JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme à cinq indéterminées $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 12 (1867), p. 47-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1867_2_12__47_0>

SUR LA FORME A CINQ INDÉTERMINÉES

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5\,;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

Nous reproduisons, sans y rien changer, la Note ci-après, insérée dans les *Comptes rendus* de notre Académie (séance du 26 mars 1866). Le lecteur suppléera à la démonstration, qu'il nous paraît inutile d'ajouter pour le moment.

« La fonction numérique qui exprime la somme des puissances de degré μ des diviseurs d'un entier quelconque n, fonction que j'ai coutume de désigner par $\zeta_\mu(n)$, se présente utilement dans la recherche du nombre des représentations de n par certaines formes quadratiques. Mais il n'y a guère que le cas d'un indice μ impair qui ait donné lieu jusqu'ici à de belles applications. Le cas de μ pair a été peu étudié. On me saura donc gré peut-être d'indiquer un exemple où devront être employées à la fois la fonction $\zeta_0(n)$ ou $\zeta(n)$ qui exprime le nombre des diviseurs de n et la fonction $\zeta_2(n)$ qui exprime la somme des carrés de ces diviseurs. Il s'agit cette fois d'une forme à cinq variables, savoir

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5.$$

Comme cette forme est indéfinie, je limite les valeurs des indéterminées en exigeant que x_1, x_2, x_4, x_5 soient des entiers positifs; quant à l'entier x_3, il sera positif ou égal à zéro. Cela posé, on demande une expression simple du nombre N des représentations de n sous la forme citée. En d'autres termes, on demande une expression simple du nombre N des solutions que l'équation indéterminée

$$n = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_5$$

comporte sous la condition de

$$x_1,\ x_2,\ x_4,\ x_5 > 0, \quad x_3 \geqq 0.$$

Or, je réponds à cette question par la formule suivante,

$$\mathrm{N} = \zeta_2(n) - n\zeta(n),$$

qui ne laisse, ce me semble, rien à désirer. Pour $n = 1$, comme la valeur commune de $\zeta(1)$ et $\zeta_2(1)$ est l'unité, cette formule donne $\mathrm{N} = 0$, résultat évidemment exact. Dans tout autre cas, N est > 0. Quand n est premier, on a

$$\zeta(n) = 2, \quad \zeta_2(n) = n^2 + 1;$$

ainsi alors

$$\mathrm{N} = (n-1)^2. \text{ »}$$