JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE SAINT-VENANT

Formules de l'élasticité des corps amorphes que des compressions permanentes et inégales ont rendus hétérotropes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 13 (1868), p. 242-254.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__242_0>

FORMULES DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS AMORPHES
QUE DES COMPRESSIONS PERMANENTES ET INÉGALES ONT RENDUS HÉTÉROTROPES;

PAR M. DE SAINT-VENANT.

Dans un Mémoire publié en 1863 [*], j'ai étudié les lois de la distribution, autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu quelconque, de ses *élasticités directes,* en appelant ainsi les coefficients qui, multipliés par les proportions de petites dilatations produites dans les sens de diverses droites, donnent les composantes, dans les mêmes sens, des tensions ou forces élastiques qui en résultent sur l'unité superficielle de petites faces qui leur sont perpendiculaires. J'ai considéré particulièrement les corps où ces élasticités se distribuent *ellipsoïdalement,* c'est-à-dire où l'on a un ellipsoïde pour la surface dont les rayons vecteurs, menés dans leurs sens respectifs, mesurent les inverses, soit des racines carrées, soit des racines quatrièmes de ces mêmes élasticités.

Et j'ai montré que ce double mode de distribution ellipsoïdale, qui se réduit à un seul quand les élasticités en divers sens ont des grandeurs peu inégales, devait avoir lieu généralement dans les solides non isotropes mais *amorphes* ou à cristallisation confuse, tels que les métaux, etc., dont on peut regarder l'isotropie primitive comme ayant été altérée par un rapprochement permanent et inégal de leurs molécules en divers sens.

---

[*] *Voir* tome VIII, 2e série, p. 257-430: « *Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope.* »

J'ai fait ressortir l'importance pratique des formules des pressions ou tensions relatives à ce mode, non-seulement pour les recherches des physiciens sur la lumière [*], mais aussi pour les calculs des ingénieurs sur la résistance des solides, car on n'emploie pas de corps régulièrement cristallisés dans les constructions et les machines, et tous les matériaux qu'on y met en œuvre sont dans le cas d'amorphisme dont nous venons de parler; en sorte que quand l'expérience dénote l'impossibilité d'y appliquer les formules connues d'isotropie à un seul coefficient (*voyez* plus loin), il convient de traiter avec les formules nouvelles et très-simples d'hétérotropie les questions qui leur sont relatives.

Mais c'est par un calcul d'*actions s'exerçant entre molécules très-proches et fonctions de leurs petites distances mutuelles* que j'ai, au Mémoire de 1863 cité, montré l'identité des formules de pressions dans les corps primitivement isotropes et déformés avec celles de distribution ellipsoïdale. Or un certain nombre de savants rejettent, depuis quelque temps, cette manière de procéder des inventeurs de la Mécanique des corps élastiques, bien qu'elle ne soit que l'application rigoureuse d'une grande loi physique qui est toujours tacitement invoquée, même quand on cherche à en éluder l'emploi [**]. Ils partent unique-

---

[*] Les recherches récentes sur la théorie de la lumière sont basées comme l'on sait, pour les uns, sur la supposition que l'éther, dans l'intérieur des corps transparents biréfringents, est un milieu resté homogène, mais dont l'isotropie primitive se trouve partout altérée comme par des compressions inégales dans trois sens; et, pour les autres, sur la supposition que l'isotropie, ou l'inégalité d'élasticité en divers sens autour de chaque point, subsiste partout dans de petites étendues, mais que la *densité* de l'éther varie d'une manière périodique en raison de l'action, quelle qu'elle soit, qui est exercée sur lui par les groupes, aussi périodiquement disposés, des molécules du corps cristallin où il est contenu. Tout en laissant à l'avenir la décision du choix entre ces deux hypothèses, la première semble digne d'attention et d'étude quand on considère que *le verre comprimé*, où les molécules ne forment que des groupes non périodiques, produit la double réfraction comme les corps régulièrement cristallisés, et que, quelle que soit la variété des formes et des contextures de ceux-ci, les principaux phénomènes optiques semblent ne les ranger qu'en deux classes : cristaux à un axe, cristaux à deux axes.

[**] *Voyez* la fin du n° 2 du Mémoire cité, et aussi l'Appendice V de ma nouvelle édition annotée (1864) des *Leçons* de Navier à l'École des Ponts et Chaussées.

ment, pour établir les formules des pressions ou forces élastiques dans des corps quelconques, de la supposition que leurs six composantes (*stress*) sont fonctions linéaires des six petites déformations élémentaires éprouvées (*strain*), ou, si l'on veut, des neuf dérivées partielles des déplacements des points par rapport à leurs coordonnées. M. le professeur Boussinesq, docteur ès sciences, vient donc de rendre à la théorie de l'élasticité un service réel en donnant, des nouvelles formules, une démonstration simple [*], se basant uniquement sur une supposition analogue et très-naturelle, à savoir que leurs coefficients sont eux-mêmes fonctions linéaires de trois quantités très-petites, relatives aux trois directions principales et orthogonales des compressions permanentes éprouvées. De cette manière, les formules en question seront, sans aucun doute, adoptées par tous les savants, quelle que soit leur opinion sur la loi des actions moléculaires; loi qui justifie au reste, quand on l'admet, les deux hypothèses de *linéarité* ainsi mises en œuvre simultanément.

Je crois utile, en conséquence, de reproduire ici sous une autre forme cette démonstration nouvelle, en la réduisant pour le cas d'*un corps solide* ayant pris un état d'équilibre stable après la cessation supposée de l'action des forces quelconques qui ont altéré d'une manière permanente son isotropie native; en sorte que *je ferai nulles* (sauf à les rétablir ensuite) *les pressions antérieures* aux déplacements relatifs *nouveaux* de ses points, déplacements qui seront supposés rester désormais dans les limites de la conservation de son élasticité, ou au-dessous de ce qui produirait de nouvelles altérations de contexture.

On sait que toute déformation d'un corps peut être réduite, en chacun de ses points, à trois compressions ou dilatations dites *principales*, ayant lieu dans des directions perpendiculaires entre elles [**].

---

[*] *Sur les ondes dans les milieux isotropes déformés*, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (article précédant celui-ci).

[**] Ce théorème est dû à Cauchy. Il l'a obtenu (*Exercices de Mathématiques*, 1826) au moyen de développements de Taylor à trois variables, etc. Mais on peut l'établir très-simplement, comme j'ai fait par exemple au *Bulletin de la Société philomathique* (26 novembre 1864) ou au numéro du 7 décembre du journal *l'Institut*, p. 389, en considérant d'une manière purement élémentaire ce que devient, par la déformation éprouvée, un élément sphérique de rayon très-petit. En effet, comme cette déforma-

Un corps primitivement isotrope, déformé d'une manière permanente, sera donc, en un point quelconque, *d'une contexture symétrique* par rapport à trois plans orthogonaux se coupant en ce point. Prenons leurs intersections mutuelles pour axes des x, des y, des z. Si nous appelons, comme il a été fait au Mémoire de 1863 et à plusieurs autres,

$$(1) \qquad \partial_x, \partial_y, \partial_z \quad \text{et} \quad g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$$

les trois petites *dilatations* éprouvées, depuis le nouvel état stable du corps, par trois petites lignes matérielles qui étaient dirigées suivant les x, les y, les z avant les déplacements nouveaux ou élastiques, et les trois cosinus des angles très-peu aigus qu'elles font maintenant entre elles, cosinus qui mesurent les *glissements* relatifs de lignes matérielles très-proches et parallèles deux à deux aux mêmes axes, il résulte de la symétrie de contexture par rapport aux plans yz, zx, xy qu'on aura des expressions de la forme suivante pour les six composantes $p_{xx}, p_{yy}, \ldots, p_{xy}$ des tensions ou pressions créées à travers

---

tion du corps est supposée s'opérer *avec continuité* d'une partie à l'autre, elle change les lignes droites matérielles en lignes courbes aussi *continues*, et qui, par conséquent, dans l'étendue de chaque élément très-petit, peuvent être considérées comme des lignes droites.

Or, en admettant cela seulement, on a pour conséquences : 1° que les petites lignes primitivement parallèles très-proches sont restées parallèles, car autrement celles qui les coupent perpendiculairement deviendraient courbes d'une courbure sensible; 2° que ces petites parallèles très-voisines se dilatent ou se contractent toutes également et chacune uniformément d'un bout à l'autre, car autrement leurs transversales obliques se courberaient sensiblement.

On pouvait, au reste, regarder *à priori* comme conséquences de la continuité cette conservation du parallélisme et cette uniformité des dilatations.

Toutes les cordes d'une même petite sphère, parallèles entre elles, s'allongent donc dans des proportions égales, et autant d'un côté que de l'autre du plan diamétral, resté plan, qui les coupe, et sur lequel elles prennent toutes la même inclinaison. Il en résulte que la petite sphère se change en un ellipsoïde. Les trois axes principaux et orthogonaux de cette surface donnent les dilatations ou contractions principales dont l'existence était à démontrer, et qui suffisent ainsi pour constituer toutes les déformations possibles de chaque élément.

l'unité superficielle de trois petites faces normales aux x, y, z, la première sous-lettre désignant la face par sa normale, et, la seconde, le sens de décomposition :

$$(2)\qquad \begin{cases} p_{xx} = \mathrm{a}\,\partial_x + \mathrm{f}'\,\partial_y + \mathrm{e}''\partial_z \\ p_{yy} = \mathrm{f}''\partial_x + \mathrm{b}\,\partial_y + \mathrm{d}'\partial_z \\ p_{zz} = \mathrm{e}'\partial_x + \mathrm{d}''\partial_y + \mathrm{c}\,\partial_z \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} p_{yz} = \mathrm{d}\,\mathrm{g}_{yz}, \\ p_{zx} = \mathrm{e}\,\mathrm{g}_{zx}, \\ p_{xy} = \mathrm{f}\,\mathrm{g}_{xy}; \end{matrix}$$

car si l'on donnait à ces expressions un plus grand nombre de termes, si, par exemple, on ajoutait à une composante normale p_{xx} des termes affectés des glissements g, et, à une composante tangentielle p_{yz}, des termes affectés des dilatations ∂, ces expressions ne seraient plus composées de même en fonction de ∂_x, $\partial_y, \ldots$, g_{xy}, comme la symétrie l'exige, quand on changerait l'un des axes en son prolongement de l'autre côté de l'origine.

Nous désignons par les mêmes lettres, en ne les distinguant que par des accents, les coefficients qui doivent être regardés comme égaux d'après ce que nous verrons tout à l'heure.

Or si

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \varepsilon''$$

représentent les proportions très-petites des compressions permanentes que le corps primitivement isotrope a éprouvées dans les sens x, y, z, chacun des coefficients a, b,..., f″ aura en ε, ε', ε'', d'après l'hypothèse dont nous avons parlé, et qui est facile à justifier par la loi des actions fonctions continues des distances moléculaires, une expression linéaire, c'est-à-dire de la forme

$$\alpha + l\varepsilon + m\varepsilon' + n\varepsilon''.$$

De plus, la première formule (2) $p_{xx} = \mathrm{a}\partial_x + \mathrm{f}'\partial_y + \mathrm{e}''\partial_z$ doit rester la même lorsque les deux axes des y et des z échangent leurs noms, c'est-à-dire lorsque, x, ∂_x et ε ne changeant pas, on permute à la fois y et z, ∂_y et ∂_z, ε' et ε''. En conséquence, f′ et e″ doivent avoir la même partie indépendante de ε, ε', ε'' et la même partie affectée de ε; le coefficient de ε' dans f′ doit être être le même que le coefficient de ε'' dans e″ et réciproquement. Enfin les coefficients de ε', ε'' doivent être égaux dans a, et ils doivent l'être aussi dans d, qui affecte g_{yz} dans p_{yz}. On peut donc,

$$(3)\qquad \alpha,\ \delta,\ \delta',\ l,\ m,\ n,\ p,\ q,\ r,\ s$$

étant des constantes, poser la première et la quatrième des six lignes des formules suivantes (4) pour les coefficients de celles (2). Les quatre autres lignes s'en déduisent en faisant permuter circulairement et corrélativement x, y et z; ∂_x, ∂_y et ∂_z; ε, ε' et ε'' :

$$(4)\left\{\begin{array}{lll}
\mathrm{a} = \alpha + l\varepsilon + m\varepsilon' + m\varepsilon'', & \mathrm{f}' = \delta' + n\varepsilon + p\varepsilon' + q\varepsilon'', & \mathrm{e}'' = \delta' + n\varepsilon + q\varepsilon' + p\varepsilon'', \\
\mathrm{f}'' = \delta' + p\varepsilon + n\varepsilon' + q\varepsilon'', & \mathrm{b} = \alpha + m\varepsilon + l\varepsilon' + m\varepsilon'', & \mathrm{d}' = \delta' + q\varepsilon + n\varepsilon' + p\varepsilon'', \\
\mathrm{e}' = \delta' + p\varepsilon + q\varepsilon' + n\varepsilon'', & \mathrm{d}'' = \delta' + q\varepsilon + p\varepsilon' + n\varepsilon'', & \mathrm{c} = \alpha + m\varepsilon + m\varepsilon' + l\varepsilon'', \\
 & \mathrm{d} = \delta + r\varepsilon + s\varepsilon' + s\varepsilon'', & \\
 & \mathrm{e} = \delta + s\varepsilon + r\varepsilon' + s\varepsilon'', & \\
 & \mathrm{f} = \delta + s\varepsilon + s\varepsilon' + r\varepsilon''. &
\end{array}\right.$$

Mais si la compression permanente a été la même dans deux des sens, ceux des y et des z par exemple, c'est-à-dire si

$$\varepsilon' = \varepsilon'',$$

elle a été nécessairement la même, d'après le théorème de Cauchy relatif aux déformations, cité et démontré tout à l'heure, dans tous les autres sens perpendiculaires aux x, c'est-à-dire que le petit élément sphérique s'est changé en un ellipsoïde de révolution, et que la contexture, après la déformation effectuée, doit être symétrique autour de l'axe des x. Il en résulte, comme nous avons eu l'occasion de le montrer ailleurs [*], et comme on peut s'en assurer facilement de diverses manières, dont la plus simple résulte de la considération d'une rotation infiniment petite employée après Green par MM. Kirchhoff, etc., ainsi que par M. Boussinesq, qu'on doit avoir non-seulement

$$\mathrm{b} = \mathrm{c},\quad \mathrm{e} = \mathrm{f},\quad \mathrm{e}' = \mathrm{f}'',\quad \mathrm{e}'' = \mathrm{f}',\quad \mathrm{d}' = \mathrm{d}'',$$

[*] *Mémoire sur la torsion; Notes sur Navier;* et vingt-deuxième des *Leçons* (n° 272) *de Mécanique analytique* publiées en 1867 par M. Moigno.

conditions remplies ici d'elles-mêmes quand $\varepsilon' = \varepsilon''$, mais encore

$$(5) \qquad \mathrm{b} = 2\mathrm{d} + \mathrm{d}'.$$

Mettant dans cette dernière égalité les valeurs (4) de b, d et d' et faisant $\varepsilon' = \varepsilon''$, elle devient

$$\alpha + m\varepsilon + (l + m)\varepsilon' = 2\delta + 2r\varepsilon + 4s\varepsilon' + \delta' + q\varepsilon + (n + p)\varepsilon'.$$

Comme on doit l'avoir, quelles que soient les grandeurs absolues des quantités ε, ε', il en résulte

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha = 2\delta + \delta', \\ m = 2r + q, \\ l + m = 4s + n + p. \end{cases}$$

Ces trois relations ou équations de condition expriment, non pas que le corps est de contexture symétrique autour des x, mais que cette symétrie doit résulter de l'égalité de ε' à ε''. On les trouverait évidemment les mêmes en exprimant que la symétrie autour des y, des z, résulte respectivement de $\varepsilon'' = \varepsilon$, de $\varepsilon = \varepsilon'$; en sorte qu'elles doivent exister nécessairement entre les dix constantes (3).

Or, en substituant les valeurs de α, m, l qu'elles donnent dans celles (4) des trois coefficients a, b, c, et en ajoutant celles-ci deux à deux, l'on trouve, entre eux et les neuf autres coefficients, les trois relations suivantes, qui sont indépendantes, comme on voit, des grandeurs de ε, ε', ε'', ainsi que des constantes δ, δ', n, p, q, r, s :

$$(7) \qquad \begin{cases} \mathrm{b} + \mathrm{c} = 4\mathrm{d} + \mathrm{d}' + \mathrm{d}'', \\ \mathrm{c} + \mathrm{a} = 4\mathrm{e} + \mathrm{e}' + \mathrm{e}'', \\ \mathrm{a} + \mathrm{b} = 4\mathrm{f} + \mathrm{f}' + \mathrm{f}''. \end{cases}$$

On a les trois mêmes relations (7), à cela près de termes négligeables, si a, b,..., f'', au lieu d'être linéaires en ε, ε', ε'', sont supposés des fonctions quelconques de ces quantités, développables suivant leurs puissances entières et les produits de celles-ci [*]. On trouve en effet, en opérant de même que tout à l'heure, c'est-à-dire en y faisant à la fois

$$\varepsilon' = \varepsilon'', \quad \mathrm{b} = 2\mathrm{d} + \mathrm{d}',$$

puis tirant α, m, l,..., pour les substituer dans b et c, que

$$\mathrm{b} + \mathrm{c} - 4\mathrm{d} - \mathrm{d}' - \mathrm{d}''$$

se réduit à une expression ayant partout comme facteur

$$(\varepsilon' - \varepsilon'')^2.$$

Or nous regardons les petites contractions ε, ε', ε'' comme assez peu inégales pour que leurs différences soient d'ordre supérieur en petitesse, en sorte qu'on peut ne pas tenir compte de ce qui est affecté des carrés de ces différences.

Les relations (7) ont ainsi lieu *au delà même de l'hypothèse de linéarité*. Ce sont donc bien celles qui doivent exister entre les neuf coefficients des formules telles que (2) des six composantes de pression dans l'intérieur d'un corps qui n'en supportait aucune antérieurement aux déformations élastiques ∂, g, lorsque son hétérotropie est résultée de petites compresions permanentes inégales dans les sens des x, des y, des z, c'est-à-dire lorsque ce corps non-isotrope n'est pas cristallisé régulièrement, mais possède une contexture amorphe ou à

---

[*] C'est-à-dire si l'on a des développements

$$\begin{aligned}
\mathrm{a} = \alpha &+ l\varepsilon + m(\varepsilon' + \varepsilon'') + l_1\varepsilon^2 + m_1(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + l'_1\varepsilon'\varepsilon'' + m'_1\varepsilon(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
&+ l_2\varepsilon^3 + m_2(\varepsilon'^3 + \varepsilon''^3) + m'_2\varepsilon(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + m''_2\varepsilon^2(\varepsilon' + \varepsilon'') + l'_2\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' + l''_2\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
&+ l_3\varepsilon^4 + m_3(\varepsilon'^4 + \varepsilon''^4) + m'_3\varepsilon(\varepsilon'^3 + \varepsilon''^3) + m''_3\varepsilon^2(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + m'''_3\varepsilon^2(\varepsilon' + \varepsilon'') \\
&\quad + l'_3\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon'' + l''_3\varepsilon'^2\varepsilon''^2 + l'''_3\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon' + \varepsilon'') + l^{\mathrm{IV}}_3\varepsilon'\varepsilon''(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + l_4\varepsilon^5 + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{d} = \delta + r\varepsilon + s(\varepsilon' + \varepsilon'') + r_1\varepsilon^2 + s_1(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2) + r'_1\varepsilon'\varepsilon'' + s'_1\varepsilon(\varepsilon' + \varepsilon'') + r_2\varepsilon^3 + \ldots,$$

$$\mathrm{d}' = \delta' + q\varepsilon + n\varepsilon' + p\varepsilon'' + q_1\varepsilon^2 + n_1\varepsilon'^2 + p_1\varepsilon''^2 + q'_1\varepsilon'\varepsilon'' + n'_1\varepsilon''\varepsilon + p'_1\varepsilon\varepsilon' + q_2\varepsilon^3 + \ldots,$$

d″ = ce qui résulte de la permutation réciproque de ε', ε'' dans d′,

b, c = ce qui résulte des permutations circulaires de ε, ε', ε'' dans a,

e, f = » » dans d,

e′, f′ = » » dans d′,

e″, f″ = » » dans d″.

cristallisation confuse comme les métaux, les pierres et même les bois, etc.

Tout le monde admet aujourd'hui qu'on doit avoir, en général, entre les mêmes coefficients, les trois égalités

$$(8)\qquad d' = d'',\quad e' = e'',\quad f' = f''.$$

C'est en effet la condition pour que les six composantes de pression p_{xx}, p_{yy},..., p_{xy} soient les dérivées partielles, par rapport aux six déformations élémentaires ∂_x, ∂_y,..., g_{xy}, d'une même fonction du second degré représentant le potentiel moléculaire ou le travail de déformation élastique de l'unité de volume de l'élément parallélipipède dont les trois côtés adjacents ont été allongés dans les petites proportions ∂_x, ∂_y, ∂_z, et ont été inclinés l'un sur l'autre des petites quantités angulaires g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}, travail qu'il peut restituer par détente en revenant à sa forme primitive. Cette condition est nécessaire pour qu'il n'en puisse jamais restituer davantage [*], ou pour que, conformément au principe des forces vives, il y ait impossibilité de créer du travail de toutes pièces ou sans consommation de moteur. Il suffit, pour cette triple égalité (8), qu'on ait, dans les expressions (4) des coefficients a, b,..., f'',

$$(9)\qquad n = p.$$

Les relations (7) se réduisent en conséquence à

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &2d + d' = \frac{b + c}{2},\\ &2e + e' = \frac{c + a}{2},\\ &2f + f' = \frac{a + b}{2};\\ &\text{d'où}\\ &a = 2e + e' + 2f + f' - 2d - d',\\ &b = 2f + f' + 2d + d' - 2e - e',\\ &c = 2d + d' + 2e + e' - 2f - f'. \end{aligned}\right.$$

[*] *Voyez* le n° 2 du Mémoire cité de 1863, ou le *Compte rendu des séances de*

Ce sont celles (56) de mon Mémoire de 1863, exprimant la condition du premier mode particulier de distribution des *élasticités directes*, consistant en ce que si l'on porte sur leurs directions diverses, à partir d'un même point, des longueurs proportionnelles aux inverses de leurs racines carrées, l'ensemble des extrémités forme un ellipsoïde.

Quand a, b, c diffèrent peu entre eux, ces relations reviennent au même, à cela près des carrés supposés négligeables de leurs différences, que celles

$$(11)\quad \begin{cases} 2\mathrm{d}+\mathrm{d}'=\sqrt{\mathrm{bc}}, \qquad 2\mathrm{e}+\mathrm{e}'=\sqrt{\mathrm{ca}}, \qquad 2\mathrm{f}+\mathrm{f}'=\sqrt{\mathrm{ab}}, \\ \text{d'où} \\ \mathrm{a}=\dfrac{(2\mathrm{e}+\mathrm{e}')(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')}{2\mathrm{d}+\mathrm{d}'}, \quad \mathrm{b}=\dfrac{(2\mathrm{f}+\mathrm{f}')(2\mathrm{d}+\mathrm{d}')}{2\mathrm{e}+\mathrm{e}'}, \quad \mathrm{c}=\dfrac{(2\mathrm{d}+\mathrm{d}')(2\mathrm{e}+\mathrm{e}')}{2\mathrm{f}+\mathrm{f}'}, \end{cases}$$

qui portent le n° (57) au même Mémoire, et d'après lesquelles on a un ellipsoïde pour les surfaces dont les rayons vecteurs sont les inverses des racines quatrièmes au lieu des racines carrées des élasticités.

Enfin, d'après la loi physique des actions et réactions entre points matériels, suivant les directions de leurs lignes de jonction, et avec des intensités dépendant de leurs distances, loi prise aujourd'hui comme base de la Mécanique conformément à l'ensemble des faits, et sans laquelle même rien n'autoriserait à poser pour les forces élastiques des formules telles que (2), on doit avoir [*], outre les égalités (8), ces trois autres égalités

$$(12)\qquad \mathrm{d}=\mathrm{d}', \quad \mathrm{e}=\mathrm{e}', \quad \mathrm{f}=\mathrm{f}'.$$

Bien que celles-ci, admises par les premiers auteurs de la théorie de l'élasticité, soient mises en doute par des auteurs plus récents, toute formule où l'on attribuerait numériquement à d', e', f' des valeurs

---

l'Académie des Sciences, 16 décembre 1861, t. LIII, p. 1107, ou la vingt-deuxième (n° 270) des *Leçons de Mécanique analytique*, publiées en 1867 par M. l'abbé Moigno.

[*] *Voyez* la note [***] du n° 2 du Mémoire cité de 1863, ou le n° 283 de la vingt-deuxième *Leçon* citée.

différentes de celles qui seraient adoptées pour d, e, f se trouverait en contradiction avec la grande loi qu'on vient d'énoncer, et ne pourrait, suivant tout au moins les plus immenses probabilités, qu'induire en erreur ou mener à des interprétations illusoires de ce que les expériences peuvent fournir sur les solides. Introduisons donc ces égalités (12) dans nos relations (10) ou (11), nous aurons définitivement :

1° Avec les relations (10)

$$(13)\quad \begin{cases} p_{xx} = 3(\mathrm{e}+\mathrm{f}-\mathrm{d})\partial_x + \mathrm{f}\partial_y + \mathrm{e}\partial_z, & p_{zy} = \mathrm{d}g_{yz}, \\ p_{yy} = \mathrm{f}\partial_x + 3(\mathrm{f}+\mathrm{d}-\mathrm{e})\partial_y + \mathrm{d}\partial_z, \quad \text{et} & p_{zx} = \mathrm{e}g_{zx}, \\ p_{zz} = \mathrm{e}\partial_x + \mathrm{d}\partial_y + 3(\mathrm{d}+\mathrm{e}-\mathrm{f})\partial_z, & p_{xy} = \mathrm{f}g_{xy}; \end{cases}$$

2° Avec les relations (11)

$$(14)\quad \begin{cases} p_{xx} = 3\dfrac{\mathrm{ef}}{\mathrm{d}}\partial_x + \mathrm{f}\partial_y + \mathrm{e}\partial_z, & p_{yz} = \mathrm{d}g_{yz}, \\ p_{yy} = \mathrm{f}\partial_x + 3\dfrac{\mathrm{fd}}{\mathrm{e}}\partial_y + \mathrm{d}\partial_z, \quad \text{et} & p_{zx} = \mathrm{e}g_{zx}, \\ p_{zz} = \mathrm{e}\partial_x + \mathrm{d}\partial_y + 3\dfrac{\mathrm{de}}{\mathrm{f}}\partial_z, & p_{xy} = \mathrm{f}g_{xy}. \end{cases}$$

Telles sont les formules à adopter pour les pressions, tensions ou forces élastiques dans les corps amorphes non-isotropes comme sont les matériaux de construction.

On peut choisir à volonté, selon qu'on le trouve plus commode, la forme (13) ou la forme (14), car elles reviennent au même, à cela près de carrés négligeables, quand les différences deux à deux entre les élasticités directes a, b, c en trois sens, ou bien entre les élasticités tangentielles d, e, f, sont très-petites par rapport à ces élasticités elles-mêmes, ce qui a lieu pour les métaux même laminés, les pierres, le verre. Mais, sous la deuxième forme (14), elles paraissent, d'après quelques expériences (trop peu nombreuses il est vrai jusqu'ici), pouvoir s'étendre à des différences considérables d'élasticité dans le sens longitudinal et dans les sens transversaux des pièces, et être ainsi susceptibles de s'appliquer aux bois (Mémoire de 1863, n° **29**).

Il est entendu que si les déplacements absolus des points sont petits, on mettra dans ces formules, comme à l'ordinaire, en représentant par u, v, w leurs projections suivant les x, y, z

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx}, \quad \dfrac{dv}{dy}, \quad \dfrac{dw}{dz}, \quad \dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}, \quad \dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}, \quad \dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}, \\ \text{à la place de} \\ \partial_x, \quad \partial_y, \quad \partial_z, \quad g_{yz}, \quad g_{zx}, \quad g_{xy}. \end{cases}$$

Et si l'on veut les rendre applicables à l'éther lumineux de l'intérieur des corps transparents, où il convient, pour plus de généralité, de supposer la possibilité de pressions très-considérables, antérieures aux déplacements élastiques u, v, w, il faudra, conformément aux formules (10) du Mémoire de 1863 (dues à Cauchy et auxquelles Poisson a finalement acquiescé), en appelant

$$p^0_{xx}, \quad p^0_{yy}, \quad p^0_{zz}$$

ces pressions primitives, qui ne peuvent, vu la symétrie, être que normales aux plans yz, zx, xy; il faudra, dis-je, ajouter respectivement aux six formules (13) ou (14)

$$(16)\quad \begin{cases} p^0_{xx}\left(1+\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right), & p^0_{zz}\dfrac{dv}{dz}+p^0_{yy}\dfrac{dw}{dy}, \\ p^0_{yy}\left(1-\dfrac{du}{dx}+\dfrac{dv}{dy}-\dfrac{dw}{dz}\right), \quad \text{et} & p^0_{xx}\dfrac{dw}{dx}+p^0_{zz}\dfrac{du}{dz}, \\ p^0_{zz}\left(1-\dfrac{du}{dx}-\dfrac{dv}{dy}+\dfrac{dw}{dz}\right), & p^0_{yy}\dfrac{du}{dy}+p^0_{xx}\dfrac{dv}{dx}; \end{cases}$$

ce qui donnera les formules générales embrassées de suite par l'analyse de M. Boussinesq.

Mais, pour les solides, les formules (13) ou (14) suffisent sans ces additions, ou en ajoutant tout au plus p^0_{xx}, p^0_{yy}, p^0_{zz} aux trois de gauche s'il se rencontrait quelque cas où il fallût tenir compte de pressions antérieures, d'une intensité comparable à celles des pressions mises en action par les déplacements u, v, w.

Quand on fait

$$\mathrm{d} = \mathrm{e} = \mathrm{f},$$

on obtient, par (13) comme par (14), les formules d'isotropie à un seul coefficient trouvées de 1821 à 1827 par Navier, Cauchy, Poisson, Lamé et Clapeyron. On y a substitué, depuis, ces formules connues d'isotropie à deux coefficients qui sont en contradiction avec la loi moléculaire, et propres à égarer comme on vient de dire; formules introduites 1° en Angleterre par l'expédient au moyen duquel Green chercha à concilier la théorie de l'élasticité avec l'hypothèse (de Fresnel) de l'*exacte* transversalité des vibrations lumineuses jusque dans l'intérieur des cristaux, hypothèse qui n'a plus aujourd'hui de partisans; 2° en France par les tentatives d'interpréter diverses expériences de Wertheim, etc., en supposant isotropes le laiton et le verre sur lesquels elles ont été faites, tandis que tout portait à penser, avec M. Regnault, qu'ils ne l'étaient pas exactement. Nos formules (13) ou (14) à *trois* coefficients, qui supposent un léger degré d'hétérotropie toujours infiniment probable, se prêtent certainement bien mieux à interpréter les faits quelconques, que les formules à *deux* coefficients dont nous signalons la fausseté et le danger, et auxquelles il y a lieu d'espérer qu'on renoncera bientôt pour toutes les applications; bien que je ne me refuse toujours pas à en faire usage analytiquement, ainsi que des formules plus générales de Green à six paramètres de trop, pour montrer que certains résultats généraux ont lieu avec les unes comme avec les autres, et doivent être adoptés quelle que soit l'opinion qu'on persiste à se faire sur le point contesté.