JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une Lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 13 (1868), p. 1-4.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1868_2_13__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE;

PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... Le théorème de Jacobi concernant le nombre des décompositions du quadruple d'un entier impair m en une somme de quatre carrés impairs, que l'illustre auteur trouve égal à la somme

$$\zeta_1(m)$$

des diviseurs de m, donne lieu à l'équation suivante :

$$(1) \qquad \sum F(4m - i^2) = \zeta_1(m),$$

où je désigne généralement par

$$F(k)$$

le nombre des classes de formes quadratiques binaires (primitives ou non) de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair. Le signe sommatoire porte sur les valeurs de i, qui forment la suite des nombres impairs

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots,$$

en ayant soin de s'arrêter au moment où la quantité placée sous le signe F deviendrait négative.

» En y remplaçant m par $3m$, l'équation (1) devient

$$\sum F(12m - i^2) = \zeta_1(3m), \tag{2}$$

sous la condition de

$$12m - i^2 > 0.$$

Or je me suis assuré (par une démonstration bien simple) que l'équation (2) se décompose en deux autres, si l'on considère à part les valeurs de i divisibles par 3 et celles qui ne le sont pas.

» En ne considérant que ces dernières, ce que j'indiquerai au moyen d'un accent placé sur le signe sommatoire

$$\sum{}',$$

on a

$$\sum{}' F(12m - i^2) = \zeta_1(3m) - \zeta_1(m). \tag{3}$$

» Veut-on au contraire ne retrancher de $12m$ que des carrés impairs dont les racines soient multiples de 3, on aura l'équation ci-après :

$$\sum F(12m - 9i^2) = \zeta_1(m), \tag{4}$$

dans laquelle les valeurs de i seront encore

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ldots,$$

comme pour l'équation (2), mais cette fois sous la condition de

$$12m - 9i^2 > 0.$$

Il y avait, je crois, quelque intérêt à rapprocher l'équation (4) de l'équation (1).

» Soit, par exemple,

$$m = 1,$$

par conséquent

$$\zeta_1(3m) = 4, \quad \zeta_1(m) = 1.$$

On devra avoir, d'après l'équation (3),

$$F(12 - 1^2) = 3,$$

ce qui est exact, puisqu'en effet

$$F(11) = 3;$$

puis, d'après l'équation (4),

$$F(12 - 9.1^2) = 1,$$

ce qui est exact aussi, puisque

$$F(3) = 1.$$

» Soit ensuite

$$m = 3,$$

d'où

$$\zeta_1(3m) = 13, \quad \zeta_1(m) = 4.$$

On devra avoir, d'après l'équation (3),

$$F(36 - 1^2) + F(36 - 5^2) = 9,$$

c'est-à-dire

$$F(35) + F(11) = 9,$$

ce qu'on trouve exact, eu égard aux valeurs connues

$$F(35) = 6, \quad F(11) = 3;$$

puis, d'après l'équation (4),

$$F(36 - 9.1^2) = 4,$$

c'est-à-dire

$$F(27) = 4,$$

ce qui est vrai encore,

» En prenant enfin

$$m = 5,$$

on aura, d'une part,

$$F(60 - 1^2) + F(60 - 5^2) + F(60 - 7^2) = 18,$$

c'est-à-dire

$$F(59) + F(35) + F(11) = 18;$$

puis, d'autre part,

$$F(60 - 9.1^2) = 6,$$

c'est-à-dire

$$F(51) = 6.$$

Mais je ne veux pas pousser plus loin ces vérifications faciles. »