JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

YVON VILLARCEAU

De l'effet des Attractions locales sur les longitudes et les azimuts; applications d'un nouveau Théorème à l'étude de la figure de la Terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 65-86.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__65_0>

De l'effet des Attractions locales sur les longitudes et les azimuts; applications d'un nouveau Théorème à l'étude de la figure de la Terre;

PAR M. **YVON VILLARCEAU** [*].

Quelle que soit la figure du sphéroïde terrestre, par un point M de sa surface, menons une parallèle à l'axe du monde et, par cette parallèle, un plan de direction encore indéterminée et assujetti seulement à faire un petit angle avec le méridien astronomique du lieu; dans ce plan, et par le point M, menons une droite de direction également indéterminée et assujettie à faire un petit angle avec la direction du zénith astronomique. Nous nommerons le plan ainsi défini *plan méridien auxiliaire*, et la droite *zénith auxiliaire*. Soit B un signal géodésique observé du lieu M, Z son azimut par rapport au méridien auxiliaire, et compté du sud à l'ouest.

Si nous construisons une sphère ayant son centre au point M, les trois plans menés par le zénith auxiliaire, par le point B et la droite parallèle à l'axe du monde (dont nous considérons seulement la partie boréale), détermineront un triangle sphérique. Soient A, B, C les trois angles de ce triangle, répondant respectivement aux trois points où les droites percent la sphère; a, b, c les trois côtés opposés; ces côtés seront respectivement égaux à la distance polaire du signal B, à la colatitude du lieu et à la distance zénithale du signal (les deux derniers se rapportant bien entendu au zénith auxiliaire). On aura, dans le triangle ABC,

$$\cot A \sin C + \cos b \cos C - \cot a \sin b = 0.$$

Considérons actuellement la vraie direction du zénith, telle que la

[*] Ce Mémoire est, sauf un léger changement de forme, la reproduction de Communications faites à l'Académie des Sciences, dans ses séances des 26 mars 1866 et 2 avril 1867.

déterminent les attractions locales et autres, et formons un nouveau triangle sphérique au moyen de cette direction et de celles du pôle et du point B. Soient alors A′, B′, C′, a', b', c' les angles et les côtés de ce nouveau triangle. Les deux triangles n'auront de commun que le côté $a = a'$. Pour déterminer les différences des quantités homologues dans les deux triangles, il suffira de différentier l'équation précédente en y supposant a constant. Effectuant la différentiation et ayant recours à des relations connues, on trouve

$$\delta A + (\cos b - \cot c \sin b \cos A)\delta C + \cot c \sin A \,\delta b = 0.$$

Or, le point B étant censé à l'horizon du lieu M, on a $c' = 90$ degrés et $\cot c' = 0$; d'où, en négligeant les quantités du deuxième ordre,

$$(1) \qquad \delta A + \cos b\,\delta C = 0.$$

Pour nous conformer aux usages géodésiques, nous remplacerons les azimuts A′ et A par leurs suppléments $180° - Z'$ et $180° - Z$; ce qui donnera $\delta A = A' - A = -(Z' - Z)$. Si nous comptons les longitudes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ du méridien auxiliaire et du méridien astronomique dans le sens de l'est à l'ouest, nous aurons $C + \mathfrak{L} = C' + \mathfrak{L}'$, d'où $\delta C = C' - C = -(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})$; enfin, b étant égal au complément de la latitude L du zénith auxiliaire, on a

$$\cos b = \sin L.$$

Moyennant la substitution de ces valeurs, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad Z' - Z + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) = 0,$$

relation qui a nécessairement lieu, quels que soient les attractions locales et le plan méridien auxiliaire considéré, pourvu que l'écart angulaire entre ce plan et le méridien astronomique reste un petit angle.

Application à la démonstration d'un théorème de Laplace relatif aux sphéroïdes peu différents de la sphère.

Soit une ligne géodésique issue d'un lieu dont la longitude et la latitude sont $\mathfrak{L}_0$ et L_0, et menée suivant la direction australe du méridien de ce lieu : il est clair que si la Terre est un sphéroïde de révolution autour de son axe de figure, la ligne géodésique sera contenue tout entière dans le plan méridien passant par le lieu de départ; mais si le sphéroïde n'est pas de révolution, la ligne géodésique s'écartera propressivement de ce plan. En un point de latitude L, la direction de la ligne géodésique ne coïncidera pas non plus avec le méridien astronomique de ce lieu. Si nous prenons, pour direction du signal B, celle du prolongement austral de la ligne géodésique, l'azimut astronomique de B sera Z'. Maintenant, considérons l'ensemble des points de la ligne géodésique compris entre L_0 et L, et soit, en un point de cette ligne, $\mathfrak{L}$ la longitude d'un plan méridien auxiliaire assujetti à être tangent à la ligne géodésique en ce point. Au point L_0, $\mathfrak{L}$ se confondra avec $\mathfrak{L}_0$, et au point L on aura

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \int_{L_0}^{L} \frac{d\mathfrak{L}}{dL}\, dL.$$

Or la dérivée $\frac{d\mathfrak{L}}{dL}$ étant supposée développée en séries suivant les puissances de l'accroissement $L - L_0$, elle aura la forme

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dL} = p(L - L_0) + q(L - L_0)^2 + \ldots,$$

puisqu'à l'origine le plan méridien auxiliaire se confond avec le méridien astronomique; on aura donc

$$\int_{L_0}^{L} \frac{d\mathfrak{L}}{dL}\, dL = \frac{1}{2} p(L - L_0)^2 + \frac{1}{3} q(L - L_0)^3 + \ldots.$$

Le sphéroïde étant actuellement supposé peu différent de la sphère, les coefficients $p, q, \ldots$ seront très-petits, du premier ordre par exemple, car ils doivent s'annuler dans le cas de la sphère; si nous supposons, en outre, que l'amplitude $L - L_0$ soit du même ordre de petitesse, l'intégrale précédente sera une quantité très-petite du troisième ordre : d'où il suit qu'aux termes près de cet ordre, on aura $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0$. Prenant donc pour plan méridien auxiliaire au point M celui qui est tangent à la ligne géodésique en ce point, on aura, pour l'azimut Z de B rapporté à ce plan, Z = o. Substituant enfin dans l'équation (2) les précédentes valeurs de $\mathfrak{L}$ et Z, il viendra

$$(3) \qquad Z' + \sin L(\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}_0) = 0,$$

équation qui coïncide avec le théorème donné par Laplace dans la *Mécanique céleste* (t. II, p. 117), sous la forme $(V - V_1)\sin\psi_1 = \varpi$. Il faut remarquer que ϖ est l'azimut Z' compté en sens contraire, et que ψ_1 est la latitude du point de départ; or, au degré d'approximation de ce théorème, on peut écrire L au lieu de ψ_1. L'auteur de la *Mécanique céleste* a déduit son résultat d'une analyse assez compliquée; il en caractérise l'importance en ces termes :

« Ainsi l'on peut, par l'observation seule et indépendamment de la connaissance de la figure de la Terre, déterminer la différence en longitude des méridiens correspondants aux extrémités de l'arc mesuré, et si la valeur de ϖ est telle, qu'on ne puisse l'attribuer aux erreurs des observations, on sera sûr que la Terre n'est pas un sphéroïde de révolution. »

Le théorème de Laplace ne concerne que les arcs méridiens, et son application est limitée par la condition que leur amplitude reste faible. Il n'en est pas ainsi de notre formule (2) que nous allons appliquer à l'ensemble des points principaux d'un réseau trigonométrique.

Application générale à l'étude de la figure de la Terre.

Imaginons un sphéroïde défini et dont les dimensions auront servi de base au calcul des longitudes, latitudes et azimuts géodésiques. Transportons sur ce sphéroïde les positions géographiques et directions azimutales fournies de proche en proche par le calcul. Au lieu quelconque M, dont la longitude et la latitude géodésiques sont $\mathfrak{L}$ et L, prenons pour méridien auxiliaire le méridien géodésique tracé par le point M. Si la figure de la Terre est telle qu'on la suppose, la direction australe du méridien résultant du calcul coïncidera en M, au moins approximativement, avec celle du méridien tracé par ce point; dans le cas contraire, la direction calculée fera un certain angle μ avec ce méridien. Supposons cet angle compté du sud vers l'ouest : un azimut rapporté à notre méridien auxiliaire se trouvera être égal à l'azimut calculé, augmenté de l'angle μ. Convenons, pour plus de simplicité, que Z désigne désormais l'azimut calculé, nous devrons changer, dans l'équation (2), Z en $Z + \mu$. Alors cette équation deviendra

$$Z' - Z + \sin L(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = \mu. \tag{4}$$

Cette relation a lieu *quelles que soient les attractions locales*. Dans le cas d'un sphéroïde peu différent de la sphère, μ sera un petit angle qui ne variera qu'à raison de la configuration des traits généraux du sphéroïde. Dans le cas d'un sphéroïde de révolution autour de l'axe de rotation, μ sera constamment nul, aux erreurs près des observations, si, comme nous le supposons d'ailleurs, les constantes géodésiques ont reçu les valeurs les plus convenables. Il suffirait donc d'établir qu'aucun système de valeurs de ces constantes ne peut comporter une valeur nulle de l'angle μ en un seul point du sphéroïde, pour démontrer que la figure de la Terre n'est pas celle d'une surface de révolution autour de l'axe de rotation.

Les mêmes considérations s'appliqueraient au cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, et le résultat $\mu \gtrless 0$ en détruirait la possibilité.

Si donc le sphéroïde terrestre peut, dans son ensemble, être assimilé à un ellipsoïde de révolution, on aura en chaque point et *quelles que soient les attractions locales*

$$Z' - Z + \sin L(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = 0, \tag{5}$$

en faisant la part des erreurs des observations.

On est dans l'usage d'assimiler la figure de la Terre à un sphéroïde de révolution dont on détermine les dimensions en posant et résolvant des équations de la forme

$$L' - L = \delta L, \quad Z' - Z = \delta Z, \quad \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \delta\mathcal{L}, \tag{6}$$

où L, Z, $\mathcal{L}$ désignent des valeurs correspondantes à un système de constantes géodésiques, et δL, δZ, $\delta\mathcal{L}$ les corrections dépendantes des corrections inconnues des mêmes constantes. On sait d'ailleurs à l'avance que, tout en faisant la part des erreurs des observations, ces équations ne peuvent pas généralement être satisfaites, à cause des attractions locales : le poids des résultats est d'autant diminué qu'il s'en faut davantage que ces équations ne soient satisfaites. Or, aujourd'hui que les longitudes astronomiques peuvent rivaliser en précision avec les latitudes, il semble qu'il doive y avoir avantage à recourir aux équations de condition de la forme

$$Z' - Z + \sin L(\mathcal{L}' - \mathcal{L}) = \delta Z + \sin L\,\delta\mathcal{L}, \tag{7}$$

qui se déduisent de la formule (5); ces équations devant être satisfaites quelles que soient les attractions locales.

L'incertitude des azimuts géodésiques provenant de l'accumulation des erreurs des angles des triangles serait un obstacle, dans le cas où les chaînes présenteraient la configuration élémentaire qu'on remarque dans la triangulation française : telle n'est pas la triangulation anglaise de l'Inde, où les chaînes donnent lieu à de nombreuses équations entre les angles et entre les côtés des triangles, équations dont on profite pour réduire considérablement les minimes erreurs de la triangulation. La détermination astronomique des longitudes et azimuts, commencée l'année dernière dans l'Inde anglaise, permettra sans doute d'appliquer notre équation à la remarquable triangulation qui a été effectuée dans cette contrée. Quant au réseau français, comme les chaînes principales sont environnées de triangles de premier ordre qui ont été mesurés avec soin, on pourrait les remplacer par des chaînes plus composées et analogues à celles de l'Inde anglaise : le système de compensation y étant appliqué, les erreurs des azimuts géodésiques seraient certainement réduites.

Nous devons toutefois faire remarquer que les équations de la forme (7) sont insuffisantes à déterminer les corrections de toutes les constantes géodésiques : en effet, si l'on exprime δZ et $\delta\mathcal{L}$ en fonction de ces corrections, on trouve que le coefficient de la correction relative aux dimensions absolues du sphéroïde s'annule : il serait donc nécessaire de recourir à celles des équations de la forme (6) qu'on jugerait le plus propres à la détermination de l'inconnue restante ; mais comme ces équations sont affectées des effets des attractions locales, il faudrait leur attribuer un poids inférieur à celui des équations de la forme (7) et que le calcul lui-même pourrait fixer avec une suffisante approximation.

En considérant le coefficient de la correction de l'aplatissement, dans le second membre de l'équation (7), on trouve qu'une chaîne méridienne ou une chaîne parallèle sont impropres à sa détermination, et que la direction la plus favorable est celle qui partage en deux parties égales l'angle du méridien et du premier vertical, quand on veut employer une chaîne unique, et s'affranchir complétement de l'effet des attractions locales. Une chaîne de triangles qui, partant de la côte sud du Portugal, se dirigerait vers le nord-est de la Russie d'Europe en traversant l'Espagne, la France, l'Allemagne et la Russie remplirait ces conditions.

L'élimination de l'une des inconnues qui résulte de l'emploi de l'équation (7) et la petitesse des coefficients de la correction de l'aplatissement, quand on l'applique à divers points appartenant à une même méridienne ou à un même parallèle, rendent au contraire cette équation éminemment propre à la discussion ou plutôt au contrôle d'une chaîne ou portion de chaîne dirigée dans le sens du méridien ou dans le sens perpendiculaire. Ajoutons que l'élimination de la correction de l'azimut de départ entre de pareilles équations conduit à de nouvelles équations dans lesquelles les coefficients des inconnues restantes deviennent très-petits, lorsque les portions de chaînes considérées ne comprennent qu'un petit nombre de degrés. Alors ces équations se réduisent sensiblement à leurs parties connues, et il ne reste qu'à examiner si les nombres restants peuvent ou non être imputés aux erreurs des azimuts géodésiques; car les erreurs des observations astronomiques et celles des longitudes géodésiques sont négligeables vis-à-vis des précédentes. Or la théorie des probabilités permet d'exprimer facilement l'erreur de l'azimut extrême d'une chaîne de triangles, en fonction des erreurs individuelles des sommes des angles de chacun d'eux.

L'application de notre théorème sur les attractions locales offre, relativement au contrôle de l'exactitude d'une chaîne de triangles, des avantages dont l'importance se comprendra facilement, si l'on se rappelle que, depuis quarante ans, la géodésie française est restée arrêtée dans ses développements par les doutes que l'on avait conçus sur la vraie cause des discordances entre les résultats de l'astronomie et ceux de la géodésie.

Une application numérique du théorème sur les attractions locales a été faite aux deux chaînes principales de la triangulation française : la Méridienne de Dunkerque et le Parallèle de Paris. Cette application sera développée à la fin du présent Mémoire, avec ses conséquences.

Dans ce qui précède, nous avons présenté la démonstration d'un théorème sur les attractions locales, en nous bornant à en indiquer sommairement les applications. Il nous a semblé nécessaire, pour en bien faire comprendre la portée, d'entrer dans quelques développements.

Lorsque l'on compare les coordonnées et azimuts des stations géodésiques déterminés astronomiquement, avec les valeurs des coordonnées et azimuts déduites des calculs géodésiques, on trouve des différences que l'on cherche tout d'abord à faire disparaître, en corrigeant les données numériques qui ont servi de point de départ dans les calculs géodésiques. Après avoir déterminé de la manière la plus convenable les corrections de ces données, on reconnaît généralement que les discordances sont réduites, mais conservent néanmoins des valeurs sensibles. La solution est admissible si les écarts définitifs peuvent s'expliquer au moyen des légères inexactitudes des observations. Quand au contraire ces écarts sont hors de proportion avec les erreurs des observations, on les explique en les attribuant aux irrégularités de la figure de la Terre, que l'on parvient ainsi à évaluer approximativement. Mais cette évaluation reste empreinte d'incertitude, s'il peut rester quelque doute sur la précision des opérations astronomiques ou l'exactitude de la triangulation. C'est ce qui est arrivé notamment lorsqu'on a voulu utiliser les mesures de longitudes et d'azimuts effectuées sur le parallèle de Paris et sur le parallèle moyen, il y a une quarantaine d'années. La méthode des signaux de feu, qui réalisait déjà un progrès incontestable, ne présentait cependant pas de garanties suffisantes : les moyens d'obtenir le temps absolu dans les stations n'offraient pas la précision nécessaire; l'influence des équations personnelles était à peine entrevue. Aussi, les écarts considérables qui ont été observés entre l'astronomie et la géodésie ont-ils simplement conduit, en ce qui concerne le parallèle moyen, par exemple, à supposer que la chaîne des Alpes avait pu produire des anomalies prononcées. Ces deux grandes opérations n'ont amené aucun progrès réel dans nos connaissances sur la figure de la Terre : pour atténuer l'effet des anomalies persistantes, il a fallu se résoudre à combiner les nouvelles mesures avec celle de l'arc de l'équateur; mais alors on renonçait à en tirer parti pour l'étude de la figure de la Terre dans nos contrées. Aujourd'hui, grâce aux progrès des méthodes astronomiques, l'application du théorème sur les attractions locales nous permet de lever ces difficultés.

Trois éléments interviennent dans la comparaison qui nous occupe : le réseau trigonométrique, les observations astronomiques et les attractions locales. Les opérations géodésiques devraient évidemment se contrôler d'elles-mêmes : la multiplicité des mesures de bases, jointe à la comparaison des valeurs des côtés communs aux nœuds des chaînes, offrirait peut-être des garanties suffisantes, si l'accord recherché avait effectivement lieu; mais on sait qu'il n'est pas toujours réalisé d'assez près, du moins dans la géodésie française; on a vu d'ailleurs que l'accord obtenu résulte parfois d'erreurs qui se compensent. Nous sommes donc conduit à supposer les opérations géodésiques empreintes d'erreurs sensibles, et à rechercher les moyens de les mettre en évidence. Quant aux opérations astronomiques, elles ont atteint, de nos jours, un grand degré de perfection : leur discussion est facile et l'on s'assure aisément que leurs incertitudes ne peuvent plus porter que sur les fractions de seconde d'arc. Eu égard à ce que les discordances que nous avons en vue dépassent une trentaine de secondes, en plus d'un point du réseau français, on nous permettra de mettre les résultats astronomiques hors de cause. Enfin les attractions locales pouvant, d'après le nouveau théorème, être éliminées d'une certaine combinaison des longitudes et des azimuts; s'il subsiste des discordances entre les résultats astronomiques et géodésiques, après l'application du théorème, on sera forcément amené à les attribuer, pour la plus grande partie, aux erreurs de la triangulation. C'est ce qui résultera avec évidence du développement des calculs suivants.

Désignons par L_i et $\mathcal{L}_i$ la latitude et la longitude d'une station, et Z_i l'azimut d'un signal observé de cette station, compté du sud vers l'ouest. Réservant ces lettres non accompagnées d'accents à la désignation des résultats géodésiques, nous appliquerons un accent aux mêmes lettres, pour distinguer les résultats fournis par l'astronomie. L'équation (7), qui est relative à l'ellipsoïde de révolution et a lieu, quelles que soient les attractions locales, deviendra

$$(8) \qquad Z'_i - Z_i + \sin L_i(\mathcal{L}'_i - \mathcal{L}_i) = \delta Z_i + \sin L_i \delta \mathcal{L}_i.$$

Les corrections δZ_i et $\delta \mathcal{L}_i$ dépendent des corrections indéterminées des éléments des calculs géodésiques, et qui se rapportent à la longitude $\mathcal{L}_0$ et à la latitude L_0 du point de départ (Paris, dans notre géodésie), à l'azimut de départ Z_0, à l'aplatissement α : elles dépendent en outre des corrections $\delta\beta = \frac{\delta Q}{Q}$, $\delta\gamma = \frac{\delta s}{s}$, en désignant par Q le quart de méridien et s la longueur d'une ligne géodésique quelconque (l'une des bases par exemple). Les expressions de δZ_i et $\delta \mathcal{L}_i$ sont

$$\delta Z_i = \frac{dZ_i}{dZ_0}\delta Z_0 \quad [*] \quad + \frac{dZ_i}{dL_0}\delta L_0 + \frac{dZ_i}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dZ_i}{d\beta}(\delta\beta - \delta\gamma),$$

$$\delta \mathcal{L}_i = \frac{d\mathcal{L}_i}{dZ_0}\delta Z_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\mathcal{L}_0}\delta \mathcal{L}_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{dL_0}\delta L_0 + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\mathcal{L}_i}{d\beta}(\delta\beta - \delta\gamma).$$

Nous avons donné, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 2 mars 1866, les expressions des dérivées qui figurent ici. En les formant, on a négligé, suivant l'usage, l'aplatissement et ses puissances supérieures, comme donnant lieu à des termes du second ordre [**].

---

[*] Le coefficient $\frac{dZ_i}{d\mathcal{L}_0}$ est nul.

[**] On a négligé également les différences que présentent, sous le rapport de la longueur et de l'orientation, les éléments des lignes géodésiques menées sur le sphéroïde irrégulier et sur le sphéroïde de révolution, entre les deux points donnés. Il est facile de s'assurer qu'en attribuant aux attractions locales des effets s'élevant à 1' par exemple, les longitudes, latitudes et azimuts géodésiques n'en seraient pas sensiblement affectés.

Si, à l'aide de ces expressions que nous ne pouvons reproduire ici, on forme celle du second membre de l'équation (8), on obtient, après quelques transformations,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &Z'_i - Z_i + \sin L_i(\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i) \\ &\quad = \cos u_i\,\delta Z_0 + \sin L_i\,\delta\mathfrak{L}_0 - \cos L_i \sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)\,\delta L_0 \\ &\quad\quad - \frac{\cos L_i \sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)}{\sin 1''}\Big[2\cos\tfrac{1}{2}(L_i + L_0)\sin\tfrac{1}{2}(L_i - L_0) \\ &\quad\quad\quad + \left(\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1\right)\sin L_i\Big]\cos L_0\,\delta\alpha, \end{aligned}\right.$$

u_i désignant l'amplitude angulaire de la ligne géodésique qui joint les deux stations. Au degré d'approximation convenu, on a

$$(10)\qquad \cos u_i = \sin L_0 \sin L_i + \cos L_0 \cos L_i \cos(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0);$$

d'où l'on déduit

$$(11)\quad \sin^2\tfrac{1}{2}u_i = \sin^2\tfrac{1}{2}(L_i - L_0) + \cos L_0 \cos L_i \sin^2\tfrac{1}{2}(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0).$$

Il n'y a pas à distinguer ici le signe de u_i, attendu que le second membre de l'équation (9) est une fonction paire de u_i.

La formule (9) donne lieu à deux remarques importantes : 1° Le second membre ne contient pas en dénominateur le facteur $\cos L_i$ qui accompagne les expressions de δZ_i et $\delta\mathfrak{L}_i$; en outre, $\sin(\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)$ s'y trouve affecté de ce facteur. La quantité qu'il représente reste donc déterminée à toute latitude, bien que les éléments $Z'_i - Z_i$ et $\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i$ se trouvent individuellement sujets à indétermination. Cela se conçoit, si l'on remarque que l'azimut et la longitude astronomiques doivent être rapportés à un même méridien dont l'erreur sera celle correspondante à la latitude : il en est de même pour la longitude et l'azimut géodésiques. 2° La correction $\delta\beta - \delta\gamma$ se trouve éliminée. Il en résulte la nécessité de recourir aux équations de condition en usage, pour la détermination de la correction des dimensions absolues du sphéroïde.

La quantité $\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1$ est censée tirée d'une table spéciale que nous donnons ci-dessous; mais le terme correspondant sera presque toujours négligeable. Dès lors, on voit que le coefficient de $\delta\alpha$ est sensiblement proportionnel au produit des différences de longitude et de latitude $\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0$ et $L_i - L_0$. En sorte que dans un système de deux chaînes, l'une méridienne, l'autre formant parallèle, et dont le point de départ occupe le croisement, le coefficient de $\delta\alpha$ sera très-petit du second ordre; les termes sensibles du deuxième membre de l'équation (9) se réduiront à ses trois premiers. Mais nous allons opérer une autre réduction, qui permettra la discussion d'une méridienne ou d'un parallèle, sans exiger pour ainsi dire de calcul.

Appliquons l'équation (9) au point de départ lui-même, nous aurons d'abord

$$\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0 = 0,\quad L_i - L_0 = 0,\quad u_i = 0,$$

puis, en posant

$$\zeta = Z'_0 - Z_0 + \sin L_0 (\mathfrak{L}'_0 - \mathfrak{L}_0), \tag{12}$$

$$\zeta = \delta Z_0 + \sin L_0 \, \delta\mathfrak{L}_0. \tag{13}$$

Cette équation devrait être jointe aux équations de la forme (9), pour la détermination des inconnues, si cette détermination est possible; néanmoins, nous lui ferons jouer un rôle distinct. Nous supposerons qu'une mesure très-exacte de Z'_0 et de $\mathfrak{L}'_0$, suivant les cas, ait été faite au lieu de départ : l'équation (13) sera affranchie de toute inexactitude; elle sera donc très-propre à la détermination de δZ_0 en fonction de $\delta\mathfrak{L}_0$. Au contraire, les valeurs de Z_i relatives aux autres stations seront d'autant moins exactes, que ces stations seront plus éloignées du point de départ, à cause de l'accumulation des erreurs des angles des triangles intermédiaires. Nous éliminerons donc δZ_0 entre l'équation (13) et les équations de la forme (9); ce qui donnera, en ayant égard à la valeur de $\cos u_i$,

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} & Z'_i - Z_i + \sin L_i (\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i) - \zeta \cos u_i \\ & \quad = \left[\sin (L_i - L_0) + 2 \sin L_0 \cos L_i \sin^2 \tfrac{1}{2} (\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)\right] \cos L_0 \, \delta\mathfrak{L}_0 \\ & \quad\quad - \cos L_i \sin (\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0) \, \delta L_0 \\ & \quad\quad - \frac{\cos L_i \sin (\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0)}{\sin 1''} \left[2 \cos \tfrac{1}{2} (L_i + L_0) \sin \tfrac{1}{2} (L_i - L_0) \right. \\ & \quad\quad\quad\quad \left. + \left(\frac{u_i \sin 1''}{\sin u_i} - 1\right) \sin L_i \right] \cos L_0 \, \delta\alpha. \end{aligned} \right.$$

L'équation (11) servira au calcul de u_i : ayant obtenu ζ par la formule (12), on aura le moyen de calculer les coefficients des inconnues $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$, δL_0 et $\cos L_0 \delta\alpha$; mais ζ étant supposé assez petit, ainsi que les valeurs de $L_i - L_0$ et $\mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_0$, on pourra faire le plus souvent $\cos u_i = 1$, et réduire le coefficient de $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$ à $\sin(L_i - L_0)$: le terme en $\cos L_0 \delta\alpha$ disparaîtra dans le cas indiqué plus haut. Lors donc que l'on aura à discuter une chaîne méridienne ou un parallèle, il faudra tenter la résolution d'équations qui ne contiendront plus que deux inconnues, et dont les coefficients seront très-faciles à former. Si la résolution de ces équations conduit à des valeurs admissibles des inconnues, et que les erreurs des équations puissent se confondre avec celles des azimuts géodésiques provenant de l'accumulation des minimes erreurs des angles des triangles, on en conclura que la chaîne considérée peut être employée utilement : dans le cas contraire, elle devra être rejetée comme entachée d'erreurs.

Admettant qu'on ait soumis à ce genre de contrôle toutes les chaînes d'une triangulation, on emploiera celles qui auront été jugées admissibles à la détermination des valeurs les plus approchées des inconnues : alors, on fera de nouvelles applications de la formule (14), en introduisant le poids des équations, et fixant ce poids d'après les erreurs moyennes des angles des triangles intermédiaires. On voit, d'après la composition du coefficient de $\cos L_0 \delta\alpha$, que les stations qui contribueront le plus efficacement à la détermination de l'aplatissement, sont celles qui seront liées à la station centrale par des lignes géodésiques orientées à 45 degrés, ou environ. Si l'on veut utiliser un système formé d'un méridien et d'un parallèle, il faudra prendre pour point de départ la station la plus éloignée du point de croisement de ces chaînes.

Les trois inconnues étant tirées des équations, et ayant vérifié que les erreurs subsistantes restent renfermées dans des limites admissibles, on aura, suivant l'équation (13),

$$\delta Z_0 = \zeta - \sin L_0 \delta \mathfrak{L}_0. \tag{15}$$

On remarquera que si les chaînes n'embrassent pas une étendue déjà considérable, les coefficients des inconnues dans les équations (14) pourront n'être pas assez forts, pour assurer l'exacte détermination des inconnues : l'usage de ces équations serait restreint à la simple discussion ou au contrôle des chaînes. Cependant, on remarquera aussi que si l'on emploie les équations inexactes de la forme

$$\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i = \delta\mathfrak{L}_i \quad \text{ou} \quad L'_i - L_i = \delta L_i, \tag{16}$$

l'élimination de l'inconnue $\delta\beta - \delta\gamma$ pourra conduire à des systèmes d'équations à trois inconnues où les coefficients ne seront peut-être pas plus forts que ceux des équations (14) : en outre, on aurait l'inconvénient d'opérer sur des équations dont les parties connues seraient faussées par l'influence des attractions locales. On avisera suivant les cas.

Il faudra finalement recourir aux équations (16) pour obtenir l'inconnue restante ($\delta\beta - \delta\gamma$). La comparaison des valeurs corrigées des $\mathfrak{L}_i$ et L_i, avec les valeurs astronomiques correspondantes, fera connaître, aux erreurs près des observations, les effets des attractions locales suivant le premier vertical et suivant le méridien ; leurs composantes seront représentées respectivement par

$$\cos L_i (\mathfrak{L}'_i - \mathfrak{L}_i) \quad \text{et} \quad L'_i - L_i.$$

Nous terminerons en indiquant une dernière application de l'équation (14).

Les géographes sont dans l'usage de compenser une triangulation, en déterminant les corrections des angles des triangles de manière à satisfaire à un ensemble de conditions, dont l'une consiste à faire concorder les azimuts géodésiques avec les azimuts astronomiques. Comme ces corrections se font aux extrémités de parties de chaînes comprenant une faible amplitude, on pourrait assujettir les corrections à satisfaire à l'équation (14) dont le second membre serait égalé à zéro. Ce serait plus exact que de satisfaire seulement à la condition $Z'_i - Z_i = 0$.

Table des valeurs de la fonction $\dfrac{u \sin 1''}{\sin u} - 1$.

u	$\frac{u\sin 1''}{\sin u}-1$	DIFF.	u	$\frac{u\sin 1''}{\sin u}-1$	DIFF.	u	$\frac{u\sin 1''}{\sin u}-1$	DIFF.	u	$\frac{u\sin 1''}{\sin u}-1$	DIFF.
0° 0′	0,000 000	2	8° 0′	0,003 257	137	16° 0′	0,013 116	277	24° 0′	0,029 853	425
10	002	4	10	3 394	141	10	13 393	281	10	30 278	428
20	006	7	20	3 535	143	20	13 674	283	20	30 706	431
30	013	10	30	3 678	146	30	13 957	286	30	31 137	434
40	023	13	40	3 824	149	40	14 243	289	40	31 571	438
50	036	15	50	3 973	151	50	14 532	293	50	32 009	441
1. 0	0,000 051	18	9. 0	0,004 124	155	17. 0	0,014 825	295	25. 0	0,032 450	444
10	069	21	10	4 279	157	10	15 120	298	10	32 894	447
20	090	24	20	4 436	161	20	15 418	301	20	33 341	451
30	114	27	30	4 597	163	30	15 719	304	30	33 792	453
40	141	30	40	4 760	166	40	16 023	307	40	34 245	458
50	171	32	50	4 926	169	50	16 330	311	50	34 703	460
2. 0	0,000 203	35	10. 0	0,005 095	172	18. 0	0,016 641	313	26. 0	0,035 163	464
10	238	38	10	5 267	175	10	16 954	317	10	35 627	466
20	276	41	20	5 442	178	20	17 271	319	20	36 093	470
30	317	44	30	5 620	180	30	17 590	322	30	36 563	474
40	361	47	40	5 800	184	40	17 912	326	40	37 037	476
50	408	49	50	5 984	186	50	18 238	328	50	37 513	480
3. 0	0,000 457	52	11. 0	0,006 170	189	19. 0	0,018 566	331	27. 0	0,037 993	483
10	509	55	10	6 359	192	10	18 897	335	10	38 476	486
20	564	58	20	6 551	195	20	19 232	337	20	38 962	490
30	622	61	30	6 746	197	30	19 569	341	30	39 452	493
40	683	64	40	6 943	201	40	19 910	343	40	39 945	496
50	747	66	50	7 144	204	50	20 253	347	50	40 441	500
4. 0	0,000 813	69	12. 0	0,007 348	207	20. 0	0,020 600	350	28. 0	0,040 941	503
10	0 882	72	10	7 555	209	10	20 950	353	10	41 444	506
20	0 954	75	20	7 764	212	20	21 303	355	20	41 950	510
30	1 029	78	30	7 976	216	30	21 658	359	30	42 460	513
40	1 107	80	40	8 192	218	40	22 017	363	40	42 973	516
50	1 187	83	50	8 410	221	50	22 380	365	50	43 489	520
5. 0	0,001 270	86	13. 0	0,008 631	224	21. 0	0,022 745	368	29. 0	0,044 009	523
10	1 356	89	10	8 855	227	10	23 113	372	10	44 532	526
20	1 445	92	20	9 082	230	20	23 485	374	20	45 058	530
30	1 537	94	30	9 312	233	30	23 859	378	30	45 588	533
40	1 631	98	40	9 545	236	40	24 237	381	40	46 121	537
50	1 729	100	50	9 781	239	50	24 618	384	50	46 658	540
6. 0	0,001 829	103	14. 0	0,010 020	242	22. 0	0,025 002	387	30. 0	0,047 198	543
10	1 932	106	10	10 262	245	10	25 389	390	10	47 741	547
20	2 038	110	20	10 507	247	20	25 779	393	20	48 288	550
30	2 148	112	30	10 754	251	30	26 172	397	30	48 838	553
40	2 260	115	40	11 005	254	40	26 569	399	40	49 391	557
50	2 375	117	50	11 259	256	50	26 968	403	50	49 948	561
7. 0	0,002 492	120	15. 0	0,011 515	259	23. 0	0,027 371	406	31. 0	0,050 509	564
10	2 612	123	10	11 774	263	10	27 777	409	10	51 073	567
20	2 735	126	20	12 037	265	20	28 186	412	20	51 640	571
30	2 861	129	30	12 302	268	30	28 598	415	30	52 211	574
40	2 990	132	40	12 570	272	40	29 013	418	40	52 785	578
50	3 122	135	50	12 842	274	50	29 431	422	50	53 363	581
8. 0	0,003 257	137	16. 0	0,013 116	277	24. 0	0,029 853	425	32. 0	0,053 944	

Application spéciale du théorème sur les attractions locales, à la discussion du parallèle de Paris et de la partie de la méridienne de Dunkerque comprise entre Paris et Carcassonne.

Nous présenterons ici l'application la plus étendue qu'il nous soit actuellement possible de faire de notre théorème aux données de l'astronomie et de la géodésie. Ces données sont relatives aux longitudes et aux azimuts : or les longitudes n'ont été encore déterminées au moyen de l'électricité, sur une large échelle, que dans notre pays. (On commence seulement, depuis un an, à faire la même application de l'électricité aux triangles de l'Inde.)

En France, les azimuts n'ont pu être mesurés qu'en un nombre très-restreint de stations, la disparition des bornes géodésiques et les dispositions du terrain ayant rendu ces mesures impossibles dans les autres stations.

Au surplus, nous présenterons dans le tableau suivant l'ensemble des déterminations astronomiques obtenues par l'Observatoire de Paris et le résultat de leur comparaison avec les coordonnées et azimuts géodésiques publiés par le Dépôt de la Guerre, et corrigés au besoin, pour les ramener à une mesure commune. Le calcul de ces corrections a été présenté dans le Mémoire cité plus haut.

Comparaison des longitudes, latitudes et azimuts astronomiques déterminés par l'Observatoire impérial de Paris, avec les coordonnées et azimuts géodésiques du Dépôt de la Guerre.

STATION.	LONGITUDE			LATITUDE			SIGNAL GÉODÉSIQUE observé.	AZIMUT			ANNÉE.
	astronomique.	géodés.	astron. —géodés.	astronomique.	géodés.	astron. —géodés.		astronomique.	géodés.	astron. —géodés.	
Brest (tour Saint-Louis)...	+6°.49'.37",4	42",5	— 5",1								1863
Brest (tour Saint-Louis)...				48°.23'.22",0	21",9	+0",1	Crozon.....	359°.53'.10",5	18",0	— 7",5	1864
Biarritz................	+3.53.37,2	32,4	+ 4,8	43.29. »	38,4						1863
Nantes..................	+3.53.12,6	18,1	— 5,5	47.13. »	7,8						1863
Marennes	+3.26.36,1	40,2	— 4,1	45.49. »	18,4						1864
Greenwich...............	+2.20. 9,5	18,9	— 9,4								1854
Greenwich...............				51.28.39,9	43,5	—3,6					
Havre...................	+2.13.39,6	45,0	— 5,4	49.29. »	16,3						1862
Dunkerque...............	—0. 2.17,5	22,7	+ 5,2	51. 2. 8,9	11,6	—2,7					1862
Paris (Observatoire).....	0. 0. 0,0	0,0	0,0	48.50.11,7	13,2	—1,5					
Saint-Martin-du-Tertre...	—0. 0 »	31,7		49. 6.33.9	36,2	—2,3	Panthéon...	—0. 6.52,4	54,2	+ 1,8	1866
Berry-Boüy..............	+0. 1.37,6	31,6	+ 6,0	47. 6. »	51,9						1856
Saligny-le-Vif...........	—0.25 »	50,2		47. 2.45,64	44,07	+1,6	Bourges..... Dun-le-Roi..	98 34.54,6 40. 0. 8,3	69,8 23,8	—15,2 —15,5	1865
Rodez...................	—0.14. 7,2	15,6	+ 8,4	44.21. 4,5	2,9	+1,6	Maillebiau..	239. 5.25,9	55,5	—29,6	1864
Carcassonne	—0. 0.42,0	47,0	+ 5,0	43.12.53,3	52,0	+1,3	Fanjeaux....	83.18.48,63	83,86	—35,2	1864
Lyon (Fourvières)	—2.29.15,9	10,3	— 5,6	45.45.46,3	43,6	+2,7					1865
Talmay, par le parallèle de..... Paris... Bourges.	—3. 5.48,24	57,88 58,48	+ 9,6 +10,2	47.21.24,7	24,9 24,2	—0,2 +0,5	Mont-Roland.	353.16. »	—0,65 20,06		1863
Strasbourg (Munster).....	—5.24.45,7	53,8	+ 8,1	48,34.55,9	56,6	—0,7	Donon.....	80. 7.48,6	50,3	—1,7	1863

Les observations faites à Dunkerque, Saligny-le-Vif, Rodez, Carcassonne, Lyon, Talmay, Strasbourg, Saint-Martin-du-Tertre, ainsi que la latitude et l'azimut de Brest, sont dues à M. Yvon Villarceau

Les stations dont les longitudes ont été obtenues, en même temps qu'on y a mesuré des azimuts, appartiennent exclusivement au parallèle de Paris et à la méridienne de Dunkerque, dont la station de Paris occupe le point de croisement. Encore devons-nous faire remarquer, relativement à Paris et Bourges, que les mesures d'azimut n'ont pas été effectuées aux stations mêmes dont on a mesuré la longitude. Relativement à Paris, c'est de Saint-Martin-du-Tertre que l'azimut a été observé. Quant à Bourges, on a déterminé la longitude à Berry-Boüy, et l'azimut à Saligny-le-Vif, stations séparées de Bourges par un côté de triangle. En supposant donc les observations ramenées à Paris d'une part, et à une position intermédiaire entre Berry-Boüy et Saligny-le-Vif, pour Bourges, d'autre part, on ne négligera guère que les variations des attractions locales; ce qui ne peut produire, dans la discussion à laquelle nous allons nous livrer, que des erreurs peu sensibles.

Le point de départ des calculs géodésiques est Paris; or la longitude géodésique y ayant été prise égale à la longitude astronomique, la quantité ζ, équation (12), se réduit à $Z'_0 - Z_0$: d'après ce qui vient d'être dit, nous prendrons pour valeur de $Z'_0 - Z_0$ l'excès de l'azimut observé à Saint-Martin-du-Tertre sur l'azimut géodésique, excès égal à $+1'',8$. On aura donc

$$\zeta = +1'',8.$$

A l'aide des nombres que fournit le tableau précédent et de la valeur de ζ, nous allons former les équations de condition suivant la formule (14) : seulement, nous y supprimerons le terme en $\delta\alpha$. En effet, considérons des valeurs de α telles que $1:308,64 = 0,00324$ et $1:285 = 0,00351$, dont la première a été employée par le Dépôt de la Guerre, et la seconde est, suivant toute probabilité, supérieure à l'aplatissement réel; $\delta\alpha$ sera un nombre moindre que $0,0003$: il est facile de s'assurer qu'en négligeant le terme en $\delta\alpha$, l'erreur commise n'excédera en aucun point $0'',02$ à $0'',03$, quantités négligeables quand on s'arrête aux dixièmes de seconde.

Équations de condition indépendantes des effets des attractions locales.

Paris	à Brest.	$-13'',1=$	$-0,0043\cos L_0\delta\mathcal{L}_0$	$-0,0789\,\delta L_0$
	à Strasbourg. ...	$+2,5=$	$-0,0022$	$+0,0624$
	à Bourges.......	$-12,8=$	$-0,0308$	$+0,0024$
	à Rodez........	$-25,6=$	$-0,0782$	$+0,0030$
	à Carcassonne. ..	$-33,6=$	$-0,0980$	$+0,0002$

A la simple inspection de ces équations, on aperçoit que des corrections tout à fait improbables de 100″ laisseraient encore des erreurs hors de proportion avec celles des observations, en exceptant toutefois l'équation qui se rapporte à la station de Strasbourg.

On en conclut que la seule partie de ces deux chaînes où ne se révèle aucune erreur sensible est la partie orientale du parallèle de Paris, et que la partie occidentale du même parallèle, ainsi que la partie considérée de la méridienne de Dunkerque, sont affectées d'erreurs inadmissibles [*].

Néanmoins, poursuivons la résolution des équations, comme si l'on pouvait compter, au moins approximativement, sur la valeur des inconnues.

On déduit d'abord des équations précédentes

$$\cos L_0\delta\mathcal{L}_0 = +341'' + 0,0197\,\delta L_0,$$

et la substitution de cette valeur dans les mêmes équations conduit aux suivantes :

Brest...........	$-11'',5=$	$-0,0790\,\delta L_0$
Strasbourg.......	$+3,2=$	$+0,0624$
Bourges.........	$-2,3=$	$+0,0018$
Rodez...........	$+1,1=$	$+0,0015$
Carcassonne......	$-0,2=$	$-0,0017$

[*] Les erreurs admissibles peuvent, d'après les erreurs des sommes des angles des triangles, être évaluées à 2″ à 3″ pour les trois premières équations, 3″ à 4″ pour la quatrième, 4″ à 5″ pour la dernière.

De celle-ci on tire

$$\delta L_0 = +109'' = +1'49,$$

et les erreurs que laissent les équations se réduisent à

$$-2'',9, \quad -3'',6, \quad -2'',5, \quad +0'',9, \quad -0'',4.$$

On trouve encore

$$\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0 = +343'';$$

d'où

$$\delta \mathfrak{L}_0 = +521'' = +8'41''.$$

Enfin l'équation (15) donne

$$\delta Z_0 = -391'' = -6'31''.$$

La valeur de $\cos L_0 \delta \mathfrak{L}_0$ représenterait, si elle était admissible, la composante des attractions locales à Paris, dans le sens perpendiculaire au méridien : sa valeur positive exprime que l'origine des longitudes géodésiques devrait être reportée à l'est de l'Observatoire de Paris : la valeur de δL_0 représenterait, à la correction près de la latitude astronomique, la composante des attractions locales dans le sens du méridien.

Hâtons-nous de déclarer que de telles valeurs ne se justifient par aucune analogie, et que leur absurdité montre précisément l'existence d'erreurs dans les parties déjà désignées des deux chaînes.

La possibilité de satisfaire numériquement aux équations précédentes, à de faibles erreurs près, semble indiquer que les erreurs dans la région comprise entre Paris et Carcassonne sont systématiques : c'est précisément pour mettre ce caractère en évidence que nous avons achevé la résolution.

En ne considérant que cette partie de la méridienne de Dunkerque, il n'était pas même nécessaire d'achever les calculs; car les équations qui ne contiennent plus que l'inconnue δL_0 sont satisfaites d'assez près, en prenant δL_0 quelconque entre des limites de $\pm 200''$.

On sait que Delambre, pour réaliser l'accord des bases de Melun et de Perpignan, a appliqué des corrections aux angles des triangles; mais ces corrections sont très-faibles et ne paraissent pas susceptibles de produire un accroissement bien considérable des erreurs systématiques de longitude et d'azimut.

Dans le Mémoire présenté le 2 mars 1866 à l'Académie des Sciences, nous n'avions pu affirmer l'existence des erreurs de la méridienne de Dunkerque qu'entre Paris et Bourges d'une part, et entre Rodez et Carcassonne d'autre part; c'est qu'alors nous avions été obligé de suppléer, par le moyen d'une combinaison peu satisfaisante, au manque d'un azimut sur lequel on pût compter à Paris. Aujourd'hui que l'azimut du Panthéon nous a permis d'opérer avec plus d'exactitude, non-seulement nos prévisions se trouvent confirmées, mais nous les complétons en prouvant que la partie de la méridienne comprise entre Bourges et Rodez est elle-même vicieuse.

Se refuser à cette conclusion, ce serait admettre que les attractions locales à Paris produisent, dans le sens perpendiculaire au méridien, des écarts excédant plusieurs minutes. Rappelons d'ailleurs que la discordance actuelle des bases de Melun et de Perpignan prouve suffisamment l'existence de fortes erreurs dans la méridienne de Dunkerque. La rectification de ces erreurs amènera sûrement une réduction considérable dans les valeurs des corrections $\delta\mathcal{L}_0$, δZ_0 et δL_0.

Pour mettre hors de doute l'exactitude de la partie orientale du parallèle de Paris déjà rendue probable d'ailleurs par la concordance des bases de Melun et d'Ensisheim, il suffirait de déterminer la longitude et l'azimut en un point choisi au croisement de ce parallèle avec la méridienne de Sedan.

Si l'on veut circonscrire l'erreur qui paraît exister dans la partie occidentale du parallèle de Paris, on devra semblablement déterminer la longitude et l'azimut en un point pris au croisement du parallèle avec la méridienne de Bayeux. Ce travail serait d'autant plus intéressant que l'exactitude du parallèle entier est considérée comme établie par le degré de concordance des bases de Plouescat et d'Ensisheim. Enfin ce même parallèle offre un intérêt particulier, en ce qu'il est peut-être la seule chaîne de triangles où les observations des angles aient été faites pendant la nuit.

Il a sans doute été très-convenable d'interrompre le cours de nos déterminations astronomiques, pour examiner les conséquences que l'on pouvait tirer de leur comparaison avec les déterminations géodésiques. Cette étude nous a effectivement conduit aux résultats qui viennent d'être présentés. Or, ces mêmes résultats nous paraissent indiquer très-clairement la marche à suivre pour contrôler les diverses chaînes de notre triangulation. Chaque nouvelle station choisie sur un méridien ou un parallèle comprenant déjà une autre station astronomique, nous permettra de prononcer sur l'existence d'erreurs dans la partie de chaîne comprise entre les deux stations, et l'on arrivera ainsi à contrôler sûrement l'exactitude des chaînes principales et à indiquer par suite les portions qui auraient besoin d'être recommencées.

Il est urgent qu'on prenne un parti à cet égard; car les repères ou bornes géodésiques disparaissent de jour en jour, et si l'on tarde trop, on se verra dans l'obligation de recommencer des opérations géodésiques que l'on trouverait peut-être irréprochables, si la conservation des repères permettait d'en constater l'exactitude.