

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

BOUSSINESQ

Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés

*Journal de mathématiques pures et appliquées 2<sup>e</sup> série*, tome 13 (1868), p. 209-241.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1868\\_2\\_13\\_209\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13_209_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

## MÉMOIRE

SUR LES

## ONDES DANS LES MILIEUX ISOTROPES DÉFORMÉS ;

PAR M. BOUSSINESQ.

Je me propose d'exposer ici les idées contenues en germe dans un article présenté à l'Académie des Sciences le 22 juillet 1867, et qui est inséré au compte rendu de la séance de ce jour [\*]. Je considère un corps primitivement isotrope, mais qui a cessé de l'être par suite de pressions ou de tractions inégales exercées sur lui dans les divers sens. J'obtiens les formules de ses forces élastiques, en m'appuyant seulement sur l'hypothèse, admise par tout le monde, que ces forces peuvent être exprimées en fonction linéaire des dérivées partielles des déplacements. Dans le cas où le milieu, après sa déformation, n'est soumis à aucune action extérieure, les formules auxquelles j'arrive sont semblables à celles que M. de Saint-Venant a données comme conséquence d'une distribution dite ellipsoïdale des élasticités autour de chaque point, et qu'il a reconnu, dans l'hypothèse de l'égalité de certains coefficients, regardée par lui comme conforme à la réalité, être communes aux milieux isotropes inégalement comprimés [\*\*]. Il est arrivé à ce dernier résultat, en admettant que l'action réciproque de deux molécules est simplement fonction de leur distance.

Le corps étant supposé homogène, je cherche ensuite les équations

[\*] *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 167.

[\*\*] Mémoire sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un corps solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2<sup>e</sup> série, t. VIII, 1863; voir aux nos 13 et 16 de ce Mémoire.

de ses mouvements et les propriétés des ondes planes qui s'y propagent. Ces ondes sont quasi transversales ou quasi longitudinales, c'est-à-dire que les vibrations s'y font presque parallèlement ou presque perpendiculairement aux plans des ondes. Toutefois, pour certaines relations peu probables entre les coefficients, les ondes sont rigoureusement transversales, ou rigoureusement longitudinales.

Le milieu peut propager dans chaque direction deux systèmes d'ondes quasi transversales, ayant deux vitesses inégales de propagation, et correspondant à des vibrations polarisées à angle droit. Dans un cas particulier, la surface des ondes est celle de Fresnel, avec des vibrations dirigées, comme le suppose Fresnel dans sa théorie de la double réfraction, suivant la projection du rayon sur le plan tangent : c'est le cas étudié par M. Briot [\*], qui l'obtient en supposant que deux molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance. Dans un autre cas, celui où la pression extérieure exercée sur le milieu est nulle ou est la même dans tous les sens, la surface de l'onde est encore celle de Fresnel, mais les vibrations se font perpendiculairement à la projection du rayon sur le plan tangent. Ces lois seraient celles de la double réfraction, d'après MM. Mac-Cullagh et Newmann. Cauchy, en 1830, et M. de Saint-Venant, dans son travail récent cité plus haut, y sont arrivés également.

J'étudie ensuite les vibrations quasi longitudinales, et je démontre que, dans le cas où le milieu n'est soumis qu'à une action extérieure constante, et peut propager dans tous les sens des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, ces dernières ont une vitesse constante quelle que soit leur direction. Une telle propriété semble ne pouvoir appartenir qu'aux milieux physiquement isotropes. Ce résultat s'ajouterait donc aux considérations développées par M. de Saint-Venant, aux nos 17, 18, 19, du même Mémoire, pour prouver que les vibrations ne sont rigoureusement parallèles ou perpendiculaires aux ondes que dans les milieux isotropes.

---

[\*\*] *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière*, liv. II, chap. III et IV.

§ 1. — *Forces élastiques.*

Supposons qu'un corps isotrope, homogène ou hétérogène, soit soumis à des actions mécaniques, telles que des pressions ou des tractions, capables de le déformer très-peu. Ses molécules prendront un nouvel équilibre, et il ne sera généralement plus isotrope dans son nouvel état. Si même il n'est pas parfaitement élastique, les positions d'équilibre des molécules changeront lentement, sans que les actions extérieures auxquelles il est soumis varient, et le corps passera par une série d'états distincts, jusqu'à ce qu'il en rencontre un plus stable, approprié aux nouvelles conditions dans lesquelles il se trouve. A plus forte raison les positions d'équilibre des molécules et la constitution du corps changeront-elles continuellement, si, comme nous le supposerons dans ce paragraphe, les actions déformatrices varient d'un instant à l'autre et d'ailleurs ne cessent jamais d'être appliquées. Ces positions seront à chaque instant celles dans lesquelles les molécules resteraient en repos, si on les y disposait sans vitesse initiale, et si la constitution du corps et les actions extérieures qu'il supporte continuaient à être ce qu'elles sont au moment considéré. On peut admettre comme évident qu'à chaque instant les molécules les occuperont à très-peu près, excepté pendant les moments très-courts et tout exceptionnels où les actions déformatrices varieraient brusquement.

Nous savons qu'il existera en chaque point, à un instant quelconque, trois éléments plans rectangulaires, sur lesquels les actions exercées seront normales [\*]. Si nous considérons une portion très-petite du corps, ces éléments plans auront à très-peu près même direction, et les forces qui les sollicitent même grandeur, dans toute son étendue. Celles-ci se composent en général de deux parties : l'une K, commune aux trois éléments plans, et qui existait antérieurement aux modifications produites ; la deuxième correspondante à ces modifications, et que nous désignerons, pour les mêmes éléments plans, respectivement par A, B, C. Nous admettrons que, dans la portion considérée du corps, les éléments

---

[\*] LAMÉ, *Leçons sur l'Élasticité*, § 22.

plans normalement pressés ou tirés par les actions déformatrices gardent la même direction à tous les instants consécutifs, et que ces forces  $A, B, C$  varient avec le temps de manière à conserver entre elles les mêmes rapports  $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$ . Si nous désignons par  $a, b, c$  trois nombres constants, proportionnels à  $A, B, C$ , et du même ordre de petitesse que les dilatations linéaires éprouvées par le corps pendant sa déformation, les rapports  $\frac{A}{a}, \frac{B}{b}, \frac{C}{c}$  seront égaux entre eux, et à une même fonction  $F$  du temps  $t$ . La fonction  $F(t)$  peut d'ailleurs être quelconque : elle se réduit à une constante, si les actions déformatrices restent les mêmes toujours; elle sera nulle ou constante à partir d'une certaine valeur de  $t$ , si  $A, B, C$  deviennent elles-mêmes nulles ou constantes au bout d'un certain temps. Quoi qu'il en soit, cette fonction étant supposée connue, la constitution du corps, à chaque instant, ne dépendra plus que de  $a, b, c$ . En effet, concevons plusieurs corps exactement pareils au proposé, soumis à des actions mécaniques analogues, et pour lesquels les rapports  $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$  soient la même fonction du temps, sans que  $a, b, c$  s'y trouvent les mêmes. Il est évident que leurs constitutions, au même moment, ne peuvent différer qu'à raison des valeurs différentes de  $a, b, c$ ; puisque, si  $a, b, c$  y étaient respectivement égales, les actions déformatrices  $A, B, C$  auraient aussi été les mêmes à chaque instant dans les deux corps, et ne pourraient qu'y avoir produit les mêmes effets.

Concevons qu'à un moment donné les molécules éprouvent, par rapport à leurs positions actuelles d'équilibre, des déplacements très-petits, compris dans les limites d'élasticité du corps; les forces élastiques développées par ces déplacements seront fonctions de  $a, b, c$  : nous nous proposons de chercher leur expression, en négligeant les termes du second ordre de petitesse par rapport à  $a, b, c$ .

Adoptons un système de plans coordonnés des  $yz$ , des  $zx$  et des  $xy$ , parallèles aux positions d'équilibre des éléments sur lesquels s'exercent les actions  $K + A, K + B, K + C$ ; nous appellerons les axes ainsi obtenus *axes d'élasticité*. Soient  $x, y, z$  les coordonnées actuelles d'équilibre d'une molécule  $M$ , appartenant à la petite portion considérée du corps;  $u, v, w$  les déplacements suivant les axes de la même

molécule, par rapport à la position d'équilibre. Appelons avec M. Lamé (*Leçons sur l'Élasticité*, § 8),  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  les forces élastiques principales, c'est-à-dire les composantes, suivant les axes, des actions exercées sur l'unité superficielle des trois éléments plans passant par M, et actuellement parallèles aux plans coordonnés. On sait que ces forces dépendent des dérivées partielles de  $u, v, w$  par rapport à  $x, y, z$ , et que, pour des valeurs assez petites des dérivées, elles en sont fonctions linéaires.

Cela posé, je dis que la constitution du corps, primitivement isotrope, est restée symétrique par rapport aux plans coordonnés, c'est-à-dire que si, gardant deux quelconques des axes, on change le sens du troisième, par exemple le sens de celui des  $x$  par la transformation de  $x$  en  $-x$  et de  $u$  en  $-u$ , les formules des forces élastiques principales seront les mêmes dans le nouveau système d'axes que dans le premier. En effet, les actions normales A, B, C, causes uniques de la déformation du corps et de l'altération de son isotropie, s'exercent également sur les deux faces de tout élément parallèle aux plans coordonnés, et les circonstances sont les mêmes par rapport aux deux systèmes considérés d'axes. Or, si l'on change le sens de celui des  $x$ , la nouvelle force principale N, sera celle qui est exercée sur le même élément parallèle aux  $yz$ , mais du côté des  $x$  d'abord négatifs; elle sera égale à la force de même nom dans le premier système. On verra pareillement que les forces  $N_2, N_3, T_1$  restent les mêmes, et que  $T_2$  et  $T_3$  doivent être changées en  $-T_2, -T_3$ . Donc les transformations simultanées de  $x$  en  $-x$  et de  $u$  en  $-u$  doivent laisser invariables  $N_1, N_2, N_3, T_1$ , et faire changer de signe  $T_2$  et  $T_3$ . De même les transformations simultanées de  $y$  en  $-y$  et de  $v$  en  $-v$  doivent laisser invariables  $N_2, N_3, N_1, T_2$  et changer de signe  $T_3, T_1$ . Enfin les changements de  $z$  en  $-z$  et de  $w$  en  $-w$ , ne changent pas  $N_3, N_1, N_2, T_3$ , et transforment  $T_1, T_2$  en  $-T_1, -T_2$ . Il suit de là que l'expression de  $N_1$  se réduit à  $K + A$ , suivi de trois termes en  $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}$ , et que celle de  $T_1$  contient seulement les deux termes en  $\frac{dv}{dz}$  et  $\frac{dw}{dy}$ .

Le coefficient de chacun de ces termes comprend deux parties. La première est identique à la valeur du coefficient dans le milieu iso-

trope primitif. La deuxième, correspondante à la petite altération éprouvée, est peu considérable par rapport à la première; elle est une fonction des petites quantités  $a, b, c$ , et s'annule avec celles-ci. Comme nous n'avons pas de raison spéciale pour supposer les dérivées partielles de cette fonction nulles ou infinies quand  $a = 0, b = 0, c = 0$ , nous la développerons par la série de Maclaurin, et, vu la petitesse de  $a, b, c$ , nous pourrons nous arrêter aux termes du premier degré. Ainsi la deuxième partie du coefficient sera une fonction linéaire de  $a, b, c$ .

D'ailleurs, le milieu primitif étant isotrope,  $N$ , et  $T$ , garderont les mêmes expressions, si les deux axes des  $y$  et des  $z$  échangent leurs noms, c'est-à-dire si,  $x, u$  et  $a$  ne changeant pas, on permute à la fois  $y$  et  $z, v$  et  $w, b$  et  $c$ . Occupons-nous d'abord de  $N$ . La permutation indiquée change le terme qui contient  $\frac{dv}{dy}$  en celui qui contient  $\frac{dw}{dz}$ , et réciproquement. Donc : 1° la partie de ces termes indépendante de  $a, b, c$ , a un même coefficient  $l$ ; 2° le coefficient de  $c \frac{dv}{dy}$  est le même que celui de  $b \frac{dw}{dz}$  : nous le désignerons par  $l'$ ; 3° le coefficient de  $b \frac{dv}{dz}$  est égal à celui de  $c \frac{dw}{dz}$ , et nous pouvons le représenter, quel qu'il soit, par  $l' + n$ ; 4° enfin les coefficients de  $a \frac{dv}{dy}$  et de  $a \frac{dw}{dz}$  sont égaux, et nous les désignerons par  $l' + l''$ . L'ensemble des termes en  $\frac{dv}{dy}$  et  $\frac{dw}{dz}$  sera ainsi exprimé par

$$[l + l'(a + b + c) + l''a] \left( \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) + n \left( b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz} \right).$$

On verra de même que, dans le terme en  $\frac{du}{dx}$ ,  $b$  et  $c$  ont un coefficient égal, de manière qu'en désignant par  $m, s, s'$  trois nouveaux coefficients, on peut écrire ce terme

$$[l + l'(a + b + c) + l''a + na + 2m + 2s(a + b + c) + 2s'a] \frac{du}{dx}.$$

Pareillement, dans  $T$ , la permutation indiquée change le terme qui contient  $\frac{dv}{dz}$  en celui qui contient  $\frac{dw}{dy}$ . Donc : 1° la partie de ces termes

indépendante de  $a, b, c$  a un même coefficient  $m$ ; 2° les coefficients de  $b \frac{dv}{dz}$  et de  $c \frac{dw}{dy}$  sont égaux : nous les désignerons par  $m'$ ; 3° ceux de  $c \frac{dv}{dz}$  et de  $b \frac{dw}{dy}$  le sont encore, et peuvent être représentés par  $m' + p$ ; 4° enfin nous appellerons  $m' + m''$  ceux de  $a \frac{dv}{dz}$  et de  $a \frac{dw}{dy}$ .

Représentons, afin d'abrégé, par  $\mathbf{S}$  la somme de trois termes analogues, dont le premier sera écrit immédiatement après ce signe; par exemple  $a + b + c$  par  $\mathbf{S}a$ ,  $a \frac{du}{dx} + b \frac{dv}{dy} + c \frac{dw}{dz}$  par  $\mathbf{S}a \frac{du}{dx}$ , et la dilatation  $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$  par  $\mathbf{S} \frac{du}{dx}$  ou simplement par  $\theta$ . D'après ce qui précède,  $N_1$  et  $T_1$  auront la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = K + A + (l + l' \mathbf{S}a + l'' a) \theta + n \mathbf{S}a \frac{du}{dx} \\ \quad + 2(m_1 + s \mathbf{S}a + s' a) \frac{du}{dx}, \\ T_1 = (m + m' \mathbf{S}a + m'' a) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + p \left( c \frac{dv}{dz} + b \frac{dw}{dy} \right). \end{array} \right.$$

On déduira évidemment de ces deux formules  $N_2$  et  $T_2$ ,  $N_3$  et  $T_3$ , en effectuant respectivement une ou deux permutations circulaires sur  $x, y, z$ ;  $u, v, w$ ;  $A, B, C$ ;  $a, b, c$ .

Si les deux quantités  $a, b$ , et, par suite, les actions déformatrices  $A, B$  sont égales, il est aisé de voir, par les formules générales déduites de la considération du tétraèdre de Cauchy [\*], que les actions exercées, dans l'état d'équilibre du corps, sur tout élément plan parallèle aux  $z$ , seront égales à  $K + A$ , et que, par conséquent, le milieu sera

[\*] Ces formules sont (voir *Leçons* de M. LAMÉ, § 9)

$$\begin{aligned} X &= N_1 \cos \alpha + T_3 \cos \beta + T_2 \cos \gamma, \\ Y &= T_3 \cos \alpha + N_2 \cos \beta + T_1 \cos \gamma, \\ Z &= T_2 \cos \alpha + T_1 \cos \beta + N_3 \cos \gamma; \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  représentent les angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à un élément plan quelconque passant par la molécule  $M$ ;  $X, Y, Z$  désignent les compo-



resté isotrope autour de l'axe des  $z$ . Donc, dans le cas  $a = b$ , on peut faire tourner d'un angle très-petit  $\epsilon$ , autour de l'axe des  $z$ , le système des deux autres axes, sans changer l'expression des forces élastiques principales en fonction des déplacements. Appelons  $x', y', z'$  les coordonnées d'équilibre de  $M$  dans le nouveau système d'axes infiniment voisin du premier,  $u', v', w'$  les déplacements de  $M$  dans le même système. Nous aurons les formules de transformation

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'} - \epsilon \frac{d}{dy'}, & \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'} + \epsilon \frac{d}{dx'}, & \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'}; \\ u = u' - \epsilon v', & v = v' + \epsilon u', & w = w'. \end{cases}$$

D'autre part, appelons  $N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3$  les forces principales relatives aux nouveaux axes. Les formules de la Note précédente, ou plus directement celles qu'établit M. Lamé au § 18 de ses *Leçons*, donneront

$$(3) \quad \begin{cases} N'_1 = N_1 + 2\epsilon T_3, & N'_2 = N_2 - 2\epsilon T_3, & N'_3 = N_3; \\ T'_1 = T_1 - \epsilon T_2, & T'_2 = T_2 + \epsilon T_1, & T'_3 = T_3 - \epsilon(N_1 - N_2). \end{cases}$$

Si nous substituons dans ces formules, à  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ , leurs expressions (1) en  $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ , puis, à ces dérivées, leurs valeurs en  $\frac{d(u', v', w')}{d(x', y', z')}$ , fournies par (2), les termes qui contiendront  $\epsilon$  devront s'annuler quelles que soient ces dernières dérivées ainsi que  $a$  et  $c$ , puisque les forces élastiques doivent avoir la même expression dans le nouveau système que dans le premier. On obtiendra ainsi les trois relations

$$(4) \quad m_1 = m, \quad s = m' + m'', \quad s' = p - 2m''.$$

santes, suivant les mêmes axes, de la force élastique rapportée à l'unité de surface, qui est exercée sur cet élément plan du côté où l'on a mené la normale.

Dans l'état d'équilibre du milieu considéré, on a  $N_1 = N_2 = K + A$ ,  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ . Pour tout élément plan parallèle à l'axe des  $z$ ,  $\cos \gamma$  est nul, et, par suite, il vient

$$X = (K + A) \cos \alpha, \quad Y = (K + A) \cos \beta, \quad Z = 0.$$

La force élastique est bien normale, puisque ses composantes  $X, Y, Z$  sont proportionnelles à  $\cos \alpha, \cos \beta, 0$ ; de plus sa valeur est  $K + A$ .

Telles sont les conditions, non pas pour que le milieu soit isotrope autour de l'axe des  $z$ , mais pour que cette isotropie partielle résulte de l'égalité des deux quantités  $a, b$ . Elles doivent donc être vérifiées dans les formules (1).

Enfin, nous savons qu'un déplacement d'ensemble quelconque donné à un corps ne fait pas varier la force exercée sur tout élément plan lié au corps. Or tout mouvement d'ensemble infiniment petit se compose d'une translation, qui laisse invariables les dérivées  $\frac{d(u, v, w)}{d(x, y, z)}$ , et de trois rotations infiniment petites autour des trois axes coordonnés. Il faut donc qu'une simple rotation du milieu autour de chacun des trois axes laisse invariable la force exercée sur un élément plan quelconque. Par exemple, une petite rotation  $\omega$  autour de l'axe des  $z$ , laquelle correspond à  $u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$ , devra laisser égale à  $K + A$  et normale, l'action exercée sur l'élément primitivement perpendiculaire à l'axe des  $x$ . Cette rotation donne, d'après les formules (1),

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} N_1 = K + A, & N_2 = K + B, & N_3 = K + C, \\ T_1 = T_2 = 0, & T_3 = p(a - b)\omega. \end{cases}$$

La normale à l'élément qui était primitivement perpendiculaire à l'axe des  $x$ , fait actuellement, avec les trois axes fixes des  $x, y, z$ , des angles qui ont pour cosinus 1,  $\omega, 0$ . Les composantes, suivant les mêmes axes, de la force élastique exercée sur cet élément, seront, d'après les formules (4 bis), et d'après celles de la note précédente,

$$K + A, \quad p(a - b)\omega + \omega(K + B), \quad 0.$$

Pour qu'elle soit restée normale et vaille  $K + A$ , il faudra que ces trois composantes soient respectivement égales à

$$K + A, \quad (K + A)\omega, \quad 0.$$

L'égalité des secondes donne

$$A - B = p(a - b),$$

et, comme  $\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$ , il vient

$$(5) \quad A = pa; \quad \text{on aura de même } B = pb, \quad C = pc.$$

Avec ces valeurs de A, B, C, une simple rotation du milieu ne fait naître aucune force élastique sur les trois éléments superficiels primitivement perpendiculaires aux axes, ni par suite sur aucun élément plan.

Les formules définitives des forces élastiques sont donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = K + pa + (l + l' \mathbf{S}a + l'' a) \vartheta + n \mathbf{S}a \frac{du}{dx} \\ \quad \quad \quad + 2 [m + m' \mathbf{S}a + m'' (b + c - a) + pa] \frac{du}{dx}, \\ T_1 = (m + m' \mathbf{S}a + m'' a) \left( \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) + p \left( c \frac{dv}{dz} + b \frac{dw}{dy} \right); \end{array} \right.$$

d'où se déduisent  $N_2$  et  $T_2$ ,  $N_3$  et  $T_3$ .

Les coefficients  $p$ ,  $l'$ ,  $l''$ ,  $n$ ,  $m'$ ,  $m''$  seront généralement fonctions de  $t$ , puisque nous supposons les actions déformatrices A, B, C toujours agissantes et variables d'un instant à l'autre. Le cas le plus intéressant à considérer est celui où ces actions deviennent constantes au bout d'un certain temps, et ne cessent pas ensuite de l'être; dans ce cas, le milieu ne tardera pas à acquérir une constitution permanente, et  $p$ ,  $l'$ ,  $l''$ ,  $n$ ,  $m'$ ,  $m''$  garderont désormais les mêmes valeurs. Si en particulier les actions déformatrices sont supprimées après avoir agi quelque temps, on aura, dans l'état moléculaire permanent qui suivra cette suppression,  $A = B = C = 0$  ou  $p = 0$ ; mais les autres coefficients ci-dessus garderont des valeurs finies; ils ne seraient nuls que si le corps se trouvait revenu à sa constitution primitive.

Notre analyse laisse indéterminés tous les coefficients qui entrent dans les formules (6); mais des considérations d'une autre espèce rendent extrêmement probable, entre trois de ces coefficients, la relation

$$(7) \quad l'' = n - p \quad [*].$$

[\*] En effet, si l'on s'appuie sur le principe, universellement admis, qu'il est impossible de créer de toutes pièces du travail, on peut réduire les expressions des forces

§ II. — *Équations des mouvements. — Ondes planes.*

Si le corps était et reste homogène, les axes d'élasticité, les coefficients et les quantités  $a, b, c$  seront les mêmes dans toute son étendue. Alors la première équation des petits mouvements, en appelant  $\delta$  la densité, sera

$$\delta \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{dN_1}{dx} + \frac{dT_3}{dy} + \frac{dT_2}{dz}.$$

élastiques, dans tout milieu mécaniquement symétrique par rapport aux trois plans coordonnés, et quand il y a trois actions normales  $K + A, K + B, K + C$ , antérieures aux déplacements, à la forme

$$(\alpha) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = K + A + (a + K + A) \frac{du}{dx} + (f' - K - A) \frac{dv}{dy} + (e' - K - A) \frac{dw}{dz}, \\ N_2 = K + B + (b + K + B) \frac{dv}{dy} + (d' - K - B) \frac{dw}{dz} + (f' - K - B) \frac{du}{dx}, \\ N_3 = K + C + (c + K + C) \frac{dw}{dz} + (e' - K - C) \frac{du}{dx} + (d' - K - C) \frac{dv}{dy}; \\ T_1 = (d + K + C) \frac{dv}{dz} + (d + K + B) \frac{dw}{dy}, \\ T_2 = (e + K + A) \frac{dw}{dx} + (e + K + C) \frac{du}{dz}, \\ T_3 = (f + K + B) \frac{du}{dy} + (f + K + A) \frac{dv}{dx}. \end{array} \right.$$

(Voir Mémoire déjà cité de M. de Saint-Venant, formules 10, au n° 3.)

Il est aisé d'identifier ces formules ( $\alpha$ ) avec les nôtres (6), à la condition nécessaire et suffisante que la relation (7) soit vérifiée. Comme on a déjà  $A = pa, B = pb, C = pc$ , il suffira de faire

$$(\beta) \left\{ \begin{array}{l} d = -K + m + m' \mathfrak{S}a + m'' a, \quad d' = K + l + (l' + n) \mathfrak{S}a - na, \\ e = -K + m + m' \mathfrak{S}a + m'' b, \quad e' = K + l + (l' + n) \mathfrak{S}a - nb, \\ f = -K + m + m' \mathfrak{S}a + m'' c; \quad f' = K + l + (l' + n) \mathfrak{S}a - nc; \\ a = -K + l + l' \mathfrak{S}a + 2[m + m' \mathfrak{S}a + m''(b + c - a) + na], \\ b = -K + l + l' \mathfrak{S}a + 2[m + m' \mathfrak{S}a + m''(c + a - b) + nb], \\ c = -K + l + l' \mathfrak{S}a + 2[m + m' \mathfrak{S}a + m''(a + b - c) + nc]. \end{array} \right.$$

Ces formules vérifient identiquement les conditions, dites de distribution ellipsoï-

Portons dans cette équation les valeurs (6) des forces élastiques, et désignons, avec M. Lamé, par  $\Delta_2$  l'expression symbolique  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$ . L'équation ci-dessus devient

$$\begin{aligned} \delta \frac{d^2 u}{dt^2} &= [l + m + (l' + m' + m'') \mathbf{S}a + (l'' + p - m'') a] \frac{d\theta}{dx} \\ &+ [m + (m' + m'') \mathbf{S}a - m'' a] \Delta_2 u \\ &+ (p - m'') \left( a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + (n - m'') \frac{d \mathbf{S}a}{dx} \frac{du}{dx}. \end{aligned}$$

On en déduira aisément les deux autres équations du mouvement. Afin de simplifier, désignons les quotients par  $\delta$  de

$$\begin{aligned} l + m + (l' + m' + m'') \mathbf{S}a, \quad l'' + p - m'', \quad m + (m' + m'') \mathbf{S}a, \\ - m'', \quad p - m'', \quad n - m'', \end{aligned}$$

des élasticités, données par M. de Saint-Venant dans le même Mémoire [n° 13. formules (56 et 57)], et qui sont

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dans un premier mode,} \\ 2d + d' = \frac{b+c}{2}, \quad 2e + e' = \frac{c+a}{2}, \quad 2f + f' = \frac{a+b}{2}; \\ \text{Dans un second mode,} \\ 2d + d' = \sqrt{bc}, \quad 2e + e' = \sqrt{ca}, \quad 2f + f' = \sqrt{ab}. \end{array} \right.$$

Les deux modes reviennent au même dans le cas actuel; car les trois coefficients  $a, b, c$  étant presque égaux entre eux, la première ligne des relations (7) est, sauf erreur négligeable, identique à la seconde.

M. de Saint-Venant (n° 16 du même Mémoire), en s'appuyant sur la loi des actions moléculaires fonctions des distances, obtient les expressions des forces élastiques dans un milieu primitivement isotrope qui a subi une petite altération permanente par suite de compressions inégales exercées sur lui dans trois sens rectangulaires. Nos formules (6) deviennent identiques aux siennes, si la relation (7) est vérifiée, et si l'on fait en outre dans les équations ( $\beta$ ), quels que soient  $a, b, c$ ,

$$d = d', \quad e = e', \quad f = f';$$

ce qui revient à

$$(\delta) \quad -K + m = K + l, \quad m' = l' + n, \quad m'' = -n.$$

respectivement par  $\lambda, \lambda', \mu, \rho, \sigma, \nu$ . Les équations du mouvement deviendront

$$(8) \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = (\lambda + \lambda' a) \frac{d\theta}{dx} + (\mu + \rho a) \Delta_2 u + \sigma \left( a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{d^2 u}{dy^2} + c \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + \nu \frac{d \mathfrak{S} a \frac{du}{dx}}{dx}, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = (\lambda + \lambda' b) \frac{d\theta}{dy} + (\mu + \rho b) \Delta_2 v + \sigma \left( a \frac{d^2 v}{dx^2} + b \frac{d^2 v}{dy^2} + c \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + \nu \frac{d \mathfrak{S} a \frac{du}{dx}}{dy}, \\ \frac{d^2 w}{dt^2} = (\lambda + \lambda' c) \frac{d\theta}{dz} + (\mu + \rho c) \Delta_2 w + \sigma \left( a \frac{d^2 w}{dx^2} + b \frac{d^2 w}{dy^2} + c \frac{d^2 w}{dz^2} \right) + \nu \frac{d \mathfrak{S} a \frac{du}{dx}}{dz}. \end{cases}$$

Observons que tous les coefficients  $\lambda, \lambda', \mu, \rho, \sigma, \nu$  peuvent être indépendants d'après notre analyse; toutefois, quand les pressions A, B, C sont nulles, on a  $p = 0$ , et par suite  $\sigma = \rho$ .

Si la relation très-probable (7) est vérifiée,  $\lambda'$  et  $\nu$  sont égaux, car ils valent tous les deux  $\frac{n - m''}{\delta}$ .

Nous raisonnerons désormais dans l'hypothèse que les actions déformatrices A, B, C deviennent constantes au bout d'un certain temps, et nous supposons établie la nouvelle constitution permanente dans laquelle les coefficients  $\lambda, \lambda', \mu, \rho, \sigma, \nu$  ne varient plus.

Étudions les ondes planes propagées par le corps dans une direction quelconque. Soient  $m, n, p$  les cosinus des angles de cette direction avec les axes; I l'amplitude des vibrations et  $\tau$  leur durée;  $m', n', p'$  les cosinus des angles qui fixent le sens de ces vibrations supposées rectilignes; enfin  $\omega$  la vitesse de propagation de l'onde.

Les valeurs de  $u, v, w$  seront ici

$$\begin{aligned} u &= I m' \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\mathfrak{S} m x}{\omega} \right), \\ v &= I n' \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\mathfrak{S} m x}{\omega} \right), \\ w &= I p' \cos \frac{2\pi}{\tau} \left( t - \frac{\mathfrak{S} m x}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Elles pourront représenter des mouvements réels de milieu, pourvu qu'elles satisfassent aux équations (8). Portons donc dans celles-ci

ces valeurs de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . De plus, continuons à exprimer par  $\mathbf{S}$  la somme de trois termes analogues. Nous obtiendrons entre  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$ ,  $\omega$  les relations

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} m [(\lambda + \lambda' a) \mathbf{S}mm' + \nu \mathbf{S}amm'] + m' (\mu + \rho a - \omega^2 + \sigma \mathbf{S}am^2) = 0, \\ n [(\lambda + \lambda' b) \mathbf{S}mm' + \nu \mathbf{S}amm'] + n' (\mu + \rho b - \omega^2 + \sigma \mathbf{S}am^2) = 0, \\ p [(\lambda + \lambda' c) \mathbf{S}mm' + \nu \mathbf{S}amm'] + p' (\mu + \rho c - \omega^2 + \sigma \mathbf{S}am^2) = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles il faut joindre

$$\mathbf{S}m'^2 = 1, \quad \mathbf{S}m^2 = 1.$$

Ajoutons les trois premières, multipliées respectivement par  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . La somme donne

$$(10) \quad [\lambda + \mu - \omega^2 + (\sigma + \lambda') \mathbf{S}am^2] \mathbf{S}mm' + (\rho + \nu) \mathbf{S}amm' = 0.$$

Comme  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont très-petits, cette équation exprime : ou bien que  $\mathbf{S}mm'$  est très-petit de l'ordre de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; ou bien que  $\lambda + \mu - \omega^2$  l'est.

Soit d'abord  $\mathbf{S}mm'$  très-petit. L'expression  $\mathbf{S}mm'$  représente le cosinus de l'angle que fait la vibration avec la normale au plan de l'onde. Donc la vibration se fait presque dans le plan de l'onde : elle est quasi transversale. Les trois équations (9) montrent que  $\omega^2$  diffère de  $\mu$  d'une quantité du même ordre de petitesse que  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Les vibrations seraient rigoureusement transversales si  $\mathbf{S}mm'$  était nul; cela arrive, d'après (10), lorsque

$$(11) \quad (\rho + \nu) \mathbf{S}amm' = 0.$$

Soit actuellement  $\lambda + \mu - \omega^2$  très-petit, c'est-à-dire  $\omega^2$  peu différent de  $\lambda + \mu$ . Les équations (9) donnent alors sensiblement

$$\frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \mathbf{S}mm' = \pm 1.$$

La vibration se fait à peu près normalement au plan de l'onde : elle est quasi longitudinale.

Elle serait rigoureusement longitudinale, si l'on pouvait vérifier les équations (9) en posant  $m' = m$ ,  $n' = n$ ,  $p' = p$ . Portons-y ces valeurs,

et nous trouverons pour conditions nécessaires et suffisantes

$$(12) \quad (\rho + \lambda') a = (\rho + \lambda') b \pm (\rho + \lambda') c.$$

Dans le cas où la relation (7) est vérifiée et où, par suite,  $\nu = \lambda'$ , on ne peut pas avoir  $\rho + \nu = 0$  sans avoir en même temps  $\rho + \lambda' = 0$ , et réciproquement. Donc, dans ce cas, le milieu propage à la fois des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, ou bien il propage à la fois des ondes quasi transversales et des ondes quasi longitudinales.

Lorsqu'on admet le principe des actions moléculaires simples fonctions des distances, les relations (d) de la note précédente donnent  $\rho + \lambda'$  ou  $\rho + \nu$  égal à  $3n$  divisé par la densité. Les ondes ne peuvent être généralement longitudinales ou transversales que pour  $n = -m'' = 0$ , c'est à-dire [formules (β)] que si le milieu est isotrope.

§ III. — *Vibrations quasi transversales : équation aux vitesses.*

Dans l'étude des vibrations quasi transversales,  $\mathbf{S}mm'$  est de l'ordre de  $a, b, c$ , et l'on peut négliger les termes en  $a\mathbf{S}mm', b\mathbf{S}mm', c\mathbf{S}mm'$ . Alors les trois premières équations (9) reviennent à l'égalité continue

$$(13) \quad \frac{m'}{m} = \frac{n'}{n} = \frac{p'}{p} = \lambda \mathbf{S}mm' + \nu \mathbf{S}amm',$$

$$\frac{m'}{s^2 - \alpha} = \frac{n'}{s^2 - \beta} = \frac{p'}{s^2 - \gamma}$$

dans laquelle, afin d'abrégier, nous posons

$$(14) \quad \mu + \rho a = \alpha, \quad \mu + \rho b = \beta, \quad \mu + \rho c = \gamma, \quad \omega^2 - \sigma \mathbf{S}am^2 = s^2.$$

Pour que la quatrième  $\mathbf{S}m'^2 = 1$  soit satisfaite, il suffira que

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} m' = \frac{m}{s^2 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}}, \\ n' = \frac{n}{s^2 - \beta} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}}, \\ p' = \frac{p}{s^2 - \gamma} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}}. \end{array} \right.$$



Alors les trois premières le seront si

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}} = \lambda \mathbf{S} m m' + \nu \mathbf{S} a m m'.$$

Portons dans cette dernière les valeurs (15), et nous aurons l'équation qui donne la vitesse de propagation des ondes planes

$$\lambda \mathbf{S} \frac{m^2}{s^2 - \alpha} + \nu \mathbf{S} \frac{a m^2}{s^2 - \alpha} = 1.$$

Elle peut être simplifiée. En effet, multiplions-la par le produit  $(s^2 - \alpha)(s^2 - \beta)(s^2 - \gamma)$ , qui est du troisième ordre de petitesse; elle deviendra

$$\mathbf{S} m^2 (s^2 - \beta)(s^2 - \gamma) = \text{quantité du troisième ordre en } a, b, c.$$

Pour que le premier membre devienne égal à zéro, au lieu d'être du troisième ordre de petitesse, il suffit de faire varier  $s^2$  ou  $\omega^2$  d'une quantité du second ordre. Donc, sauf erreur négligeable sur la vitesse, l'équation ci-dessus revient à

$$(16) \quad \mathbf{S} m^2 (s^2 - \beta)(s^2 - \gamma) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} \frac{m^2}{s^2 - \alpha} = 0.$$

Une variation du second ordre dans  $s^2$  fait varier  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$  de quantités du premier ordre seulement, comme le montrent les formules (15). On peut donc adopter les équations (15) et (16) pour déterminer la vitesse des ondes planes et la direction des vibrations. La petite altération ainsi subie par  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$  a eu pour effet de rendre les vibrations rigoureusement transversales; car on a, d'après (15) et (16),

$$\mathbf{S} m m' = \mathbf{S} \frac{m^2}{s^2 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}} = 0.$$

La vraie valeur de  $\mathbf{S} m m'$ , sauf erreur du second ordre, serait donnée par (10) et (15): elle est

$$\mathbf{S} m m' = -\frac{\rho + \nu}{\lambda} \mathbf{S} a m m' = -\frac{\rho + \nu}{\lambda} \mathbf{S} \frac{a m^2}{s^2 - \alpha} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}}.$$

Ce résultat peut être simplifié. En effet, de la relation évidente

$$\mathbf{S} \frac{m^2 (s^2 - \mu - \rho a)}{s^2 - \alpha} = 1,$$

on tire

$$(s^2 - \mu) \mathbf{S} \frac{m^2}{s^2 - \alpha} - \rho \mathbf{S} \frac{am^2}{s^2 - \alpha} = 1,$$

ou simplement, d'après (16),

$$\mathbf{S} \frac{am^2}{s^2 - \alpha} = -\frac{1}{\rho}.$$

On aura donc

$$(17) \quad \mathbf{S} mm' = \frac{\nu + \rho}{\lambda \rho} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}}}.$$

L'équation (16) est du second degré en  $s^2$ ; elle donne deux valeurs généralement distinctes pour  $s^2$  et, par suite, pour  $\omega$  et  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$ . Ainsi, le corps peut généralement propager dans toutes les directions deux ondes planes quasi transversales, ayant chacune sa vitesse spéciale et une direction déterminée pour ses vibrations.

§ IV. — *Ellipsoïde d'élasticité; direction des vibrations.*

Des équations (15) et (16) on déduit

$$\mathbf{S} (s^2 - \alpha) m'^2 = \frac{\mathbf{S} \frac{m^2}{s^2 - \alpha}}{\mathbf{S} \frac{m^2}{(s^2 - \alpha)^2}} = 0, \quad \text{ou bien} \quad s^2 = \mathbf{S} \alpha m'^2.$$

Prenons, à partir de l'origine, dans la direction de la vibration, une droite égale à  $\frac{1}{s}$ , et soient  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  les coordonnées de son extrémité. On aura  $m' = x_1 s$ ,  $n' = y_1 s$ ,  $p' = z_1 s$ , et le lieu des points  $(x_1, y_1, z_1)$  sera l'ellipsoïde

$$(18) \quad \mathbf{S} \alpha x_1^2 = 1.$$

Dans le cas de  $\sigma = 0$  et, par suite, de  $s = \omega$ , la vitesse de propagation d'une onde plane est égale à l'inverse du demi-diamètre de l'ellipsoïde, dirigé suivant la vibration correspondante. Dans ce cas

particulier, l'ellipsoïde est dit d'*élasticité* : nous lui conserverons le même nom, quel que soit  $\sigma$ .

Si l'on mène par l'origine, parallèlement aux ondes, un plan qui coupera l'ellipsoïde d'élasticité, les deux vibrations seront dirigées sensiblement suivant les deux axes de l'ellipse d'intersection. En effet, en prenant pour  $m', n', p'$  les valeurs (15), la vibration se fait dans le plan de l'onde. D'autre part, l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde d'élasticité par un plan mené à l'origine parallèlement aux ondes est représentée par les deux équations

$$(18 \text{ bis}) \quad \mathbf{S} \alpha x^2 = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{S} m x = 0;$$

sa tangente au point  $(x, y, z)$  aura les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes proportionnels à

$$n\gamma z - p\beta y, \quad p\alpha x - m\gamma z, \quad m\beta y - n\alpha x.$$

Au point de l'ellipse où aboutit le demi-diamètre parallèle à la vibration, ces cosinus seront proportionnels à

$$n\gamma p' - p\beta n', \quad p\alpha m' - m\gamma p', \quad m\beta n' - n\alpha m'.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le demi-diamètre soit un axe, c'est que la tangente lui soit perpendiculaire, ou que

$$\mathbf{S} m' (n\gamma p' - p\beta n') = 0.$$

Portons dans cette relation les valeurs (15), et elle devient l'identité

$$\mathbf{S} (\beta - \gamma) = 0.$$

Les deux vibrations correspondantes à des ondes planes de même direction sont donc polarisées à angle droit. Celle qui est dirigée suivant le grand axe de l'ellipse (18 bis) correspond à la plus petite valeur de  $s^2$ , ou à la plus petite vitesse de propagation des ondes; celle qui est dirigée suivant le petit axe de l'ellipse correspond à la plus grande vitesse de propagation.

#### § V. — *Surface de l'onde.*

Supposons qu'un mouvement périodique soit produit en un point intérieur d'un milieu indéfini et tout autour dans un très-petit espace.

Prenons ce point pour origine des coordonnées. Il est clair que toutes les autres molécules seront agitées de proche en proche et exécuteront des vibrations de même période que celles de l'origine. Les lieux géométriques des points où elles se trouveront simultanément à une même phase de la vibration, par exemple au commencement, seront des surfaces grandissantes, dites *surfaces des ondes*.

A une distance finie de l'origine, considérons un volume très-petit de matière, qui contienne néanmoins un nombre immense de champs de vibration, chose possible si nous supposons extrêmement petites la longueur d'onde et l'amplitude des mouvements. Dans cette portion de matière, les vibrations ont partout sensiblement la même largeur et la même direction. D'ailleurs les ondes sont très-rapprochées et formées à fort peu près d'éléments plans parallèles. Donc elles y obéissent sensiblement aux lois des ondes planes.

Cela posé, considérons à un instant donné une onde encore voisine du centre de l'ébranlement, et les ondes successives qui entourent celle-là et qui occupaient sa place 1, 2, 3, ... éléments de temps  $dt$  avant l'instant considéré. Menons à chacune un plan tangent parallèle à une direction fixe. Les points de contact de ces plans tangents sur les diverses ondes infiniment voisines seront infiniment voisins à cause de la continuité. Par suite, d'après la remarque précédente, la distance de deux d'entre eux sera sensiblement égale à  $\omega dt$ ,  $\omega$  désignant la vitesse de propagation des ondes planes parallèles à ces plans tangents. Si donc on mène le plan tangent à l'onde qui est partie depuis un temps  $t$  du centre de l'ébranlement, ce plan sera distant de l'origine de la quantité  $\int_0^t \omega dt$ , qui égale  $\omega t$  dans un milieu homogène.

Par conséquent, le milieu étant supposé homogène, une onde quelconque est l'enveloppe de toutes les ondes planes parties de l'origine en même temps qu'elle et dans tous les sens. En grandissant avec  $t$ , elle reste semblable à elle-même, et ses dimensions croissent proportionnellement au temps.

On appelle *rayon* toute droite qui part du centre de l'ébranlement. Il est clair que tous les plans tangents aux ondes menés par les divers points d'un rayon sont parallèles. De plus, les molécules situées sur

un même rayon exécutent leurs vibrations suivant des droites parallèles données par les lois des ondes planes.

Il suffit de calculer l'onde partie de l'origine depuis un temps  $t = 1$ . Prenons le pôle d'un plan tangent à cette onde par rapport à la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Ce pôle sera sur la normale menée de l'origine au plan tangent, et à une distance de l'origine égale à l'inverse de la normale ou à  $\frac{1}{\omega}$ . Le lieu de ces pôles, c'est-à-dire la polaire réciproque de l'onde, sera donc une surface ayant pour rayon, à partir de l'origine, dans la direction  $(m, n, p)$ , la valeur correspondante de  $\frac{1}{\omega}$ .

Ainsi, la surface de l'onde est la polaire réciproque, par rapport à la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , de la surface que l'on obtient en portant, à partir de l'origine, dans une direction quelconque, une ligne égale à l'inverse de la vitesse de l'onde plane perpendiculaire à cette direction. Cette surface a été considérée par Cauchy, dans ses Mémoires sur la lumière. Le théorème que je viens d'énoncer paraît avoir été donné pour la première fois par M. Haugton. Nous pourrions nous en servir pour trouver l'équation de l'onde; mais nous obtiendrions celle-ci bien plus simplement au degré d'approximation cherché.

#### § VI. — Équations de l'onde et de ses plans tangents.

Prenons l'équation aux vitesses sous la forme (16)

$$S \frac{m^2}{\omega^2 - \sigma S a m^2 - \alpha} = \text{quantité finie.}$$

L'onde qui est partie de l'origine depuis l'unité de temps est l'enveloppe du plan  $S m x = \omega$ , dirigé successivement dans tous les sens. Comme  $\omega$  varie peu, elle ne différera pas beaucoup d'une sphère. La perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent, perpendiculaire dont la direction est déterminée par les cosinus  $m, n, p$ , ne fera qu'un angle très-petit de l'ordre de  $a, b, c$  avec le rayon mené au point de contact. Par suite, ce rayon,  $r = \sqrt{S x^2}$ , ne différera de  $\omega$  que d'une quantité très-petite du second ordre. D'ailleurs  $m^2, n^2, p^2$  valent à très-peu près  $\frac{x^2}{r^2}, \frac{y^2}{r^2}, \frac{z^2}{r^2}$  ou  $\frac{x^2}{\mu}, \frac{y^2}{\mu}, \frac{z^2}{\mu}$ . Portant ces valeurs dans

l'équation aux vitesses, on trouvera celle de l'onde

$$\mathbf{S} \frac{x^2}{\mathbf{S} \left(1 - \frac{\sigma a}{\mu}\right) x^2 - \alpha} = \text{quantité finie.}$$

Posons

$$(19) \quad x'^2 = \left(1 - \frac{\sigma a}{\mu}\right) x^2, \quad y'^2 = \left(1 - \frac{\sigma b}{\mu}\right) y^2, \quad z'^2 = \left(1 - \frac{\sigma c}{\mu}\right) z^2,$$

et observons que, sans changer les rapports de  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  à  $\sqrt{\mathbf{S}x'^2}$ , on peut faire varier  $\mathbf{S}x'^2$  de quantités négligeables du second ordre; nous pourrons écrire

$$(20) \quad \mathbf{S} \frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha} = 1.$$

Si l'on fait  $\sigma = 0$ , ou bien  $x' = x$ ,  $y' = y$ ,  $z' = z$ , l'onde est celle de Fresnel.

Dans le cas général, pour construire l'onde, on pourra d'abord construire celle de Fresnel (20), puis allonger chaque rayon de la quantité  $\frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}} \mathbf{S}ax'^2$ . En effet, un rayon quelconque est

$$\sqrt{\mathbf{S}x^2} = \sqrt{\mathbf{S}x'^2 \left(1 + \frac{\sigma a}{\mu}\right)} = \sqrt{\mathbf{S}x'^2} + \frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}} \mathbf{S}ax'^2,$$

sauf erreur du second ordre. Ainsi, l'onde de Fresnel étant construite, un rayon quelconque  $\sqrt{\mathbf{S}x^2}$  de l'onde générale est égal à un rayon très-voisin  $\sqrt{\mathbf{S}x'^2}$  de celle de Fresnel, augmenté de la quantité  $\frac{\sigma}{2\mu\sqrt{\mu}} \mathbf{S}ax'^2$ . Or le rayon de l'onde générale, dont la direction coïncide avec ce rayon de l'onde de Fresnel, ne diffère que d'une quantité du second ordre des rayons voisins. Donc on obtiendra bien l'onde générale en allongeant de la quantité indiquée chaque rayon de celle de Fresnel.

L'équation (20) peut être présentée sous d'autres formes qui nous seront utiles. L'identité

$$1 = \mathbf{S} \frac{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha) x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha) \mathbf{S}x'^2} = \mathbf{S} \frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha} - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2} \mathbf{S} \frac{\alpha x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha},$$

combinée avec (20), donne

$$(21) \quad \mathbf{S} \frac{\alpha x'^2}{\mathbf{S} x'^2 - \alpha} = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathbf{S} \alpha x'^2 (\mathbf{S} x'^2 - \beta) (\mathbf{S} x'^2 - \gamma) = 0.$$

En développant  $(\mathbf{S} x'^2 - \beta)(\mathbf{S} x'^2 - \gamma)$  et multipliant le premier membre par  $\mathbf{S} \alpha x'^2$ , nous obtiendrons

$$\mathbf{S} \{ x'^2 [(\mathbf{S} \alpha x'^2)^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma) \mathbf{S} \alpha x'^2 + \alpha\beta \alpha\gamma] \} = 0$$

ou

$$\mathbf{S} x'^2 (\mathbf{S} \alpha x'^2 - \gamma\alpha) (\mathbf{S} \alpha x'^2 - \alpha\beta) = 0.$$

De là résulte une troisième forme de l'équation (20), en divisant par  $(\mathbf{S} \alpha x'^2 - \beta\gamma) (\mathbf{S} \alpha x'^2 - \gamma\alpha) (\mathbf{S} \alpha x'^2 - \alpha\beta)$ ,

$$(22) \quad \mathbf{S} \frac{x'^2}{\mathbf{S} \alpha x'^2 - \beta\gamma} = 0.$$

Cherchons actuellement l'équation du plan tangent à l'onde. Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point de contact;  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées courantes. Si nous posons

$$f(x, y, z) = \mathbf{S} \frac{x'^2}{\mathbf{S} x'^2 - \alpha} = 1,$$

l'équation de ce plan sera

$$\mathbf{S} x_1 \frac{df}{dx} = \mathbf{S} x \frac{df}{dx}.$$

Or

$$\frac{df}{dx} = 2x' \left[ \frac{1}{\mathbf{S} x'^2 - \alpha} - \mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S} x'^2 - \alpha)^2} \right] \left( 1 - \frac{\sigma a}{2\mu} \right).$$

d'où il résulte, après quelques réductions, pour l'équation cherchée,

$$\mathbf{S} x_1 x' \left[ 1 - \frac{\sigma a}{2\mu} - \frac{1}{\mathbf{S} x'^2 - \alpha} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S} x'^2 - \alpha)^2}} \right] = \mathbf{S} x'^2.$$

Le premier membre montre à quelles quantités sont proportionnels les cosinus  $m, n, p$  des angles que fait avec les axes la normale au plan

tangent. En extrayant la racine carrée de la somme des carrés de ces quantités, puis divisant par cette racine, on trouve

$$(23) \left\{ \begin{aligned} m &= \frac{x'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}} \left[ 1 - \frac{\sigma a}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2} \mathbf{S}ax'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}} \right], \\ n &= \frac{y'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}} \left[ 1 - \frac{\sigma b}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2} \mathbf{S}ay'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \beta} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}} \right], \\ \rho &= \frac{z'}{\sqrt{\mathbf{S}x'^2}} \left[ 1 - \frac{\sigma c}{2\mu} + \frac{\sigma}{2\mu^2} \mathbf{S}az'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - \gamma} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}} \right], \end{aligned} \right.$$

et, pour l'équation du plan tangent,

$$\mathbf{S}mx_1 = \sqrt{\mathbf{S}x^2},$$

comme cela devait être.

§ VII. — *Direction des vibrations.*

La direction des vibrations est donnée par les cosinus  $m'$ ,  $n'$ ,  $\rho'$ , respectivement proportionnels (13) à

$$\frac{m}{\omega^2 - \sigma \mathbf{S}am^2 - \alpha}, \quad \frac{n}{\omega^2 - \sigma \mathbf{S}an^2 - \beta}, \quad \frac{\rho}{\omega^2 - \sigma \mathbf{S}a\rho^2 - \gamma},$$

et par suite, très-sensiblement, à

$$(24) \quad \frac{x'}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha}, \quad \frac{y'}{\mathbf{S}x'^2 - \beta}, \quad \frac{z'}{\mathbf{S}x'^2 - \gamma}.$$

La vibration, en un point  $(x, y, z)$ , est dirigée comme au point correspondant très-voisin  $(x', y', z')$  de l'onde de Fresnel.

Supposons que l'on mène le plan tangent à l'onde en  $(x, y, z)$  et le rayon qui aboutit à ce point; ensuite, qu'on projette le rayon sur le plan tangent. Cherchons l'angle que fait cette projection avec la vibration.

Pour trouver la projection du rayon sur le plan tangent, menons d'abord de l'origine une normale à ce plan. Soient  $x_1, y_1, z_1$  les coor-



données du pied de la normale. Nous aurons

$$x_1 = m \sqrt{\mathbf{S}x^2} = x' \left[ 1 - \frac{\sigma a}{2\mu} + \frac{\sigma}{\mu^2} \mathbf{S} a x'^2 - \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - a} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - a)^2}} \right].$$

La projection du rayon sur le plan tangent, comptée à partir du pied de la normale, aura elle-même, pour projection sur l'axe des  $x$ ,

$$(25) \quad x - x_1 = x' \left[ \frac{\sigma a}{\mu} - \frac{\sigma}{\mu^2} \mathbf{S} a x'^2 + \frac{1}{\mathbf{S}x'^2 - a} \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - a)^2}} \right].$$

On aura de même  $y - y_1$  et  $z - z_1$ .

Dans le cas  $\sigma = 0$ , qui est celui de l'onde de Fresnel, les quantités  $x - x_1$ ,  $y - y_1$ ,  $z - z_1$  sont proportionnelles (24) à  $m'$ ,  $n'$ ,  $p'$ . La vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent.

Le carré de cette projection est dans le cas général, en négligeant les termes du troisième ordre de petitesse,

$$l^2 = \mathbf{S}(x - x_1)^2 = \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - a)^2}} \left[ 1 + \frac{2\sigma}{\mu} \mathbf{S} \frac{a x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - a} \right] + \frac{\sigma^2}{\mu^3} [\mathbf{S}x'^2 \mathbf{S}a^2 x'^2 - (\mathbf{S}x' a x')^2].$$

D'ailleurs, on a identiquement

$$\mathbf{S} \frac{a x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - a} = \frac{1}{\rho} \left( \mathbf{S} \frac{a x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - a} - \mu \mathbf{S} \frac{x'^2}{\mathbf{S}x'^2 - a} \right) = -\frac{\mu}{\rho},$$

$$\mathbf{S}x'^2 \mathbf{S}a^2 x'^2 - (\mathbf{S}x' a x')^2 = \mathbf{S}(b - c)^2 y'^2 z'^2;$$

d'où

$$(26) \quad L^2 = \frac{1}{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - a)^2}} \left( 1 - \frac{2\sigma}{\rho} \right) + \frac{\sigma^2}{\mu^3} \mathbf{S}(b - c)^2 y'^2 z'^2.$$

Nous pouvons actuellement évaluer le cosinus de l'angle de la vibration avec la projection du rayon sur le plan tangent. Désignons par  $V$  cet angle, et nous trouverons

$$\cos V = \frac{1}{L \sqrt{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - a)^2}}} \mathbf{S} \frac{x'(x - x_1)}{\mathbf{S}x'^2 - a},$$

ou bien, sauf erreur du premier ordre,

$$\cos V = \frac{1 - \frac{\sigma}{\rho}}{L \sqrt{\mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}}}$$

Substituons à L sa valeur (26) et cherchons  $\tan^2 V$ . Nous aurons

$$\tan^2 V = \left( \frac{\frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}} \right)^2 \left[ -1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} \mathbf{S}(b-c)^2 y'^2 z'^2 \mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2} \right].$$

Extrayons la racine carrée, et rappelons que, l'angle V étant inférieur à deux droits, sa tangente a le signe de son cosinus, ou de  $1 - \frac{\sigma}{\rho}$ . En adoptant le signe + ou le signe -, suivant que  $\frac{\sigma}{\rho}$  est positif ou négatif, nous aurons

$$\tan V = \frac{\pm \frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}} \sqrt{-1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} \mathbf{S}(b-c)^2 y'^2 z'^2 \mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}}.$$

Donnons au radical une autre forme, qui le montre essentiellement réel. Pour cela, dans l'identité

$$(f^2 + g^2 + h^2)(f'^2 + g'^2 + h'^2) - (ff' + gg' + hh')^2 = \mathbf{S}(gh' - hg')^2,$$

faisons

$$f = \frac{x'}{\mathbf{S}x'^2 - \alpha}, \quad g = \frac{y'}{\mathbf{S}x'^2 - \beta}, \quad h = \frac{z'}{\mathbf{S}x'^2 - \gamma},$$

$$f' = x - x_1, \quad g' = y - y_1, \quad h' = z - z_1,$$

et substituons à  $x - x_1, y - y_1, z - z_1$  leurs valeurs (25). Nous tirons

$$-1 + \frac{\rho^2}{\mu^3} \mathbf{S}(b-c)^2 y'^2 z'^2 \mathbf{S} \frac{x'^2}{(\mathbf{S}x'^2 - \alpha)^2}$$

$$= \rho^2 \mathbf{S} \left\{ \left[ 1 + \frac{\rho}{\mu} (b+c) - \frac{\mathbf{S}x'^2}{\mu} - \frac{\rho}{\mu^2} \mathbf{S}ax'^2 \right] \frac{(b-c)y'z'}{(\mathbf{S}x'^2 - \beta)(\mathbf{S}x'^2 - \gamma)} \right\}^2.$$

Par conséquent,

$$(27) \quad \text{tang V} = \frac{\pm \frac{\sigma}{\rho}}{1 - \frac{\sigma}{\rho}} \sqrt{\rho^2 \mathfrak{S} \left\{ \left[ 1 + \frac{\rho}{\mu} (b+c) - \frac{\mathfrak{S} x'^2}{\mu} - \frac{\rho}{\mu^2} \mathfrak{S} a x'^2 \right] \frac{(b-c) y' z'}{(\mathfrak{S} x'^2 - \beta)(\mathfrak{S} x'^2 - \gamma)} \right\}^2}.$$

Dans le cas où  $a, b, c$  sont inégaux, le radical ne peut s'annuler généralement. Alors  $\text{tang V}$  ne s'annule que pour  $\frac{\sigma}{\rho} = 0$ . C'est le cas de la double réfraction d'après Fresnel : la vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde.

De même,  $\text{tang V}$  ne devient infini que pour  $1 - \frac{\sigma}{\rho} = 0$  ou  $\sigma = \rho$ . Ainsi, dans le cas de  $\sigma = \rho$  seulement, la vibration se fait perpendiculairement à la projection du rayon sur le plan tangent.

§ VIII. — *Double réfraction suivant Fresnel et suivant MM. Mac-Cullagh et Newmann.*

Examinons les deux cas particuliers où  $\sigma = 0$  et où  $\sigma = \rho$ .

Si  $\sigma = 0$ , nous avons vu que l'onde est celle de Fresnel (20), et de plus que la vibration se fait suivant la projection du rayon sur le plan tangent à l'onde, ce qui constitue le deuxième point de sa théorie de la double réfraction.

Le cas  $\sigma = 0$ , sans que  $\rho$  soit nul, n'est possible que lorsque le corps est soumis à des actions A, B, C inégales dans les divers sens. En effet, si le corps ne supportait que la pression normale et constante  $-K$ , les deux coefficients  $\sigma$  et  $\rho$  seraient égaux (§ II), et  $\sigma$  ne pourrait être nul sans que  $\rho$  le fût, ce qui détruirait la double réfraction. Ce cas tient donc essentiellement à la présence de tractions ou de compressions inégales dans les divers sens, exercées sur le milieu au moment même du phénomène. M. Briot l'obtient, dans ses *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière* (nos 43 et 45), en supposant que les molécules d'éther se repoussent en raison inverse de la sixième puissance de la distance.

Soit maintenant  $\sigma = \rho$ , ce qui arrive quand le corps ne supporte en

tout sens que la pression constante — K. Prenons l'onde sous la forme (22), et substituons à  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  leurs valeurs (19). Nous obtiendrons

$$S \frac{x^2}{Sx^2 + \frac{\rho - \sigma}{\mu} S ax^2 - [\mu + \rho(b + c)]} = \text{quantité finie, 1 par exemple,}$$

et, dans le cas  $\sigma = \rho$ ,

$$(28) \quad S \frac{x^2}{Sx^2 - [\mu + \rho(b + c)]} = 1.$$

On voit que l'onde est alors identique à ce que devient celle de Fresnel, quand on remplace dans celle-ci  $a$  par  $b + c$ ,  $b$  par  $c + a$ ,  $c$  par  $a + b$ .

Si les axes sont tellement disposés qu'on ait  $\rho a > \rho b > \rho c$ , celui des  $x$ , celui des  $y$  et celui des  $z$  sont appelés respectivement axes de plus grande, de moyenne et de plus petite élasticité. L'axe de plus grande élasticité, dans le cas de  $\sigma = \rho$ , a, par rapport à la surface de l'onde, le même rôle que celui de plus petite élasticité pour  $\sigma = 0$ , et réciproquement. En effet, si

$$\rho a > \rho b > \rho c,$$

on aura

$$\rho(b + c) < \rho(c + a) < \rho(a + b).$$

Quant à la direction des vibrations, nous avons vu qu'elle est perpendiculaire à la projection du rayon sur le plan tangent. Ce serait le cas de la double réfraction, d'après les idées de MM. Mac-Cullagh et Newmann.

Les deux hypothèses  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = \rho$  sont les seules pour lesquelles la vibration soit parallèle ou perpendiculaire à la projection du rayon sur le plan tangent (formule 27). Ce sont aussi les seules qui donnent à l'onde la forme de celle de Fresnel. En effet celle-ci, dans le cas où  $a = b$ , a une nappe sphérique, comme on le reconnaît facilement. Or, dans le même cas, l'onde générale n'a une sphère pour nappe que si  $\sigma = 0$  ou  $\sigma = \rho$ .

§ IX. — *Propriétés diverses de l'onde générale.*

Je ne pousserai pas plus loin, dans ce Mémoire, l'étude de l'onde générale (19 et 20); mais je vais en indiquer quelques propriétés intéressantes.

Elle se compose de deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure, qui ont quatre points communs. Les coordonnées de ceux-ci ne peuvent être évaluées que sauf erreur du premier ordre de petitesse, quand on néglige les termes du second degré en  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Les droites qui joignent ces points deux à deux en passant par le centre sont appelées axes optiques : si l'on a  $\rho a > \rho b > \rho c$ , elles font avec ceux des  $x$ , des  $y$  et des  $z$  des angles ayant respectivement, avec erreur du premier ordre, les cosinus

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \quad \text{pour la première,} \\ \sqrt{\frac{a-b}{a-c}}, \quad 0, \quad -\sqrt{\frac{b-c}{a-c}} \quad \text{pour la seconde.} \end{array} \right.$$

De plus  $U$ ,  $U'$  désignant les angles d'un rayon  $r$  de l'onde avec les axes optiques, l'équation polaire de la surface est, sauf des termes du second ordre,

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = \mu + \sigma b + \frac{\rho}{2}(a + c) \\ \quad + \frac{2\sigma - \rho}{2}(a - c) \cos U \cos U' \pm \frac{\rho}{2}(a - c) \sin U \sin U'. \end{array} \right.$$

Aux extrémités des axes optiques, les deux nappes se raccordent en ombilic, de manière à y avoir une infinité de tangentes, communes à toutes deux, et dont le lieu géométrique est un cône circulaire très-évasé. Si l'on mène par l'ombilic un plan perpendiculaire à l'axe du cône, les génératrices sont inclinées sur ce plan d'un angle

$$(31) \quad \psi = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\rho^2(a-b)(b-c)}.$$

L'axe du cône est lui-même dans le plan des axes optiques, et fait avec

l'axe optique correspondant, du côté de l'axe des  $x$ , un angle égal à  $\left(1 - \frac{2\sigma}{\rho}\right) \psi$ .

Enfin un certain plan, mené à une très-petite distance de l'ombilic, perpendiculairement à l'axe du cône, est tangent à la nappe extérieure sur tout un cercle dont le centre est sur cet axe et dont le rayon est vu du centre de l'onde sous l'angle  $\psi$ .

L'étude de la direction des vibrations, tout près des axes optiques, nécessite des considérations délicates. Il est nécessaire d'y tenir compte, dans les équations (8) du mouvement, des termes du second degré en  $a, b, c$ , qui influent notablement sur la valeur de  $\mathbf{S}mm'$ . Dans un travail plus étendu que celui-ci, je démontre que, lorsque le cosinus  $\mathbf{S}mm'$  est du second ordre de petitesse très-près des axes optiques, la direction des vibrations est donnée par la loi suivante :

*Si l'on décrit sur l'onde, de l'extrémité d'un axe optique comme centre, des circonférences de petits rayons, les molécules situées sur chacune d'elles vibrent vers un même point de la circonférence, celles de la nappe extérieure vers le point le plus voisin de l'axe des  $x$ , celles de la nappe intérieure vers le point le plus voisin de l'axe des  $y$ .*

Quand  $\mathbf{S}mm'$  est du premier ordre en  $a, b, c$ , aux mêmes endroits de l'onde, la même loi se vérifie à une distance finie, quoique assez petite, des axes optiques, mais non plus à une distance de ces axes de l'ordre de  $a, b, c$ .

§ X. — Ondes quasi longitudinales.

Étudions actuellement les ondes planes quasi longitudinales. L'expression  $\lambda + \mu - \omega^2 y$  est de l'ordre de  $a, b, c$ , et  $m', n', p'$  différent peu de  $m, n, p$ . Nous pouvons donc, sauf erreur du second ordre, substituer dans l'équation (10),  $m, n, p$  à  $m', n', p'$ . Le carré de la vitesse de propagation sera

$$(32) \quad \omega^2 = \lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \rho + \nu) \mathbf{S}am^2.$$

Pour que cette vitesse soit constante, il suffit que  $\sigma + \lambda' + \nu + \rho = 0$ . Si le milieu pouvait propager dans tous les sens des ondes rigoureusement transversales et des ondes rigoureusement longitudinales, on aurait les relations (11 et 12)  $\rho + \nu = 0, \rho + \lambda' = 0$ , et par consé-

quent  $\sigma + \lambda' + \nu + \rho = \sigma - \rho$  : la vitesse serait constante pourvu que  $\sigma = \rho$ , c'est-à-dire pourvu que la pression extérieure exercée sur le corps fût la même dans tous les sens. Il est tout à fait improbable qu'une pareille constance de la vitesse  $\omega$  puisse exister ailleurs que dans un corps isotrope : donc, si le milieu est biréfringent, il ne doit pas pouvoir propager dans tous les sens des vibrations rigoureusement transversales ou rigoureusement longitudinales.

Prenons, à partir de l'origine et suivant la vibration, comme au § IV pour les ondes quasi transversales, une longueur égale à  $\frac{1}{\omega}$ . Les extrémités de ces lignes donneront l'ellipsoïde

$$(33) \quad \mathbf{S} [\lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \nu + \rho) a] x^2 = 1 :$$

ou pourrait l'appeler *ellipsoïde d'élasticité des vibrations longitudinales*.

Les considérations du § V étant entièrement applicables aux vibrations quasi longitudinales, on aura pour l'onde courbe la polaire réciproque de cet ellipsoïde par rapport à la sphère  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . C'est l'ellipsoïde inverse

$$(34) \quad \mathbf{S} \frac{x^2}{\lambda + \mu + (\sigma + \lambda' + \nu + \rho) a} = 1.$$

Enfin les relations (9) combinées avec (32) donnent aisément, pour déterminer la direction des vibrations, sauf erreur du second ordre,

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{m' - m}{m} = \frac{\lambda' + \rho}{\lambda} (a - \mathbf{S} a m^2), \\ \frac{n' - n}{n} = \frac{\lambda' + \rho}{\lambda} (b - \mathbf{S} a m^2), \\ \frac{p' - p}{p} = \frac{\lambda' + \rho}{\lambda} (c - \mathbf{S} a m^2). \end{cases}$$

#### § XI. — Généralisation.

Les formules fondamentales (6) ont été établies dans l'hypothèse que les actions déformatrices A, B, C gardent constamment les mêmes

rappports  $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$  depuis le commencement de la déformation. Or il se peut que ces actions restent en effet, pendant un certain temps, proportionnelles aux trois nombres constants et très-petits  $a, b, c$ ; mais, puis, qu'elles le soient, et pendant un autre temps quelconque, à trois autres  $a', b', c'$ ; ensuite à trois autres  $a'', b'', c''$ ; etc. Dans ce cas, tous les raisonnements du § I s'appliquent, ainsi que les résultats, à cela près que les coefficients d'élasticité contiendront, non plus seulement des termes en  $a, b, c$ , mais encore d'autres pareils en  $a', b', c'$ , en  $a'', b'', c''$ , etc. Les formules (1) auront leurs termes en  $l'Sa, l''a, na, nb, \dots$ , remplacés par des sommes de termes pareils, lesquels contiendront  $a, a', a'', \dots$ , ou  $b, b', b'', \dots$ , ou  $c, c', c'', \dots$ . Nous désignerons ces sommes par  $\sum l'Sa, \sum l''a, \sum na, \sum nb, \dots$ . Les relations (4) seront toujours vérifiées, et les formules (6) seront encore vraies, sauf à y remplacer, comme il vient d'être dit, par une somme, chacun des termes en  $a, b, c$ . Toutefois, à cause des équations (5),  $\sum pa, \sum pb, \sum pc$  se réduiront à un seul terme, qui représente la valeur actuelle de A, de B ou de C, et  $p$  sera nul pour tous leurs autres termes. Les formules ( $\alpha$ ) de la note qui termine le § I donneront toujours, entre chaque coefficient  $l''$  et les coefficients correspondants  $n$  et  $p$ , la relation très-probable (7). Les formules ( $\beta$ ) seront encore les mêmes, sauf toujours la substitution à chaque terme en  $a, b, c$  d'une somme de termes pareils. Elles ne cesseront pas de vérifier identiquement les conditions ( $\gamma$ ) de distribution ellipsoïdale des élasticités. Il y aura toutefois cette différence, que les équations ( $\beta$ ), privées des termes en  $a', b', c', a'', b'', c'', \dots$  donnent la relation

$$(\varepsilon) \quad \frac{d - e}{d' - e'} = \frac{e - f}{e' - f'}$$

et par conséquent ne laissent pas entièrement indépendants les six coefficients  $d, e, f, d', e', f'$ , tandis que ces mêmes formules ( $\beta$ ), avec leurs nouveaux termes en  $a', b', c', a'', b'', c'', \dots$ , ne supposent plus la condition ( $\varepsilon$ ), et donnent, dans toute sa généralité, la distribution ellipsoïdale des élasticités.

Enfin les rapports des actions déformatrices A, B, C peuvent arbi-



trairement changer d'un instant à l'autre, bien que ces actions restent toujours appliquées aux mêmes éléments plans rectangulaires. Ce cas n'est qu'une extension du précédent, puisqu'il revient à supposer très-grand le nombre des quantités  $a, a', a'', \dots, b, b', b'', \dots, c, c', c'', \dots$ . Les forces élastiques seront toujours données par les formules (6), dans lesquelles chaque terme en  $a, b, c$  sera remplacé par une somme de termes pareils.

Ainsi les expressions des forces élastiques, dans un milieu isotrope inégalement comprimé suivant trois directions rectangulaires, sont identiques, pourvu qu'on admette la relation (7), à celles que donne la distribution ellipsoïdale des élasticités prise dans toute sa généralité. Lorsqu'en particulier les actions déformatrices gardent entre elles les mêmes rapports durant tout le temps de la déformation, ces formules ne sont plus aussi générales, car leurs coefficients vérifient la relation ( $\epsilon$ ).

Les équations des petits mouvements seront toujours (8), sauf à mettre le signe de sommation  $\sum$  devant tous les termes en  $a, b, c$ . On aura encore  $\sigma = \rho$  si les actions A, B, C sont actuellement nulles, et  $\nu = \lambda'$  si la relation (7) est vérifiée. Les formules (9), (10), (11) et (12) seront toujours vraies, à la même condition. En posant

$$s^2 = \omega^2 - \sum \sigma S a m^2, \quad \mu + \sum \rho a = \alpha, \quad \mu + \sum \rho b = \beta, \quad \mu + \sum \rho c = \gamma;$$

$$\left(1 - \frac{\sum \sigma a}{\mu}\right) x^2 = x'^2, \quad \left(1 - \frac{\sum \sigma b}{\mu}\right) y^2 = y'^2, \quad \left(1 - \frac{\sum \sigma c}{\mu}\right) z^2 = z'^2,$$

les relations (15), (16), (18), (20), (21), (22), (24) restent les mêmes; (23), (25) et (28) sont vraies aussi, pourvu qu'on mette le signe de sommation  $\sum$  devant les termes en  $\sigma$  et en  $\rho$ . Mais la formule (26) et celle qui donne  $\text{tang V}$  ne sont plus vraies généralement, car leur démonstration suppose que

$$\frac{\sum \sigma a}{\sum \rho a} = \frac{\sum \sigma b}{\sum \rho b} = \frac{\sum \sigma c}{\sum \rho c}.$$

Toutefois, il est clair que ces formules seront exactes, avec leurs conséquences, dans les deux cas particuliers  $\sigma = 0$ ,  $\sigma = \rho$ , examinés au § VIII. Enfin les équations (32), (33), (34) et (35), relatives aux vibrations quasi longitudinales, subsisteront, avec le signe  $\Sigma$  devant leurs termes en  $a, b, c$ . Donc tous les résultats concernant la propagation des ondes annoncés dans l'introduction de ce Mémoire subsistent, alors même que les actions déformatrices A, B, C ne gardent pas les mêmes rapports durant tout le temps de la déformation.

