{dr}{r} = \frac{d\left[\frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right)\right]}{\frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right)},$$

dont l'intégrale est

$$(49) \qquad r^2 = \text{const.} \times \frac{z}{h}\left(1-\frac{z^2}{h^2}\right)^2\left(5-\frac{z^2}{h^2}\right), \quad \text{ou} \quad r^2 w = \text{const.}$$

Ainsi la vitesse ascendante de chaque molécule varie, durant son mouvement, en raison inverse de la racine carrée de sa distance à l'axe des z : elle est le plus petite possible au moment où la molécule se retourne vers le bord convexe. La relation (49) montre que les molécules ne vont pas jusqu'à la paroi supérieure, car l'hypothèse $z = h$ donne $r = 0$, valeur inadmissible.

Le temps qu'elles emploient à s'élever d'un niveau z_0 à leur niveau actuel z s'obtiendrait aisément, en remplaçant, dans la seconde relation (48), r^2 par sa valeur (49), w par $\frac{dz}{dt}$, puis résolvant par rapport à dt, et intégrant de z_0 à z.

Il nous est actuellement facile de nous représenter l'ensemble du mouvement. *En même temps que le liquide avance dans le tube avec la vitesse* V (47), *il est animé d'un mouvement transversal beaucoup plus lent, qui le transforme en deux tourbillons, l'un supérieur, l'autre inférieur, séparés par le plan des xy. Les deux tourbillons sont symétriques par rapport à ce plan. Dans chacun d'eux, les molécules les plus éloignées de la paroi, c'est-à-dire celles qui ont la plus grande vitesse, se rapprochent du bord concave tout en s'éloignant petit à petit du plan des xy. Arrivées à la distance* $0{,}431h$ *de ce plan, elles reviennent vers* *le bord convexe, et continuent d'ailleurs à s'écarter du plan des xy, et à perdre leur vitesse.* Il est évident qu'après s'être suffisamment approchées du bord convexe, elles repassent dans les régions moyennes où la vitesse est plus grande, et recommencent un trajet pareil. Mais nos formules ne s'appliquent plus à cette partie du mouvement, tout comme elles peuvent ne pas s'appliquer à la totalité de la première partie : elles n'ont été établies que pour les points situés à une distance finie des bords latéraux.

A cause de la petitesse de V' et de w, la pression est à très-peu près donnée par la formule (41).

Si l'on supprime toute la partie du fluide qui est au-dessus du plan des xy, et qu'on la remplace par une atmosphère exerçant sur chaque élément de ce plan la même pression qu'elle, rien ne sera changé au mouvement de la partie inférieure. En effet, les formules (47), (48) et (29 *bis*) donneront à la surface libre, ou pour $z = 0$,

$$\frac{dw}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0,$$

et par suite, d'après les formules (2),

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0,$$

c'est-à-dire que les conditions relatives à la surface libre seront bien vérifiées.

Il n'y a par conséquent, dans un canal découvert à axe circulaire, qu'un seul tourbillon, analogue au tourbillon inférieur d'un tube de section deux fois plus haute.

Nous avons admis l'hypothèse $u = 0$, $v = 0$ aux deux parois supérieure et inférieure. Si l'on y supposait au contraire le frottement nul, les relations spéciales à ces surfaces seraient

$$w = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{dv}{dz} = 0.$$

On satisfait à ces conditions, ainsi qu'aux équations indéfinies, en faisant partout

$$\frac{dV}{dz} = 0, \quad V' = 0, \quad w = 0.$$

L'écoulement aurait donc lieu par filets circulaires et conaxiques, c'est-à-dire qu'il n'y aurait aucun mouvement transversal.

Il est clair que l'hypothèse intermédiaire d'un frottement sensible aux parois supérieure et inférieure, mais pas assez grand pour y annuler les vitesses, donnerait des mouvements transversaux pareils à ceux que nous avons obtenus, mais moins rapides par rapport au mouvement longitudinal.

Note I (relative au § I, p. 381).

Pour obtenir les formules (2), p. 381, on observera :

1° Que, si l'on change simplement le sens de l'axe des x par les transformations de x en $-x$, et de u en $-u$, les formules des N, T seront les mêmes dans le nouveau système d'axes que dans le premier. Or la nouvelle force N_1 sera celle qui est exercée sur le même élément parallèle aux yz, mais du côté des x d'abord négatifs : elle sera égale à la force de même nom dans le premier système. On verra pareillement que les forces N_2, N_3, T_1 restent les mêmes, et que T_2, T_3 changent de signe. Donc les transformations simultanées de x en $-x$ et de u en $-u$ doivent laisser invariables N_1; N_2, N_3, T_1, et faire changer de signe T_2 et T_3.

De même les transformations simultanées de y en $-y$ et de v en $-v$ doivent laisser invariables N_2, N_3, N_1, T_2, et changer de signe T_3, T_1. Enfin les changements de z en $-z$ et de w en $-w$ ne changent pas N_3, N_1, N_2, T_3, et transforment T_1, T_2 en $-T_1$, $-T_2$. Il suit de là que l'expression de N_1 se réduit à une constante, suivie de trois termes en $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, et que celle de T_1 contient seulement les deux termes en $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dw}{dy}$. D'ailleurs, comme on peut permuter les deux axes des y et des z sans changer les formules, $\frac{dv}{dy}$ et $\frac{dw}{dz}$ auront un coefficient égal dans N_1, et il en sera de même de $\frac{dv}{dz}$ et $\frac{dw}{dy}$ dans T_1. Nous obtiendrons ainsi les formules (2) de N_1, T_1, dans lesquelles seulement nous n'aurons pas encore le droit de regarder les deux coefficients H comme égaux.

Les formules (2) de N_2 et N_3, T_2 et T_3, se déduiront évidemment de celles de N_1 et T_1.

2° Que, si l'on fait tourner d'un angle infiniment petit ι, autour de l'axe des z, le système des deux autres axes, les formules des N, T dans le nouveau système seront les mêmes que dans le premier. Appelons : x_1, y_1, z_1 les nouvelles coordonnées du point (x, y, z); u_1, v_1, w_1 les composantes, suivant les nouveaux axes, de la vitesse (u, v, w). Nous aurons les formules de transformation

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{d}{dx_1} - \iota\dfrac{d}{dy_1}, & \dfrac{d}{dy} = \dfrac{d}{dy_1} + \iota\dfrac{d}{dx_1}, \quad \dfrac{d}{dz} = \dfrac{d}{dz_1}; \\ u = u_1 - \iota v_1, & v = v_1 + \iota u_1, \quad w = w_1. \end{cases}$$

D'autre part, appelons $N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3$ les forces N, T relatives aux nouveaux axes. Les formules (1), ou plus directement celles qu'établit M. Lamé au § 18 de ses *Leçons sur l'Élasticité*, donneront

$$(\beta)\qquad \begin{cases} N'_1 = N_1 + 2\iota T_3, & N'_2 = N_2 - 2\iota T_3, & N'_3 = N_3; \\ T'_1 = T_1 - \iota T_2, & T'_2 = T_2 + \iota T_1, & T'_3 = T_3 - \iota(N_1 - N_2). \end{cases}$$

Si nous substituons dans ces formules, à $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, leurs expressions (2) en $\dfrac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$, puis, à ces dérivées, leurs valeurs en $\dfrac{d(u_1, v_1, w_1)}{d(x_1, y_1, z_1)}$, fournies par (α), les termes qui contiendront ι devront s'annuler quelles que soient ces dernières dérivées, puisque les formules des N, T doivent être les mêmes dans le nouveau système que dans le premier. On verra ainsi qu'il est nécessaire et suffisant, pour cela, que le coefficient H qui entre dans l'expression des N soit égal au coefficient de même nom dans celle des T. Les formules (2) sont donc nécessaires pour l'isotropie. Il serait d'ailleurs aisé de voir qu'elles sont suffisantes, ou que toute transformation d'axes rectangulaires en d'autres rectangulaires ne les modifiera pas.

3° Qu'un simple mouvement d'ensemble du fluide, c'est-à-dire une rotation élémentaire autour d'un axe quelconque, ne doit développer aucune force, et doit laisser par suite les N égaux à $-p$ et les T égaux à zéro. A cause de l'isotropie, on peut choisir l'axe de la rotation pour celui des z, ce qui, en appelant ω la vitesse angulaire, donne $u = -\omega y$,

$v = \omega x$, $w = 0$. Ces valeurs, portées dans (2), annulent bien T_1, T_2, T_3, et rendent N_1, N_2, N_3 égales à $-p$.

Il n'y a donc pas de nouvelle réduction à faire.

Ces trois remarques permettraient d'obtenir les termes N, T qui contiennent les $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ à des degrés supérieurs au premier. En me bornant aux termes du second degré, et désignant par A, B, C, D, E des coefficients arbitraires, j'ai trouvé

$$\begin{aligned}
N_1 = {} & A\left(\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dw^2}{dx^2} - \frac{du^2}{dy^2} - \frac{du^2}{dz^2}\right) + 2B\theta\frac{du}{dx} \\
& + 2C\left[2\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du}{dy}\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) + \frac{du}{dz}\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\right] + D\theta^2 \\
& + E\left[\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)^2\right. \\
& \qquad\qquad \left. - 4\left(\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}\right)\right], \\
T_1 = {} & A\left(\frac{du}{dy}\frac{du}{dz} + \frac{dv}{dy}\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\frac{dw}{dz} - \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right) \\
& + B\theta\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + C\left[2\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + \frac{du}{dy}\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dv}{dx}\right].
\end{aligned}$$

On en déduit N_2 et T_2, N_3 et T_3, par une ou par deux permutations circulaires effectuées sur : u, v, w ; x, y, z.

Dans le cas du § II, ou du mouvement rectiligne d'un liquide homogène par filets parallèles à l'axe des x, on a

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{du}{dx} = 0;$$

et ces formules se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned}
N_1 &= (-A + 2C + E)\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
N_2 &= A\frac{du^2}{dy^2} + E\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
N_3 &= A\frac{du^2}{dz^2} + E\left(\frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right), \\
T_1 &= A\frac{du}{dy}\frac{du}{dz}, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0
\end{aligned}\right.$$

Ces nouveaux termes, portés dans les équations du mouvement, ne changent pas la première (6), mais augmentent respectivement les premiers nombres des deux autres de

$$-\left(E+\frac{A}{2}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right)-A(\Delta_2 u)\frac{du}{dy},$$

et de

$$-\left(E+\frac{A}{2}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{du^2}{dy^2}+\frac{du^2}{dz^2}\right)-A(\Delta_2 u)\frac{du}{dz}.$$

En suivant la marche du § II, on trouvera, pour déterminer u, les mêmes équations indéfinies et les mêmes conditions relatives à la surface, que si l'on négligeait les termes du second degré. Mais il y aura de plus une condition d'intégrabilité

$$A\left(\frac{du}{dz}\frac{d^2u}{dy\,dt}-\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dz\,dt}\right)=0,$$

qui devra être vérifiée en tous les points du fluide. Elle l'est identiquement quand l'état permanent existe. Ainsi la considération des termes du second degré ne modifie en rien les résultats des §§ IV, V et VI.

Observons que ces termes n'ajoutent rien aux composantes tangentielles T_2, T_3, c'est-à-dire qu'ils ne donnent aucun frottement sur tout élément plan parallèle aux filets liquides.

Note II (après le § VI).

État permanent dans un tube à section triangulaire équilatérale. — En prenant pour axe des z une des trois hauteurs de la section, pour axe des y la base correspondante, et appelant $2c$ un côté, σ l'étendue de la section, on trouve :

$$V=\frac{3}{4}Lc^2\frac{z}{c\sqrt{3}}\left[\left(1-\frac{z}{c\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{y}{c}\right)^2\right];$$

d'où

$$\text{Dépense}=\frac{\sqrt{3}}{20}Lc^4=\frac{L\sigma^2}{20\sqrt{3}}=0,0289\,L\sigma^2.$$