JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HATON DE LA GOUPILLIÈRE

Théorème sur le tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 13 (1868), p. 204-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__204_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

THÉORÈME

Sur le tautochronisme des épicycloïdes quand on a égard au frottement;

Par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

On connaît depuis Huyghens (*De Horologio oscillatorio,* P. II, prop. 25) le tautochronisme rigoureux de la cycloïde pour un point pesant. Newton étendit cette proposition (*Principes,* liv. II, prop. 26) au cas où l'on joindrait à la pesanteur la résistance d'un milieu en raison de la vitesse. Plus tard Necker montra (*Mémoires des Savants étrangers,* 1763, t. IV, p. 96) que la même propriété subsiste lorsqu'on a égard au frottement. Le tautochronisme a lieu alors par rapport au point où la tangente est inclinée sous l'angle de frottement. Ajoutons enfin que les trois forces peuvent être réunies ensemble sans troubler l'isochronisme. Le P. Jullien a montré de plus (*Problèmes de Mécanique,* t. I, p. 393) que cette combinaison constituait la solution la plus étendue renfermée dans la formule générale de Lagrange pour le tautochronisme [*] lorsqu'on envisage ensemble la pesanteur, le frottement et une résistance qui dépende de la vitesse d'une manière indéterminée.

D'un autre côté, Newton avait déjà reconnu (*Principes,* liv. I, prop. 52) que l'épicycloïde possède elle-même la propriété du tautochronisme lorsque le mobile est sollicité par le centre du cercle fixe en raison de la distance. Mais, à ma connaissance, le parallèle en est

[*] Cette formule dont je parlerai plus loin a été présentée par son auteur comme renfermant tous les cas possibles de tautochronisme; c'était à tort, et M. Bertrand a montré (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1847, t. XII, p. 121) qu'elle est loin d'être aussi générale; mais elle n'en conserve pas moins un grand intérêt.

resté là. J'ai cherché à le compléter, et je suis arrivé au théorème suivant :

L'épicycloïde est encore tautochrone pour des forces centrales attractives ou répulsives proportionnelles à la distance, lorsqu'on a égard au frottement. Le point d'isochronisme est alors celui dont le rayon vecteur fait avec la normale l'angle de frottement. Ce tautochronisme n'est pas troublé quand on introduit, en outre, une résistance proportionnelle à la vitesse.

Pour le démontrer, formons l'expression de la force tangentielle en représentant par kr l'action attractive ou répulsive suivant le signe de k, f le coefficient de frottement et $\varphi(v)$ la résistance que nous laisserons indéterminée jusqu'à nouvel ordre :

$$S = kr\cos\mu - \varphi(v) - f\left(\frac{v^2}{\rho} + kr\sin\mu\right),$$

μ désignant l'angle du rayon vecteur avec la courbe. Or on trouve, en prenant l'arc pour variable indépendante,

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin\mu = \sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}},$$

et

$$\rho = \frac{r\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}}{1-\frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}.$$

L'expression de la force tangentielle devient par là

$$(1)\quad S = kr\frac{dr}{ds} - \varphi(v) - f\left(v^2\frac{1-\frac{dr^2}{ds^2}-r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}} + kr\sqrt{1-\frac{dr^2}{ds^2}}\right).$$

La formule générale de Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1765) donne, pour la force tangentielle capable de tautochronisme,

$$(2) \qquad S = v\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) - \frac{v^2}{\xi}\frac{d\xi}{ds},$$

ξ étant une fonction arbitraire de s et ψ une expression quelconque formée avec $\frac{v}{\xi}$. Pour avoir la solution la plus générale renfermée dans cette formule pour les hypothèses précédentes, il suffit de disposer de ces deux arbitraires et de la fonction r qui définit la courbe inconnue de manière à identifier les deux expressions. Je suivrai pour cela une marche analogue à celle qui a été employée par M. Bertrand et depuis par le P. Jullien.

L'expression (1) satisfait visiblement au caractère

$$\frac{d^4 S}{dv^3\,ds} = 0.$$

Imposons donc cette condition à la formule (2) : il vient ainsi

$$\frac{v^2}{\xi^2}\psi^{\text{IV}}\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\frac{v}{\xi}\psi'''\left(\frac{v}{\xi}\right) + 6\psi''\left(\frac{v}{\xi}\right) = 0.$$

Cette équation a pour intégrale avec quatre constantes arbitraires A, B, C, D :

$$\psi\left(\frac{v}{\xi}\right) = A\frac{\xi}{v} - B + \frac{C}{A}\frac{v}{\xi} + D\log\frac{v}{\xi}.$$

Dès lors la relation (2) prend la forme plus explicite

$$(3) \qquad S = A\xi - Bv + \frac{v^2}{\xi}\left(\frac{C}{A} - \frac{d\xi}{ds}\right) + Dv\log\frac{v}{\xi}.$$

Nous pouvons maintenant identifier les expressions (1) et (3). En premier lieu, le terme $Dv\log\xi$ nous présente v au premier degré avec un coefficient qui contient s, ce qui n'existe pas dans la formule (1) et nous oblige à faire $D = 0$. La fonction (3) se trouve par là réduite à ses trois premiers termes, l'un indépendant de v, le second de s, le troisième les renfermant tous les deux. En envisageant dans l'expression (1) les trois parties correspondantes, nous aurons pour les fonctions de v seul :

$$B v = \varphi(v),$$

pour les termes qui ne renferment que s :

$$A\xi = kr\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right),$$

et enfin, pour la partie qui les contient tous les deux, v^2 disparaissant de lui-même :

$$\frac{1}{\xi}\left(\frac{C}{A} - \frac{d\xi}{ds}\right) = f\,\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}.$$

La première équation montre que la seule résistance admissible est proportionnelle à la vitesse. La seconde fournit la valeur de ξ, et, en la reportant dans la troisième, nous obtenons l'équation différentielle de la trajectoire :

$$\frac{\frac{C}{k} - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)}{r\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)} = f\,\frac{1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}}{r\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}},$$

ce qu'on peut écrire de la manière suivante :

$$\left(\frac{C}{k} - 1\right) + \left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)\left[1 + \frac{f\frac{dr}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}} - \frac{f\left(\frac{dr}{ds} - f\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{dr^2}{ds^2}}}\right] = 0,$$

ou encore

$$\left(\frac{C}{k} - 1\right) + \left(1 - \frac{dr^2}{ds^2} - r\frac{d^2r}{ds^2}\right)(1 + f^2) = 0,$$

et enfin

$$\frac{dr^2}{ds^2} + r\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\frac{C}{k} + f^2}{1 + f^2}.$$

Cette forme que l'on pourrait facilement intégrer entre r et s, et même ensuite en coordonnées polaires entre r et θ, va nous suffire pour conclure sans qu'il soit nécessaire de développer l'intégration.

On voit, en effet, que le coefficient de résistance B a complétement disparu, et que l'existence ou la suppression du frottement n'influencent que la valeur de la constante qui seule renferme le coefficient f. Or, C est arbitraire, ce qui montre que *la tautochrone des forces centrales proportionnelles à la distance est la même avec ou sans frottement, comme avec ou sans résistance proportionnelle à la vitesse.*

Cette courbe a d'ailleurs été déjà déterminée pour le cas où l'on n'a ni frottement ni résistance par M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1844, t. IX, p. 415), qui a obtenu les résultats suivants : si la force est répulsive, la tautochrone est toujours une épicycloïde extérieure; si elle est attractive, la courbe peut, suivant les valeurs respectives du coefficient d'attraction et du temps d'isochronisme, être une épicycloïde intérieure ou une certaine spirale qui a la propriété d'être semblable à la développée de sa développée.

Il reste à connaître l'extrémité commune des arcs isochrones. Remarquons pour cela qu'elle ne saurait se trouver que dans une position d'équilibre, puisqu'une oscillation infiniment petite doit exiger un temps fini pour se produire dans ses environs. *Ce sera donc, dans le cas actuel, au point où la force, c'est-à-dire le rayon vecteur, fait avec la normale l'angle de frottement.*

On peut se demander si le tautochronisme subsistera encore pour le mouvement en sens contraire, lorsqu'on imprimera au mobile à partir de ce point diverses impulsions initiales. Cette réciprocité, évidente dans le cas des liaisons théoriques, doit être constatée à part dans les questions de frottement. Il suffirait d'ailleurs pour cela de changer dans le calcul les signes de f et de B. Or celui-ci a disparu, et l'autre ne figure qu'au carré dans la dernière équation. Les conclusions resteront donc les mêmes, et l'on voit que *l'isochronisme a encore lieu pour le mouvement inverse.*