JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Mémoire sur la dispersion de la lumière

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 49-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__49_0>

MÉMOIRE

SUR

LA DISPERSION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

INTRODUCTION.

Dans ce Mémoire, nous nous proposons d'étudier le mode de propagation du mouvement dans l'éther qui est renfermé dans les corps transparents, et de donner la théorie de la double réfraction de la lumière, en tenant compte de la dispersion.

Nous allons expliquer en quoi consiste ce travail.

Poisson ayant considéré un corps solide homogène comme formé d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance, trouva pour la représentation du mouvement vibratoire de ce corps, rapporté à trois axes rectangulaires, trois équations que l'on peut écrire sous la forme :

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 H}{du^2}\xi + \frac{d^2 H}{du\,dv}\eta + \frac{d^2 H}{du\,dw}\zeta &= \frac{d^2\xi}{dt^2},\\ \frac{d^2 H}{du\,dv}\xi + \frac{d^2 H}{dv^2}\eta + \frac{d^2 H}{dv\,dw}\zeta &= \frac{d^2\eta}{dt^2},\\ \frac{d^2 H}{du\,dw}\xi + \frac{d^2 H}{dv\,dw}\eta + \frac{d^2 H}{dw^2}\zeta &= \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ étant les projections de la vibration, t le temps, et H la fonction la plus générale du quatrième degré de u, v, w; après quoi, il faut imaginer que u, v, w y désignent les signes de différentiation $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ qui se rapportent à ξ, η, ζ.

Les équations (a) ne renferment que les dérivées du second ordre des composantes ξ, η, ζ de la vibration; il en résulte que la vitesse de propagation du mouvement ne dépend pas de la durée de la vibration, et effectivement pour l'explication des faits de l'acoustique, il n'y a pas lieu de se préoccuper de la différence de vitesse qui en provient. Cependant, si l'on tient compte des dérivées d'ordres supérieurs, et que l'on considère H comme pouvant renfermer non-seulement des termes du quatrième ordre, mais encore des termes d'ordres supérieurs, les équations (a) peuvent seulement représenter en toute rigueur le mouvement d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent suivant une fonction de leur distance. Cauchy les a écrites sous cette forme, et supposant que l'éther peut être assimilé au système de molécules précité, il put avoir égard à la différence de vitesse des ondes lumineuses résultant de la différence de la durée de la vibration, et exposer dans ses *Mémoires de Prague* une explication de la dispersion de la lumière.

Toutefois, comme en se bornant aux dérivées du second ordre, les équations (a) ne sauraient donner en général même approximativement les lois du mouvement de l'éther, à plus forte raison Cauchy ne put calculer dans tous les cas la dispersion de la lumière, mais il lui fut permis de les appliquer au cas particulier d'un corps isotrope, c'est-à-dire dont l'élasticité est la même dans toutes les directions autour d'un même point.

A la vérité, dans ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* et dans ses *Exercices de Prague*, Cauchy a ajouté aux premiers membres des équations (a), respectivement les expressions

$$(d) \qquad G\xi, \quad G\eta, \quad G\zeta,$$

G étant un polynôme en u, v, w; et on a essayé avec ces nouveaux termes d'appliquer les équations (a) à la représentation des phénomènes de la lumière; mais il est aisé de voir que si l'on obtient des conclusions qui ne sont pas en contradiction évidente avec les résultats de l'expérience, cela tient uniquement à ce qu'on se donne *à priori* la surface de l'onde, et qu'on suppose qu'elle s'écarte très-peu d'une sphère.

D'ailleurs, tous les géomètres qui ont considéré un corps solide comme composé d'un système de molécules, qui s'attirent ou se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance, tels que Poisson, M. de Saint-Venant, etc., et Cauchy lui-même dans ses *Exercices de Mathématiques*, 1829, ont adopté les équations (a) sans l'addition des termes (d), et il n'y a pas plus de raison pour les introduire, quand on traite de la théorie de la lumière.

Reportons nous maintenant à un travail de M. Lamé. Après avoir établi les équations du mouvement vibratoire d'un corps solide, sans faire aucune hypothèse sur l'action de deux molécules, M. Lamé dans sa *Théorie de l'élasticité des corps solides*, les applique au mouvement de l'éther, en admettant comme Fresnel que l'éther ne change pas de densité, et il obtient ainsi par des considérations de pure analyse, jointes au principe d'Huyghens sur la réfraction des ondes, les lois de la double réfraction de la lumière. Les résultats sont en parfait accord avec ceux qui ont été obtenus d'une manière moins analytique par M. Neumann en modifiant la théorie de Fresnel; il trouve donc que l'onde qui se propage est l'onde de Fresnel, et que la vibration est parallèle au plan de polarisation [*].

Ce travail de M. Lamé est la base de notre Mémoire.

Si l'on suppose qu'un corps solide soit ébranlé dans toute la partie renfermée entre deux plans parallèles excessivement rapprochés, cet ébranlement se propagera dans les deux sens en trois ondes planes parallèles, qui ont des vitesses différentes, et sur chacune de ces ondes planes la direction de la vibration est constamment la même, mais elle varie d'une onde à l'autre. Ayant imaginé que ces trois directions

---

[*] En général, quand on expose un cours sur la théorie de la lumière, c'est au moment où l'on recherche l'intensité des rayons réfléchis et réfractés à la surface de séparation de deux corps isotropes, qu'on fait un choix entre la théorie de Fresnel, qui suppose la densité de l'éther variable d'un corps à l'autre, mais l'élasticité la même, et par suite la vibration perpendiculaire au plan de polarisation, et la théorie de Neumann et Mac-Cullagh* qui suppose la densité constante et l'élasticité variable, et par suite la vibration parallèle au plan de polarisation. Là, on peut donner une préférence à l'hypothèse de Neumann et Mac-Cullagh; mais ce n'est que dans l'étude de la double réfraction que tout doute doit disparaître.

* *Voir* leurs Mémoires dans ce Journal (1re série, t. VII).

soient rectangulaires, nous avons reconnu que les équations de l'élasticité pouvaient se mettre sous la forme

$$(b)\quad\begin{cases}\dfrac{d\Theta}{d(u^2)}\xi+\dfrac{d\Theta}{d(2uv)}\eta+\dfrac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta=\dfrac{d^2\xi}{dt^2},\\[2mm] \dfrac{d\Theta}{d(2uv)}\xi+\dfrac{d\Theta}{d(v^2)}\eta+\dfrac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta=\dfrac{d^2\eta}{dt^2},\\[2mm] \dfrac{d\Theta}{d(2uw)}\xi+\dfrac{d\Theta}{d(2vw)}\eta+\dfrac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta=\dfrac{d^2\zeta}{dt^2},\end{cases}$$

que nous allons expliquer. Θ représente la fonction la plus générale du second degré des six symboles u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, qui peut par conséquent s'écrire

$$\Theta=a(u^2)^2+b(v^2)^2+c(w^2)^2+d\,2uv.u^2 \\ +e\,2uw.v^2+fu^2.w^2+g(2uw)^2+\ldots,$$

et pour avoir les termes des équations (b), il faut prendre les dérivées de Θ par rapport aux six symboles u^2, v^2,..., $2uv$; ce qui donne, par exemple

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)}=2au^2+d\,2uv+fw^2+\ldots;$$

enfin, dès que ces dérivées sont obtenues, comme dans les équations (a), c'est u, v, w qu'il faut regarder comme des symboles, qui indiquent les signes de différentiation $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, $\frac{d}{dz}$ portant sur ξ, η, ζ.

Les équations (b), mais sans cette forme symbolique, ont été considérées par M. Kirchoff (*Journal de M. Borchardt*, t. LVI) comme représentant les équations les plus générales de l'élasticité d'un corps solide. Il s'appuie, pour le prouver, sur ce que chaque élément d'un corps ayant été déformé, puis étant revenu à sa première forme, il ne s'est créé aucun travail, ce qui a évidemment lieu, si la température de cet élément n'a pas changé.

Si on suppose que, dans l'état vibratoire, les molécules d'un corps solide sont sollicitées par des actions mutuelles fonctions de la distance, et de plus, soumises à des liaisons exprimables comme en mécanique par des équations $\Pi_1=0$, $\Pi_2=0$,..., entre les coordonnées des différentes molécules, les équations du mouvement vibratoire d'une de ces molécules, dont les coordonnées sont $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$ (a, b, c étant constants), seront de la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dV}{d\xi},\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{dV}{d\eta},\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{dV}{d\zeta},$$

analogue à celle des équations ordinaires de la mécanique analytique.

Il est aisé de voir que ξ, η, ζ étant excessivement petits, on devrait prendre pour V une fonction du second degré

$$A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2D\zeta\eta+2E\xi\zeta+2G\eta\xi,$$

et que, par suite, les trois vibrations correspondant à une même onde plane seraient rectangulaires; on en conclurait donc encore les équations (b).

Si nous enlevons à Θ son caractère symbolique, de manière à remplacer par exemple le terme $a(u^2)^2$ par au^4 et la somme des deux termes $fu^2.w^2+g(2uw)^2$ par un seul $(f+4g)u^2w^2$, nous aurons une fonction F, et si nous y considérons u, v, w comme des coordonnées rectangles,

$$F=1$$

sera l'équation d'une surface que nous appelons *surface indicatrice*.

Lorsque cette surface représente une sphère

$$a(u^2+v^2+w^2)^2=1,$$

les équations (b) donnent le mouvement de l'éther enfermé dans les corps cristallisés.

Mais les équations du mouvement vibratoire étant mises sous la forme (b), il suffit pour calculer les phénomènes lumineux avec plus d'exactitude, et avoir égard à la variation de la vitesse de propagation avec la durée de la vibration, de prendre dans Θ non-seulement des termes du second degré en u^2, v^2, w^2,..., $2uv$, mais encore tous les termes de degrés supérieurs.

Pour que les équations (b) ainsi entendues soient susceptibles d'être la représentation d'un phénomène physique, il faut que l'existence de ces équations, relativement à un système d'axes adopté, entraîne les mêmes équations pour tout autre système de coordonnées rectangles. Ainsi les équations (a) jouissent de cette propriété, et nous démontrons qu'elle appartient également au système des équations (b).

Nous prouvons ensuite que les équations (b) renferment, comme cas particulier les équations (a), lorsqu'il n'entre dans celles-ci que des dérivées d'ordre pair. Cette propriété est curieuse en soi; mais il résulte aussi de là, que si le mouvement de l'éther était donné par les équations (a), en adoptant les équations (b) plus générales pour représenter ce mouvement, une étude intelligente des faits ramènerait bientôt aux premières; ce qui n'a pas lieu.

Enfin, dans le cas où le corps est isotrope, nos équations coïncident avec celles de Cauchy, de sorte que la loi qu'il a trouvée pour la dispersion dans ces corps, et qui a été confirmée par l'expérience, est aussi une conséquence de notre méthode.

On voit, d'après cela, combien notre induction est fondée; mais au surplus, nous montrerons quelle action élémentaire on peut imaginer entre deux molécules, pour que le mouvement vibratoire soit représenté par nos formules.

Pour que les équations (b) expriment un mouvement susceptible de se propager sans changement de densité, il faut et il suffit qu'en ôtant à la fonction Θ son caractère symbolique, elle se réduise à une fonction de $u + v^2 + w^2$; alors elles ont la dernière forme qu'on doit leur donner pour qu'elles représentent l'état vibratoire de l'éther.

La polarisation rotatoire, que l'on observe dans certains corps, comme le savait Fresnel, dépend des dérivées d'ordres impairs, et principalement de celles du troisième ordre; pour ces corps, il y aurait donc à ajouter des termes d'ordres impairs aux premiers membres des équations (b).

On pourait peut-être, au premier abord, penser que les équations de Cauchy ont sur ce point un certain avantage sur les nôtres, puisqu'elles renferment des termes d'ordres impairs; mais c'est le contraire.

En effet, il existe des liquides et des solides sans formes cristallines, qui jouissent du pouvoir rotatoire, et si, cherchant à appliquer les équations (a) à ces corps, on exprime que pour tout autre système de coordonnées ces formules restent telles qu'elles sont, c'est-à-dire que

H garde les mêmes coefficients, on trouve que H est une fonction rationnelle de $u^2+v^2+w^2$, et ne renferme pas par conséquent de termes d'ordres impairs, et les équations (a), pour lesquelles on s'attend à ce qu'elles donnent la polarisation rotatoire, n'en sont pas plus capables que les équations (b).

Nous terminons ce Mémoire par le développement complet des calculs relatifs à la dispersion de la lumière dans les cristaux uniaxes, en nous bornant aux termes du quatrième ordre, et nous établirons des formules déjà données, mais sans démonstration, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 28 novembre 1864.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Soient ξ, η, ζ les projections du déplacement d'une molécule d'un corps solide vibrant sur trois axes de coordonnées rectangulaires, et N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 les composantes des forces élastiques agissant sur trois plans parallèles aux plans de coordonnées au point considéré. Les équations du mouvement vibratoire sont (*Théorie de l'élasticité* de M. Lamé, 2e leçon)

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}&=\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ \frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}&=\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ \frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}&=\frac{d^2\zeta}{dt^2},\end{aligned}\right.$$

en prenant pour unité la densité du corps.

Les valeurs des N_i, T_i sont données (3e leçon) par les formules

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} N_i&=A_i\frac{d\xi}{dx}+B_i\frac{d\eta}{dy}+C_i\frac{d\zeta}{dz}+D_i\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\\ &\quad+E_i\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)+F_i\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right).\\ T_i&=\mathcal{A}_i\frac{d\xi}{dx}+\mathcal{B}_i\frac{d\eta}{dy}+\mathcal{C}_i\frac{d\zeta}{dz}+\mathcal{D}_i\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\\ &\quad+\mathcal{E}_i\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)+\mathcal{F}_i\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),\end{aligned}\right.$$

où l'on doit faire successivement i égale à 1, 2, 3.

Posons, comme *Cauchy*,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \varphi_1(\alpha,\beta,\gamma,t)\, e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \\ \eta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \varphi_2(\alpha,\beta,\gamma,t)\, e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \\ \zeta &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \varphi_3(\alpha,\beta,\gamma,t)\, e^{u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, du\, dv\, dw, \end{aligned}\right.$$

les intégrales étant prises depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, et nous supposons

$$u = \mathrm{U}\sqrt{-1}, \quad v = \mathrm{V}\sqrt{-1}, \quad w = \mathrm{W}\sqrt{-1}, \quad s = \mathrm{S}\sqrt{-1},$$

U, V, W, S étant réels. Substituons ces expressions dans les équations (1), après avoir remplacé $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \ldots, \mathrm{T}_3$ par leurs valeurs (2), et supprimant le signe intégral, qui porte sur tous les termes des équations, nous aurons trois équations de la forme suivante :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= -\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \mathrm{L}_1\varphi_1 + \mathrm{M}_1\varphi_2 + \mathrm{P}_1\varphi_3. \\ 0 &= -\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \mathrm{L}_2\varphi_1 + \mathrm{M}_2\varphi_2 + \mathrm{P}_2\varphi_3, \\ 0 &= -\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + \mathrm{L}_3\varphi_1 + \mathrm{M}_3\varphi_2 + \mathrm{P}_3\varphi_3; \end{aligned}\right.$$

pour abréger, nous n'écrivons pas les polynômes homogènes du second degré, en u, v, w, que représentent $\mathrm{L}, \mathrm{M}_2, \ldots, \mathrm{P}_3$.

Multiplions les équations (4) par A, B, C, et posons

$$(a)\quad \mathrm{A}\varphi_1 + \mathrm{B}\varphi_2 + \mathrm{C}\varphi_3 = \theta,$$

nous aurons, en les ajoutant,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = s^2\theta,$$

à la condition de déterminer A, B, C par les équations

$$\frac{\mathrm{L}_1\mathrm{A} + \mathrm{M}_1\mathrm{B} + \mathrm{P}_1\mathrm{C}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{L}_2\mathrm{A} + \mathrm{M}_2\mathrm{B} + \mathrm{P}_2\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{L}_3\mathrm{A} + \mathrm{M}_3\mathrm{B} + \mathrm{P}_3\mathrm{C}}{\mathrm{C}} = s^2$$

qui peuvent encore s'écrire

$$
(5) \qquad \begin{cases} (L_1 - s^2) A + M_1 B + P_1 C = 0, \\ L_2 A + (M_2 - s^2) B + P_2 C = 0, \\ L_3 A + M_3 B + (P_3 - s^2) C = 0, \end{cases}
$$

et en éliminant A, B, C entre ces trois équations, nous aurons une équation qui sera du troisième degré en s^2, et du sixième degré en u, v, w, et que nous représenterons par

$$
(6) \qquad F(u, v, w, s) = 0.
$$

L'équation (6) donne trois valeurs pour s^2, les équations (5) trois systèmes de valeurs pour A, B, C; θ a aussi trois valeurs correspondantes, et on a trois équations telles que (a), qui déterminent $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Considérons le cas où A, B, C sont proportionnels aux cosinus des angles que font avec les axes coordonnés, les axes d'une surface du second degré, dont les inverses sont donnés par les racines s de l'équation (6). Nous avons alors

$$
(b) \qquad M_1 = L_2, \quad P_1 = L_3, \quad M_3 = P_2;
$$

et si on a écrit les valeurs de $L_1, M_2, \ldots, P_3$, on reconnaît que les trente-six coefficients A_i, $B_i, \ldots$, $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i, \ldots$ se réduisent à vingt et un, et l'on trouve en employant de nouvelles lettres pour représenter ces vingt et un coefficients

$$
(7) \qquad \begin{cases} L_1 = au^2 + c_1 v^2 + b_1 w^2 + 2 f_1 vw + 2 h_1 uw + 2 k_1 uv, \\ M_2 = c_1 u^2 + bv^2 + a_1 w^2 + 2 g_2 vw + 2 e_1 uw + 2 k_2 uv, \\ P_3 = b_1 u^2 + a_1 v^2 + cw^2 + 2 g_3 vw + 2 h_3 uw + 2 d_1 uv, \\ P_2 = f_1 u^2 + g_2 v^2 + g_3 w^2 + (f + a_1) vw + (k_3 + d_1) uw + (e_1 + h_2) uv, \\ P_1 = h_1 u^2 + e_1 v^2 + h_3 w^2 + (k_3 + d_1) vw + (e + b_1) uw + (g_1 + f_1) uv, \\ M_1 = k_1 u^2 + k_2 v^2 + d_1 w^2 + (e_1 + h_2) vw + (g_1 + f_1) uw + (d + c_1) uv. \end{cases}
$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{d\xi}{dx} = \delta_x, \quad \frac{d\eta}{dy} = \delta_y, \quad \frac{d\zeta}{dz} = \delta_z,$$

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \mu_{xy}, \quad \frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx} = \mu_{xz}, \quad \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \mu_{yz},$$

et les valeurs (2) de $N_1, N_2, \ldots, T_3$ deviennent

$$\begin{cases} N_1 = a\delta_x + d\delta_y + e\delta_z + g_1\mu_{yz} + h_1\mu_{xz} + k_1\mu_{xy}, \\ N_2 = d\delta_x + b\delta_y + f\delta_z + g_2\mu_{yz} + h_2\mu_{xz} + k_2\mu_{xy}, \\ N_3 = e\delta_x + f\delta_y + c\delta_z + g_3\mu_{yz} + h_3\mu_{xz} + k_3\mu_{xy}, \\ T_1 = g_1\delta_x + g_2\delta_y + g_3\delta_z + a_1\mu_{yz} + d_1\mu_{xz} + e_1\mu_{xy}, \\ T_2 = h_1\delta_x + h_2\delta_y + h_3\delta_z + d_1\mu_{yz} + b_1\mu_{xz} + f_1\mu_{xy}, \\ T_3 = k_1\delta_x + k_2\delta_y + k_3\delta_z + e_1\mu_{yz} + f_1\mu_{xz} + c_1\mu_{xy}. \end{cases}$$

2. Si nous supposons le mouvement *simple*, les projections du déplacement d'une molécule au lieu d'être données par les formules (3), seront fournies par les parties réelles des expressions

$$(8)\quad \xi = Ae^{ux+vy+wz-st}, \quad \eta = Be^{ux+vy+wz-st}, \quad \zeta = Ce^{ux+vy+wz-st},$$

où l'on prend

$$u = U\sqrt{-1}, \quad v = V\sqrt{-1}, \quad w = W\sqrt{-1}, \quad s = S\sqrt{-1},$$

U, V, W, S étant réels. Toutes les molécules situées dans un plan parallèle à

$$(c)\qquad ux + vy + wz = 0,$$

ont le même mouvement, et un ébranlement situé sur le plan (c) à l'instant initial, se propagera en une onde plane, et sera au bout du temps t sur le plan

$$(d)\qquad ux + vy + wz = st,$$

s étant donné par l'équation (6). A, B, C auront trois systèmes de valeurs résultant des formules (5), et si l'on admet les réductions (b), les trois vibrations correspondant à une même onde plane sont rectangulaires entre elles. $\frac{s}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$ représente la vitesse de l'onde plane (d), et puisque u, v, w, s sont liés entre eux par l'équation (6)

$$(e) \qquad \mathrm{F}(u, v, w, s) = 0,$$

on obtiendra la *surface de l'onde*, qui est l'enveloppe du plan (d), en éliminant u, v, w, s entre les équations (d), (e) et

$$(f) \qquad \frac{x}{\frac{d\mathrm{F}}{du}} = \frac{y}{\frac{d\mathrm{F}}{dv}} = \frac{z}{\frac{d\mathrm{F}}{dw}}.$$

Soit

$$(g) \qquad \mathfrak{F}(x, y, z) = 0,$$

l'équation de cette surface.

Le plan (d) est tangent à la surface de l'onde; donc u, v, w sont proportionnels aux cosinus des angles que fait le plan tangent à la surface (g) avec les plans de coordonnées, et l'on a

$$(h) \qquad \frac{u}{\frac{d\mathfrak{F}}{dx}} = \frac{v}{\frac{d\mathfrak{F}}{dy}} = \frac{w}{\frac{d\mathfrak{F}}{dz}};$$

donc si l'on élimine x, y, z entre les équations (d), (g), (h), on aura l'équation (e), et l'on voit que l'on peut déduire l'équation (e) de l'équation (g), comme on obtient la seconde au moyen de la première. Cette propriété est démontrée dans les *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* de Cauchy, t. II, p. 102.

Faisons une transformation de coordonnées donnée par les équations

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'. \end{cases}$$

De là, on déduit les formules symboliques

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d.}{dx'} &= m_1\frac{d.}{dx} + n_1\frac{d.}{dy} + p_1\frac{d.}{dz},\\
\frac{d.}{dy'} &= m_2\frac{d.}{dx} + n_2\frac{d.}{dy} + p_2\frac{d.}{dz},\\
\frac{d.}{dz'} &= m_3\frac{d.}{dx} + n_3\frac{d.}{dy} + p_3\frac{d.}{dz}\cdot
\end{aligned}\right.$$

et d'après les relations qui existent entre les cosinus $m_1, n_1, \ldots, p_3$, on a encore

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d.}{dx} &= m_1\frac{d.}{dx'} + m_2\frac{d.}{dy'} + m_3\frac{d.}{dz'},\\
\frac{d.}{dy} &= n_1\frac{d.}{dx'} + n_2\frac{d.}{dy'} + n_3\frac{d.}{dz'},\\
\frac{d.}{dz} &= p_1\frac{d.}{dx'} + p_2\frac{d.}{dy'} + p_3\frac{d.}{dz'}\cdot
\end{aligned}\right.$$

Si l'on représente les signes de différentiation $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$ par u, v, w, et de même $\frac{d}{dx'}, \frac{d}{dy'}, \frac{d}{dz'}$ par u', v', w', on aura les formules

$$\text{(B)}\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= m_1u' + m_2v' + m_3w',\\
v &= n_1u' + n_2v' + n_3w',\\
w &= p_1u' + p_2v' + p_3w',
\end{aligned}\right.$$

qui sont toutes semblables aux formules (A). D'après cette notation, les équations de l'élasticité peuvent s'écrire

$$\text{(C)}\qquad \left\{\begin{aligned}
L_1\xi + M_1\eta + P_1\zeta - \frac{d^2\xi}{dt^2} &= 0,\\
M_1\xi + M_2\eta + P_2\zeta - \frac{d^2\eta}{dt^2} &= 0,\\
P_1\xi + P_2\eta + P_3\zeta - \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

$L_1, M_1, \ldots, P_3$ étant les polynômes homogènes du second degré en u, v, w du numéro précédent, et u, v, w représenteront de véritables quantités dans le cas où le mouvement sera simple et donné par les formules (8).

D'après les formules (B), on voit qu'il est permis de simplifier l'équation (e) par une transformation de coordonnées, et que pour cela, il suffit de considérer u, v, w comme de véritables coordonnées.

3. On peut par un raisonnement fort simple reconnaître quel est en général le degré de la surface de l'onde.

Soit une surface du sixième degré

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0.$$

Si l'on se propose de mener à cette surface un plan tangent parallèle au plan $ux + vy + wz = 0$, on aura les équations

$$(2)\qquad \frac{u}{\frac{df}{dx}} = \frac{v}{\frac{df}{dy}} = \frac{w}{\frac{df}{dz}}.$$

et par conséquent les équations du cinquième degré en x, y, z

$$(3)\qquad u\frac{df}{dy} - v\frac{df}{dx} = 0,\quad u\frac{df}{dz} - w\frac{df}{dx} = 0;$$

on aura donc les coordonnées du point de contact au moyen des équations (1) et (3). En éliminant y et z par exemple, on aura une équation du degré $6 \times 5^2 = 150$ par rapport à x; et on en conclut qu'il y a cent cinquante plans tangents parallèles au plan donné.

Si, au lieu d'opérer de la sorte, on pose

$$(4)\qquad ux + vy + wz = s,$$

et si on élimine x, y, z entre les équations (1), (2) et (4), on obtient l'équation

$$(5)\qquad \mathfrak{F}(u, v, w, s) = 0.$$

$\frac{s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$ représente la distance de l'origine des coordonnées à l'un des cent cinquante plans tangents; s doit donc dépendre d'une équation du cent cinquantième degré. Or l'équation (5) est homogène, car (2) et (4) subsistant quand on remplace u, v, w, s par lu, lv, lw, ls, il en est de même de l'équation (5); elle est donc aussi du cent cinquantième degré par rapport à u, v, w.

Supposons ensuite que l'on reprenne l'équation

$$F(u, v, w, s) = 0 \tag{6}$$

du numéro précédent, qui, étant homogène, peut s'écrire

$$f\left(\frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}\right) = 0,$$

et que l'on recherche l'équation de la surface de l'onde, on aura les mêmes calculs que ci-dessus, et on trouvera pour cette surface l'équation

$$\mathfrak{F}(x, y, z, 1) = 0$$

qui est en général du cent cinquantième degré [*].

La surface de l'onde peut cependant être quelquefois d'un degré beaucoup moindre; ainsi, en particulier, il est possible que l'équation (6) ne soit que du quatrième degré, et la surface de l'onde est au plus du degré $4 \times 3^2 = 36$.

4. Rappelons que le mouvement vibratoire d'un corps solide est donné par les équations (C) du n° **2**, et écrivons la fonction symbo-

---

[*] A un certain point de vue, la surface de l'onde n'est pas plus compliquée que la surface (6) du sixième degré, u, v, w étant les coordonnées. En effet, si la surface de l'onde est rencontrée par une droite en cent cinquante points réels ou imaginaires, d'un autre côté elle n'a que six plans tangents réels ou imaginaires parallèles à un plan donné, et ces nombres sont à intervertir pour la surface du sixième degré. Par une considération semblable, on doit regarder comme plus simples ou plus remarquables les courbes des degrés troisième, quatrième, etc., quand leurs *réciproques* sont du même degré. [L'onde et la surface (6) sont dites *réciproques l'une de l'autre*.]

lique

$$\Theta = \frac{a}{2}(u^2)^2 + \frac{b}{2}(v^2)^2 + \frac{c}{2}(w^2)^2 + k_1 2uv.u^2 + k_2 2uv.v^2 + h_1 2uw.u^2$$
$$+ h_3 2uw.w^2 + g_2 2vw.v^2 + g_3 2vw.w^2 + c_1 u^2.v^2 + b_1 u^2.w^2$$
$$+ a_1 v^2.w^2 + f_1 2vw.u^2 + e_1 2uw.v^2 + d_1 2uv.w^2 + \frac{f+a_1}{4}(2vw)^2$$
$$+ \frac{e+b_1}{4}(2uw)^2 + \frac{d+c_1}{4}(2uv)^2 + \frac{k_3+d_1}{2} 2uw.2vw$$
$$+ \frac{e_1+h_2}{2} 2uv.2uw + \frac{g_1+f_1}{2} 2uv.2uw.$$

On obtiendra les quantités L_1, M_2, P_3, P_2, P_1, M_1 qui sont données par les formules (7) du n° **1**, en prenant les dérivées de Θ respectivement par rapport à u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2uw$, $2uv$.

Supposons que l'on fasse une transformation de coordonnées, indiquée par les formules

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x = m_1 x' + m_2 y' + m_3 z', \\ y = n_1 x' + n_2 y' + n_3 z', \\ z = p_1 x' + p_2 y' + p_3 z'; \end{cases}$$

alors tous les coefficients a, b, c, k_1,... seront dans les trois équations du mouvement changés respectivement en d'autres, que nous désignons par

$$a',\ b',\ c',\ k'_1,\ldots;$$

d'ailleurs u, v, w seront changés en u', v', w', et l'on a

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} u = m_1 u' + m_2 v' + m_3 w', \\ v = n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \\ w = p_1 u' + p_2 v' + p_3 w'; \end{cases}$$

on obtiendra donc les quantités L'_1, M'_2, P'_3, P'_2, P'_1, M'_1 qui remplaceront L_1, M_2, P_3, P_2, P_1, M_1 et se trouveront dans les équations

$$L'_1 \xi' + M'_1 \eta' + P'_1 \zeta' - \frac{d^2\xi'}{dt^2} = 0, \quad \ldots,$$

en prenant par rapport à u'^2, v'^2, w'^2, $2v'w'$, $2w'u'$, $2u'v'$ les dérivées de la fonction symbolique

$$\Theta' = \frac{a'}{2}(u'^2)^2 + \frac{b'}{2}(v'^2)^2 + \frac{c'}{2}(w'^2)^2 + k'_1\, 2u'v'.u'^2$$
$$+ k'_2\, 2u'v'.v'^2 + \ldots + \frac{g'_1 + f'_1}{2}\, 2u'v'\; 2u'w$$

Or, écrivons la fonction

$$\mathfrak{M} = \frac{a}{2}u^4 + \frac{b}{2}v^4 + \frac{c}{2}w^4 + 2k_1u^3v + 2k_2uv^3 + 2h_1u^3w + 2h_3uw^3$$
$$+ 2g_2v^3w + 2g_3vw^3 + (d + 2c_1)u^2v^2 + (e + 2b_1)u^2w^2$$
$$+ (j + 2a_1)v^2w^2 + 2(g_1 + 2f_1)u^2vw + 2(h_2 + 2e_1)v^2uw$$
$$+ 2(k_3 + 2d_1)w^2uv;$$

au caractère symbolique près, Θ est la même chose que $\mathfrak{M}$; donc, puisque la transformation de coordonnées que nous avons faite change Θ en Θ', cette même transformation change $\mathfrak{M}$ en

$$\mathfrak{M}' = \frac{a'}{2}u'^4 + \frac{b'}{2}v'^4 + \frac{c'}{2}w'^4 + 2k'_1u'^3v' + 2k'_2u'v'^3$$
$$+ \ldots + 2(k'_3 + 2d'_1)w'^2u'v'.$$

Enfin, nous déduisons de là, que cette transformation de coordonnées change le polynôme

$$F = ax^4 + by^4 + cz^4 + 4k_1x^3y + 4k_2xy^3 + 4h_1x^3z + 4h_3xz^3$$
$$+ 4g_2y^3z + 4g_3yz^3 + 2(d + 2c_1)x^2y^2 + 2(e + 2b_1)x^2z^2$$
$$+ 2(j + 2a_1)y^2z^2 + 4(g_1 + 2f_1)x^2yz + 4(h_2 + 2e_1)y^2xz$$
$$+ 4(k_3 + 2d_1)z^2xy,$$

qui se déduit de $\mathfrak{M}$ en le doublant et remplaçant u, v, w par x, y, z, en le polynôme

$$F' = a'x'^4 + b'y'^4 + c'z'^4 + \ldots.$$

Considérons les deux équations

$$F = 1 \quad \text{et} \quad F = 0,$$

qui représentent une surface du quatrième degré que nous appellerons *surface indicatrice*, et son cône asymptote, que nous appellerons le *cône indicateur;* il est aisé de voir qu'une transformation de coordonnées, qui simplifie l'équation du cône indicateur, simplifie ordinairement les équations du mouvement vibratoire.

Ce qui précède permet de déterminer les quinze quantités

$$a',\ b',\ c',\ k'_1,\ldots,\ k'_3 + 2d'_1$$

au moyen des quinze autres

$$a,\ b,\ c,\ k_1,\ldots,\ k_3 + 2d_1;$$

mais si on a en réalité à effectuer une transformation de coordonnées, il faut aussi connaître les six quantités a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1, f'_1, et pour cela, on observera qu'on déduit Θ' de Θ, en substituant dans le dernier pour u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$,

$$(\mathrm{E})\quad\left\{\begin{array}{l} u^2 = m_1^2 u'^2 + m_2^2 v'^2 + m_3^2 w'^2 + m_2 m_3 (2v'w') + m_3 m_1 (2w'u') \\ \qquad + m_1 m_2 (2u'v') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 2uv = 2m_1 n_1 u'^2 + 2m_2 n_2 v'^2 + 2m_3 n_3 w'^2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2)(2v'w') \\ \qquad + (m_3 n_1 + m_1 n_3)(2w'u') + (m_1 n_2 + m_2 n_1)(2u'v'), \end{array}\right.$$

et regardant u'^2, $v'^2,\ldots$, $2u'v'$ comme des signes indécomposables, de sorte que, par exemple, $2u'v'.2u'w'$ n'équivaut pas à $2u'^2.2v'w'$.

5. Étudions le cas où le corps possède un axe d'isotropie, c'est-à-dire un axe, tout autour duquel il possède la même élasticité; prenons-le pour axe des z. Il est évident que la surface indicatrice est de révolution, et que son équation peut s'écrire

$$\mathrm{A}(x^2 + y^2)^2 + 2\mathrm{B}(x^2 + y^2)z^2 + \mathrm{C}z^4 = 1,$$

ou

$$\mathrm{A}x^4 + \mathrm{A}y^4 + \mathrm{C}z^4 + 2\mathrm{A}x^2y^2 + 2\mathrm{B}x^2z^2 + 2\mathrm{B}y^2z^2 = 1;$$

et, en se reportant à l'expression de F, on en conclut

$$k_1 = k_2 = h_1 = h_3 = g_2 = g_3 = 0,\quad g_1 = -2f_1,\quad h_2 = -2e_1,\quad k_3 = -2d_1,$$
$$a = b = \mathrm{A},\quad d = \mathrm{A} - 2c_1,\quad c = \mathrm{C},\quad e = \mathrm{B} - 2b_1,\quad f = \mathrm{B} - 2a_1.$$

Mais la condition que nous venons d'exprimer n'est pas suffisante; car il faut, et cette condition renferme la première, que, lorsque l'on fera tourner autour de l'origine l'angle droit des x et y, Θ ne change pas de forme, j'entends que Θ' ait les mêmes coefficients que Θ. Nous savons qu'on passe de l'expression de Θ à celle de Θ' à l'aide des formules (E); mais comme ici, les expressions (B) se réduisent à

$$u = m_1 u' + m_2 v', \quad v = n_1 u' + n_2 v', \quad w' = w$$

avec

$$m_1 = n_2 = \cos\alpha, \quad m_2 = -n_1 = -\sin\alpha,$$

les expressions à substituer dans Θ sont

$$\begin{cases} u^2 = m_1^2 u'^2 + m_2^2 v'^2 + m_1 m_2 (2u'v'), \\ v^2 = n_1^2 u'^2 + n_2^2 v'^2 + n_1 n_2 (2u'v'), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2wv = n_1 (2u'w) + n_2 (2v'w), \\ 2uw = m_1 (2u'w) + m_2 (2v'w), \\ 2uv = 2m_1 n_1 u'^2 + 2m_2 n_2 v'^2 + (m_1 n_2 + n_1 m_2)(2u'v'). \end{cases}$$

De ce calcul, on conclura facilement les nouvelles relations

$$a_1 = b_1, \quad d_1 = e_1 = f_1 = 0.$$

Faisons ces réductions dans les expressions (7) de $L_1, M_2, \ldots, M_1$ du n° **1**, et portons-les dans les équations (C) du mouvement écrites au n° **2**; remplaçons aussi a_1, c_1 par α, γ, et nous aurons les formules

$$(D) \quad \begin{cases} (Au^2 + \gamma v^2 + \alpha w^2)\xi + (A - \gamma) uv\eta + (B - \alpha) uw\zeta - \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \\ (A - \gamma) uv\xi + (Av^2 + \alpha w^2 + \gamma u^2)\eta + (B - \alpha) vw\zeta - \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \\ (B - \alpha) uw\xi + (B - \alpha) vw\eta + (Cw^2 + \alpha u^2 + \alpha v^2)\zeta - \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Si nous supposons le mouvement simple, les projections du déplacement d'une molécule seront données par les parties réelles des expressions (8) du n° **2**, ou par

$$\xi = \mathcal{A} \cos(\mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z - \mathrm{S}t), \quad \eta = \mathcal{B} \cos(\mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z - \mathrm{S}t),$$
$$\zeta = \mathcal{C} \cos(\mathrm{U}x + \mathrm{V}y + \mathrm{W}z - \mathrm{S}t),$$

et dans les équations (D), u, v, w au lieu de représenter des signes de différentiation, représentent des quantités; nous pourrons en outre remplacer $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ par $s^2\xi$, $s^2\eta$, $s^2\zeta$.

D'après la nature du corps, tout restant le même dans un plan quelconque qui passe par l'axe des z, on peut, sans particulariser la question, prendre le plan $ux + vy + wz = 0$, perpendiculaire au plan des xz, ce qui revient à faire $v = 0$ dans les équations (D).

La deuxième devient

$$(\alpha w^2 + \gamma u^2 - s^2)\eta = 0,$$

et les deux autres

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{A}u^2 + \alpha w^2 - s^2)\xi + (\mathrm{B} - \alpha)uw\zeta = 0, \\ (\mathrm{B} - \alpha)uw\xi + (\mathrm{C}w^2 + \alpha u^2 - s^2)\zeta = 0. \end{array} \right.$$

On peut satisfaire à ces équations :

1° En posant $\xi = 0$, $\zeta = 0$,

$$(b) \quad \alpha w^2 + \gamma u^2 - s^2 = 0,$$

2° En posant $\eta = 0$,

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} s^4 - [(\mathrm{A} + \alpha)u^2 + (\mathrm{C} + \alpha)w^2]s^2 + \mathrm{A}\alpha u^4 + \mathrm{C}\alpha w^4 \\ \qquad + (\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 + 2\mathrm{B}\alpha)u^2w^2 = 0, \end{array} \right.$$

cette dernière provenant de l'élimination de $\frac{\xi}{\zeta}$ entre les équations (a).

La première solution donne une onde plane, dont la vitesse $\frac{s}{\sqrt{u^2 + w^2}}$ résulte de (b), et qui contient la vibration; la seconde deux ondes planes, dont les vibrations sont parallèles au plan des yz, et les vitesses de ces deux ondes résultent de l'équation (c).

Il est à noter que les équations (a) peuvent se mettre sous la forme

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{d(u^2)} - s^2\right)\xi + \frac{d\mathrm{T}}{d(2uw)}\zeta = 0, \quad \frac{d\mathrm{T}}{d(2uw)}\xi + \left(\frac{d\mathrm{T}}{d(w^2)} - s^2\right)\zeta = 0,$$

en prenant

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{A}}{2}(u^2)^2 + \frac{\mathrm{C}}{2}(w^2)^2 + \alpha u^2.w^2 + \frac{\mathrm{B}-\alpha}{2}(2uw)^2.$$

En éliminant ξ, η, ζ entre les équations (D), nous aurions eu une équation

$$\mathrm{F}(u, v, w, s) = 0,$$

et on sait par quelle méthode on peut en déduire l'équation de la surface de l'onde. Si on applique cette méthode aux équations (b) et (c), on se débarrasse d'une dimension, et il est aisé de voir qu'on obtient ainsi les méridiens des deux surfaces appartenant à l'onde, qui est de révolution autour de l'axe des z.

De l'équation (b), on déduit la courbe méridienne

$$\frac{x^2}{\gamma} + \frac{z^2}{\alpha} - 1 = 0,$$

et le raisonnement du n° **3** montre que l'équation (c) doit, pour la seconde courbe méridienne, conduire à une équation du degré $4 \times 3 = 12$. Toutefois, comme les cinq coefficients de l'équation (c) ne sont pas indépendants l'un de l'autre, on pourrait avoir quelque crainte que l'équation de l'onde fût d'un degré moindre. Ayant fait le calcul direct, qui est trop prolixe pour être reproduit, nous avons pu reconnaître que cette équation est effectivement du douzième degré.

On ne sera peut-être pas fâché de connaître l'équation de la surface de l'onde pour un cas particulier, relativement assez simple. Si l'on fait $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, $\gamma = \alpha$, on a pour l'équation (c)

$$s^4 - [\alpha(u^2 + w^2) + \mathrm{C}w^2]s^2 + \mathrm{C}\alpha w^4 = 0;$$

la seconde surface qui compose l'onde n'est plus que du huitième degré; on trouve en effet par un calcul qui n'offre pas de difficulté, que l'équation du méridien est, en posant $\frac{C}{\alpha} = D$,

$$\begin{aligned} 0 = z^8 &+ z^6(1+D)(4x^2-\alpha) \\ &+ z^4[(6+4D+6D^2)x^4 - (3+26D+3D^2)\alpha x^2 + D\alpha^2] \\ &+ z^2x^2[4(1-D-D^2+D^3)x^4 \\ &\qquad - (3+13D+13D^2+3D^3)\alpha x^2 + 20D\alpha^2(1+D)] \\ &+ x^2(x^2-\alpha)[(1-D)^2x^2+4D\alpha]^2. \end{aligned}$$

Cette équation se décompose dans le cas de $D = 1$, et devient

$$[z^4 + 8x^2z^2 + 16(x^4 - \alpha x^2)](z^2-\alpha)^2 = 0;$$

mais nous ne nous arrêterons pas davantage à cet exemple.

6. Occupons-nous maintenant du cas où la surface indicatrice est une sphère, et a pour équation

$$\alpha(x^2+y^2+z^2)^2 = 1$$

ou

$$\alpha(x^4+y^4+z^4+2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2) = 1.$$

D'après l'expression de F du n° **4**, on a les relations

$$a = b = c = \alpha, \quad k_1 = k_2 = h_1 = h_3 = g_2 = g_3 = 0,$$
$$d = \alpha - 2c_1, \quad e = \alpha - 2b_1, \quad f = \alpha - 2a_1, \quad g_1 = -2f_1, \quad h_2 = -2e_1,$$
$$k_3 = -2d_1.$$

Les expressions de L_1, M_2,..., M_1 du n° **1** deviennent

$$(D)\qquad \left\{\begin{aligned} L_1 &= \alpha u^2 + c_1v^2 + b_1w^2 + 2f_1vw, \\ M_2 &= c_1u^2 + \alpha v^2 + a_1w^2 + 2e_1uw, \\ P_3 &= b_1u^2 + a_1v^2 + \alpha w^2 + 2d_1uw, \\ P_2 &= f_1u^2 + (\alpha - a_1)vw - d_1uw - e_1uv, \\ P_1 &= e_1v^2 - d_1vw + (\alpha - b_1)uw - f_1uv, \\ M_1 &= d_1w^2 - e_1vw - f_1uw + (\alpha - c_1)uv. \end{aligned}\right.$$

Portons ces expressions dans les équations

$$L_1\xi + M_1\eta + P_1\zeta = s^2\xi, \quad M_1\xi + M_2\eta + P_2\zeta = s^2\eta,$$
$$P_1\xi + P_2\eta + P_3\zeta = s^2\zeta,$$

et nous obtiendrons trois formules, qu'on pourra transformer dans les suivantes :

$$(G)\quad \left\{\begin{aligned} &(d_1 w - e_1 v)(w\eta - v\zeta) - (b_1 w + f_1 v)(u\zeta - w\xi) \\ &\quad + (c_1 v + f_1 w)(v\xi - u\eta) + \alpha u(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\xi, \\ &(f_1 u - d_1 w)(u\zeta - w\xi) - (c_1 u + e_1 w)(v\xi - u\eta) \\ &\quad + (a_1 w + e_1 u)(w\eta - v\zeta) + \alpha v(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\eta, \\ &(e_1 v - f_1 u)(v\xi - u\eta) - (a_1 v + d_1 u)(w\eta - v\zeta) \\ &\quad + (b_1 u + d_1 v)(u\zeta - w\xi) + \alpha w(u\xi + v\eta + w\zeta) = s^2\zeta. \end{aligned}\right.$$

Multiplions ces trois équations par ξ, η, ζ et ajoutons, après avoir posé

$$w\eta - v\zeta = X, \quad u\zeta - w\xi = Y, \quad w\xi - u\eta = Z, \quad u\xi + v\eta + w\zeta = \theta,$$

nous aurons

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} s^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \alpha\theta^2 + a_1 X^2 + b_1 Y^2 \\ + c_1 Z^2 - 2f_1 YZ - 2e_1 ZX - 2d_1 XY. \end{aligned}\right.$$

Si on fait une transformation de coordonnées indiquée par les formules

$$\left\{\begin{aligned} u &= m_1 u' + m_2 v' + m_3 w', \\ v &= n_1 u' + n_2 v' + n_3 w', \\ w &= p_1 u' + p_2 v' + p_3 w'; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= m_1 \xi' + m_2 \eta' + m_3 \zeta', \\ \eta &= n_1 \xi' + n_2 \eta' + n_3 \zeta', \\ \zeta &= p_1 \xi' + p_2 \eta' + p_3 \zeta'; \end{aligned}\right.$$

on a aussi

$$\left\{\begin{aligned} X &= m_1 X' + m_2 Y' + m_3 Z', \\ Y &= n_1 X' + n_2 Y' + n_3 Z', \\ Z &= p_1 X' + p_2 Y' + p_3 Z', \end{aligned}\right.$$

X', Y', Z' représentant $w'\eta' - v'\zeta'$, etc. D'après la théorie des surfaces du second degré, on peut, en choisissant les axes de coordonnées, faire disparaître les coefficients d_1, e_1, f_1 de la formule (d) et par suite des formules (G) et des expressions (D), et les équations du mouvement peuvent s'écrire

$$
(\mathrm{H})\quad \left\{
\begin{aligned}
&[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(c_1-\alpha)v^2+(b_1-\alpha)w^2-s^2]\xi\\
&\qquad\qquad -(c_1-\alpha)uv\eta-(b_1-\alpha)uw\zeta=0,\\
&-(c_1-\alpha)uv\xi+[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(a_1-\alpha)w^2\\
&\qquad\qquad +(c_1-\alpha)u^2-s^2]\eta-(a_1-\alpha)vw\zeta=0,\\
&-(b_1-\alpha)uw\xi-(a_1-\alpha)vw\eta\\
&\quad +[\alpha(u^2+v^2+w^2)+(b_1-\alpha)u^2+(a_1-\alpha)v^2]\zeta=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Par la forme (G), on voit immédiatement que ces équations sont satisfaites par

$$
(\mathrm{I})\qquad s^2=\alpha(u^2+v^2+w^2),\quad \frac{\xi}{u}=\frac{\eta}{v}=\frac{\zeta}{w},
$$

et il en résulte que l'onde contient une première surface, qui est une sphère

$$
x^2+y^2+z^2=\alpha,
$$

sur laquelle la vibration est longitudinale, c'est-à-dire normale à l'onde.

Si l'on fait $\alpha=0$, les équations (G) et (H) sont celles qui sont données par M. Lamé dans la 17^e leçon de sa *Théorie de l'élasticité* pour représenter la propagation du mouvement de l'éther renfermé dans les corps cristallisés. Or, si on observe la forme des équations (H), on reconnaît qu'on passe du cas où α est nul à celui où il ne l'est pas, en remplaçant a_1, b_1, c_1 par $a_1-\alpha$, $b_1-\alpha$, $c_1-\alpha$ et s^2 par $s^2-\alpha(u^2+v^2+w^2)$.

En éliminant ξ, η, ζ entre les trois équations (H) dans la supposition de $\alpha=0$, on a

$$
\begin{aligned}
s^2\{s^4&-[(b+c)u^2+(c+a)v^2+(a+b)w^2]s^2\\
&+(bcu^2+cav^2+abw^2)(u^2+v^2+w^2)\}=0.
\end{aligned}
$$

et si on fait les changements qui viennent d'être indiqués, pour passer au cas où α n'est pas nul, le facteur s^2 se trouve seulement remplacé par

$$s^2 - \alpha(u^2 + v^2 + w^2);$$

on en conclut facilement que l'on peut supposer α nul ou non, et que l'on a toujours la même onde, jouissant des mêmes propriétés; on a donc, d'après ce qui est démontré dans l'ouvrage de M. Lamé, auquel nous renvoyons le lecteur, l'onde de Fresnel, sur laquelle la vibration est transversale, c'est-à-dire située dans l'onde, et parallèle au plan de polarisation.

Si la propagation du mouvement que nous étudions avait lieu dans un corps solide, en ébranlant les molécules de ce corps, l'onde sphérique qui se propage avec changement de densité serait seule capable d'ébranler l'air et de transmettre un son. Au contraire, si cette propagation s'effectue dans l'éther d'un corps cristallisé, l'éther étant incompressible, on doit supposer ξ, η, ζ nuls dans les équations (I), et l'onde sphérique est invisible.

Nous terminerons cet article en faisant observer combien l'étude actuelle se distingue par sa simplicité de l'étude générale du mouvement vibratoire qui se propage dans un corps solide. D'abord la surface indicatrice se réduit ici à une sphère.

Ensuite il est ordinairement impraticable de déterminer au moyen de l'équation

$$(e) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

appelée par Cauchy équation *caractéristique,* l'équation de la surface de l'onde qui est du cent cinquantième degré, et on doit se borner à la construire par points. Pour cela, on construit d'abord la surface représentée par l'équation (e), où u, v, w sont censés désigner des coordonnées, on mène en un point quelconque (u, v, w) de cette surface un plan tangent, sur lequel on abaisse de l'origine o une perpendiculaire R; enfin on prend sur cette droite une longueur $oP = \frac{s}{R}$, et P est un point de l'onde. Cette construction permet de discuter la surface de l'onde. Mais ici l'onde se réduit à une sphère et à une surface du quatrième degré, et l'on sait déterminer son équation qui est

$$(x^2+y^2+z^2-\alpha)\{(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2) \\ -[a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2]+abc\}=0.$$

Dans le cas général, il n'y a que six plans tangents à l'onde parallèles à un plan donné; mais si l'on se propose de mener par une droite tous les plans tangents, ce qui est un problème plus général, il n'est pas permis d'en conclure qu'il n'y en ait que six, et d'après la construction d'Huyghens on peut avoir plus de trois rayons réfractés correspondants à un rayon incident : dans le cas actuel, au contraire, on sait qu'il n'y en a que trois.

Enfin, il est encore bon de remarquer que l'on passe de l'équation de l'onde à l'équation caractéristique en changeant x, y, z en $\frac{u}{s}$, $\frac{v}{s}$, $\frac{w}{s}$, et a, b, c en $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{\alpha}$; de sorte que la surface caractéristique est analogue à celle de l'onde.

Notons en passant qu'en général si la surface caractéristique a un ombilic, il existe sur l'onde une courbe tout le long de laquelle un même plan est tangent, et *vice versâ;* et il résulte de ce qui précède qu'il suffit de constater que l'onde de Fresnel jouit d'une de ces deux propriétés géométriques, pour en conclure qu'elle possède l'autre.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Nous avons vu que les équations

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}\xi+\frac{d\Theta}{d(2uv)}\eta+\frac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta=\frac{d^2\xi}{dt^2},\\ &\frac{d\Theta}{d(2uv)}\xi+\frac{d\Theta}{d(v^2)}\eta+\frac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta=\frac{d^2\eta}{dt^2},\\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}\xi+\frac{d\Theta}{d(2vw)}\eta+\frac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta=\frac{d^2\zeta}{dt^2}\end{aligned}\right.$$

représentent l'état vibratoire d'un corps solide homogène, si Θ est un polynôme qui ne renferme que des termes du second degré par rapport aux six symboles u^2, v^2, w^2,..., $2uv$, et qu'elles donnent le mouvement de l'éther, lorsque Θ se réduit à une fonction de $u^2+v^2+w^2$, après qu'on a ôté à cette expression son caractère symbolique.

Mais lorsqu'on veut étudier la question avec plus d'approximation, il faut faire entrer dans les équations des dérivées d'ordre supérieur au second; c'est ce qui est indispensable dans la théorie de la lumière. En effet, si la vitesse du son ne dépend pas d'une manière sensible de la durée de la vibration, l'expérience prouve au contraire que cet élément a une influence notable sur la vitesse de propagation des rayons lumineux, et détermine dans la réfraction la dispersion des diverses couleurs.

Θ ayant la forme indiquée ci-dessus, la vitesse de propagation résultant des équations (a) ne dépend pas de cette durée, mais elle en dépendra, comme nous verrons, si conservant les équations (a) on prend pour Θ une série qui renferme non–seulement des termes du second degré par rapport aux symboles u^2, v^2,..., $2uv$, mais encore des termes des degrés troisième, quatrième, etc.

2. Toutefois, pour que les équations (a) ainsi entendues soient susceptibles d'une interprétation physique, il est indispensable qu'elles subsistent après une transformation de coordonnées, et nous commencerons par démontrer qu'elles jouissent de cette propriété.

A cet effet, comparons les équations (a) aux équations

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\mathrm{H}}{du^2}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dw}\zeta=\frac{d^2\xi}{dt^2},\\
&\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv^2}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv\,dw}\zeta=\frac{d^2\eta}{dt^2},\\
&\frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dw}\xi+\frac{d^2\mathrm{H}}{dv\,dw}\eta+\frac{d^2\mathrm{H}}{dw^2}\zeta=\frac{d^2\zeta}{dt^2},
\end{aligned}\right.$$

H étant une fonction de u, v, w, et faisons une transformation de coordonnées rectangulaires indiquée par les formules

$$\left\{\begin{aligned}
u&=m_1u'+m_2v'+m_3w',\\
v&=n_1u'+n_2v'+n_3w',\\
w&=p_1u'+p_2v'+p_3w',
\end{aligned}\right.\qquad
\left\{\begin{aligned}
u'&=m_1u+n_1v+p_1w,\\
v'&=m_2u+n_2v+p_2w,\\
w'&=m_3u+n_3v+p_3w.
\end{aligned}\right.$$

Nous aurons à remplacer, dans les équations (b), ξ, η ζ, $\frac{d^2 H}{du^2}$, $\frac{d^2 H}{dv^2}$, $\frac{d^2 H}{dw^2}$, $\ldots$, $\frac{d^2 H}{du\,dv}$ par les expressions

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= m_1\xi' + m_2\eta' + m_3\zeta',\\ \eta &= n_1\xi' + n_2\eta' + n_3\zeta',\\ \zeta &= p_1\xi' + p_2\eta' + p_3\zeta', \end{aligned}\right.$$

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2 H}{du^2} &= \frac{d^2 H}{du'^2} m_1^2 + \frac{d^2 H}{dv'^2} m_2^2 + \frac{d^2 H}{dw'^2} m_3^2\\ &\quad + 2\frac{d^2 H}{dv'\,dw'} m_2 m_3 + 2\frac{d^2 H}{dw'\,du'} m_3 m_1 + 2\frac{d^2 H}{du'\,dv'} m_1 m_2,\\ \frac{d^2 H}{dv^2} &= \frac{d^2 H}{du'^2} n_1^2 + \frac{d^2 H}{dv'^2} n_2^2 + \frac{d^2 H}{dw'^2} n_3^2\\ &\quad + 2\frac{d^2 H}{dv'\,dw'} n_2 n_3 + 2\frac{d^2 H}{dw'\,du'} n_3 n_1 + 2\frac{d^2 H}{du'\,dv'} n_1 n_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^2 H}{du\,dv} &= \frac{d^2 H}{du'^2} m_1 n_1 + \frac{d^2 H}{dv'^2} m_2 n_2 + \frac{d^2 H}{dw'^2} m_3 n_3\\ &\quad + \frac{d^2 H}{dv'\,dw'}(m_2 n_3 + n_2 m_3) + \frac{d^2 H}{dw'\,du'}(m_3 n_1 + n_3 m_1)\\ &\quad + \frac{d^2 H}{du'\,dv'}(m_1 n_2 + n_1 m_2), \end{aligned}\right.$$

et par cette substitution, les formules (b) se changeront en d'autres que nous appellerons (B).

Indiquons ensuite le calcul semblable pour les équations (a), et posons les formules symboliques

$$\left\{\begin{aligned} u'^2 &= m_1^2 u^2 + n_1^2 v^2 + p_1^2 w^2 + n_1 p_1(2vw) + p_1 m_1(2wu) + m_1 n_1(2uv),\\ v'^2 &= m_2^2 u^2 + n_2^2 v^2 + p_2^2 w^2 + n_2 p_2(2vw) + p_2 m_2(2wu) + m_2 n_2(2uv),\\ w'^2 &= m_3^2 u^2 + n_3^2 v^2 + p_3^2 w^2 + n_3 p_3(2vw) + p_3 m_3(2wu) + m_3 n_3(2uv),\\ 2u'v' &= 2m_1 m_2 u^2 + 2n_1 n_2 v^2 + 2p_1 p_2 w^2 + (n_1 p_2 + n_2 p_1)(2vw)\\ &\quad + (p_1 m_2 + p_2 m_1)(2wu) + (m_1 n_2 + m_2 n_1)(2uv),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Nous avons d'autre part

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \frac{d\Theta}{d(u'^2)}\frac{d(u'^2)}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(v'^2)}\frac{d(v'^2)}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(w'^2)}\frac{d(w'^2)}{d(u^2)}$$
$$+ \frac{d\Theta}{d(2v'w')}\frac{d(2v'w')}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(2w'u')}\frac{d(2w'u')}{d(u^2)} + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}\frac{d(2u'v')}{d(u^2)},$$

et nous en concluons la première des formules qui suivent, et les autres de même :

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{d(u^2)} &= \frac{d\Theta}{d(u'^2)} m_1^2 + \frac{d\Theta}{d(v'^2)} m_2^2 + \frac{d\Theta}{d(w'^2)} m_3^2 + 2\frac{d\Theta}{d(2v'w')} m_2 m_3 \\
&\quad + 2\frac{d\Theta}{d(2w'u')} m_3 m_1 + 2\frac{d\Theta}{d(2u'v')} m_1 m_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{d\Theta}{d(2uv)} &= \frac{d\Theta}{d(u'^2)} m_1 n_1 + \frac{d\Theta}{d(v'^2)} m_2 n_2 + \frac{d\Theta}{d(w'^2)} m_3 n_3 \\
&\quad + \frac{d\Theta}{d(2v'w')}(m_2 n_3 + n_2 m_3) + \frac{d\Theta}{d(2w'u')}(m_3 n_1 + n_3 m_1) \\
&\quad + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}(m_1 n_2 + n_1 m_2).
\end{aligned}\right.$$

En substituant les expressions (c) et (e) dans les équations (a), nous en obtiendrons d'autres que nous désignerons par (A), et qui offrent des calculs identiques à ceux des équations (B). Or, les équations (b) sont de la forme de celles qui représentent le mouvement vibratoire d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement, suivant une fonction de la distance, et il résulte de cette signification physique, qu'en combinant les équations (B), on pourra obtenir celles-ci :

$$\frac{d^2 H}{du'^2}\xi' + \frac{d^2 H}{du'\,dv'}\eta' + \frac{d^2 H}{du'\,dw'}\zeta' = \frac{d^2\xi'}{dt^2}, \ldots,$$

donc, en combinant de la même manière les équations (A), on aura

$$\frac{d\Theta}{d(u'^2)}\xi' + \frac{d\Theta}{d(2u'v')}\eta' + \frac{d\Theta}{d(2u'w')}\zeta' = \frac{d^2\xi'}{dt^2}, \ldots,$$

et c'est ce que nous voulions démontrer.

Nous aurions pu effectuer les calculs que nous n'avons fait qu'indiquer, et donner ainsi une démonstration purement algébrique de la proposition précédente; mais nous l'omettons, parce qu'elle n'est pas nécessaire à notre objet.

3. Il est fort remarquable que, dans le cas où H ne renferme que des termes des ordres pairs, et par conséquent les équations (b) elles-mêmes que des dérivées de ces ordres, le système des formules (b) soit un cas particulier des formules (a).

Malgré l'importance de ce point, comme une démonstration s'en présentera presque d'elle-même dans la suite de nos idées, nous ne ferons ici qu'indiquer la suivante.

Il s'agit de démontrer que, étant donnée la fonction paire H de u, v, w, on peut toujours former une fonction Θ des six symboles u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, telle que l'on ait

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \frac{d^2 H}{du^2},\quad \frac{d\Theta}{d(v^2)} = \frac{d^2 H}{dv^2},\quad \frac{d\Theta}{d(w^2)} = \frac{d^2 H}{dw^2},\quad \frac{d\Theta}{d(2vw)} = \frac{d^2 H}{dv\,dw},\\ &\frac{d\Theta}{d(2wu)} = \frac{d^2 H}{dw\,du},\quad \frac{d\Theta}{d(2uv)} = \frac{d^2 H}{du\,dv}.\end{aligned}\right.$$

H est la somme de termes tels que $A u^k v^l w^p$, $k+l+p$ étant un nombre pair, il suffit donc de prouver qu'en prenant

$$H = A u^k v^l w^p,\quad k+l+p = 2n,$$

il est possible de déterminer une fonction Θ qui satisfasse aux conditions (f) : il n'existe pas qu'une fonction qui puisse convenir, mais on obtient une solution en posant

$$\begin{gathered}\Theta = AM \sum \frac{1}{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times 1.2\ldots\delta \times 1.2\ldots\varepsilon \times 1.2\ldots\eta} \\ \times (u^2)^\alpha (v^2)^\beta (w^2)^\gamma (2vw)^\delta (2wu)^\varepsilon (2uv)^\eta, \\ M = \frac{1.2\ldots k \times 1.2\ldots l \times 1.2\ldots p}{2^{n-1}\, 1.3.5\ldots(2n-3)};\end{gathered}$$

le signe $\sum$ désigne une sommation qui s'étend à toutes les expressions $(u^2)^\alpha(v^2)^\beta\ldots(2uv)^\eta$, susceptibles, après la suppression du symbole, de se réduire à la forme $2^i u^k v^l w^p$.

Pour plus de clarté, prenons un exemple, et posons

$$H = uv^2w^3,$$

nous aurons à faire

$$k=1,\quad l=2,\quad p=3,\quad n=3,\quad M=1,$$

ce qui donne pour l'expression de Θ

$$\Theta = v^2.w^2.2uw + w^2.2vw.2uv + \frac{1}{2}(2vw)^2 2wu,$$

et nous obtenons d'une part

$$\frac{d^2H}{du^2}=0,\qquad \frac{d^2H}{dv^2}=2uw^3,\qquad \frac{d^2H}{dw^2}=6uv^2w,$$
$$\frac{d^2H}{dv\,dw}=6uvw^2,\quad \frac{d^2H}{dw\,du}=3v^2w^2,\quad \frac{d^2H}{du\,dv}=2vw^3,$$

et de l'autre

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)}=0,\quad \frac{d\Theta}{d(v^2)}=w^2.2uw,\quad \frac{d\Theta}{d(w^2)}=v^2.2uw+2vw.2uv=6uv^2w$$
$$\frac{d\Theta}{d(2vw)}=w^2.2uv+2vw.2wu=6uvw^2,$$
$$\frac{d\Theta}{d(2wu)}=v^2.w^2+\frac{1}{2}(2vw)^2=3v^2w^2,$$
$$\frac{d\Theta}{d(2uv)}=w^2.2vw=2vw^3.$$

On reconnaît que ces six expressions sont identiques aux précédentes.

4. Cherchons maintenant quelle forme particulière on doit donner à la fonction symbolique Θ, pour que les équations (a) du nº **1** représentent un mouvement vibratoire, sans changement de densité du milieu dans lequel il s'opère. Multiplions ces trois équations respectivement par u, v, w, en entendant par là, puisque u, v, w désignent les signes de différentiation $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}$, que nous les différentions par rapport à x, y, z, puis ajoutons, après avoir remarqué que

$$u\xi + v\eta + w\zeta$$

représente la dilatation υ du volume au point (x, y, z), et nous aurons

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\upsilon}{dt^2} = &\left[\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\right]\xi \\ &+ \left[\frac{d\Theta}{d(2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w\right]\eta \\ &+ \left[\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w\right]\zeta. \end{aligned}\right.$$

Donc le mouvement vibratoire s'effectuera nécessairement sans changement de densité, si on a

$$(h)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}w = 0, \\ &\frac{d\Theta}{(d2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w = 0, \\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w = 0. \end{aligned}\right.$$

Si au lieu des relations (h), on a celles-ci,

$$(i)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{d(u^2)}u + \frac{d\Theta}{d(2uv)}v + \frac{d\Theta}{d(2uw)}w = u\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \\ &\frac{d\Theta}{d(2uv)}u + \frac{d\Theta}{d(v^2)}v + \frac{d\Theta}{d(2vw)}w = v\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \\ &\frac{d\Theta}{d(2uw)}u + \frac{d\Theta}{d(2vw)}v + \frac{d\Theta}{d(w^2)}w = w\varphi(u^2 + v^2 + w^2), \end{aligned}\right.$$

qui équivalent aux précédentes, au cas où $\varphi(u^2 + v^2 + w^2)$ est nul, l'équation (g) devient

$$\frac{d^2\upsilon}{dt^2} = \varphi(u^2 + v^2 + w^2)\,\upsilon.$$

D'après cela, cherchons quelle forme on doit donner à Θ pour satisfaire aux conditions (h), ou pour plus de généralité, pour satisfaire aux conditions (i).

Posons

$$\Theta = \theta + \theta' + \theta'' + \ldots,$$

$\theta, \theta', \theta'', \ldots$ étant des fonctions homogènes de $u^2, v^2, w^2, \ldots, 2uv$ des degrés $n, n', n'', \ldots$, et rappelons-nous cette propriété des fonctions homogènes, que si $f(r, s, t, \ldots)$ est une telle fonction du degré m, on a

$$\frac{df}{dr} r + \frac{df}{ds} s + \frac{df}{dt} t + \ldots = mf;$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{d\Theta}{d(u^2)} u^2 + \frac{d\Theta}{d(v^2)} v^2 + \frac{d\Theta}{d(w^2)} w^2 \\ &\quad + \frac{d\Theta}{d(2vw)} 2vw + \frac{d\Theta}{d(2wu)} 2wu + \frac{d\Theta}{d(2uv)} 2uv = n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \ldots.\end{aligned}$$

Si donc nous ajoutons les équations (h) ou (i) multipliées par u, v, w, il en résulte

$$\begin{aligned}n\theta + n'\theta' + n''\theta'' + \ldots &= 0 \\ \text{ou}\quad &= \varphi(u^2 + v^2 + w^2)(u^2 + v^2 + w^2).\end{aligned}$$

On conclut de là, qu'on a $\theta = 0, \theta' = 0, \ldots$, ou

$$\theta = a(u^2 + v^2 + w^2)^n, \quad \theta' = b(u^2 + v^2 + w^2)^{n'}, \ldots.$$

Donc si on a les équations (h) ou (i), en enlevant à Θ son caractère symbolique, il s'annulera ou se réduira à une fonction de $u^2 + v^2 + w^2$. *Réciproquement*, si après avoir enlevé à Θ son caractère symbolique, nous obtenons une expression dont tous les termes se détruisent, ou qui soit fonction de $u^2 + v^2 + w^2$ seulement, on a les équations (h) ou (i).

Supposons d'abord que tous les termes de Θ se détruisent par la suppression du symbolisme; alors Θ est la somme d'expressions telles que celle-ci

$$U = \sum a\,(u^2)^\alpha (v^2)^\beta (w^2)^\gamma (2vw)^\delta (2wu)^\varepsilon (2uv)^\eta,$$

qui est elle-même composée de plusieurs termes se réduisant à la forme $mu^k v^l w^p$, k, l, p restant les mêmes, et qui jouit de la même propriété que U, de sorte qu'on a

$$(k) \qquad \sum a 2^{\delta+\varepsilon+\eta} = 0.$$

Prenant les dérivées de U, on a

$$\frac{dU}{d(u^2)} = \sum a\alpha (u^2)^{\alpha-1}(v^2)^{\beta}\ldots(2uv)^{\eta} = u^{k-2}v^l w^p \sum a\alpha 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

$$\frac{dU}{d(2uv)} = \sum a\eta (u^2)^{\alpha}(v^2)^{\beta}\ldots(2uv)^{\eta-1} = \frac{1}{2}u^{k-1}v^{l-1}w^p \sum a\eta 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

$$\frac{dU}{d(2uw)} = \sum a\varepsilon (u^2)^{\alpha}\ldots(2wu)^{\varepsilon-1}(2uv)^{\eta} = \frac{1}{2}u^{k-1}v^l w^{p-1} \sum a\varepsilon 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

et si on les porte dans l'expression

$$\frac{dU}{d(u^2)}u + \frac{dU}{d(2uv)}v + \frac{dU}{d(2uw)}w,$$

elle se réduit à

$$u^{k-1}v^l w^p \sum a\left(\alpha + \frac{\eta}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

ou à

$$\frac{k}{2}u^{k-1}v^l w^p \sum a 2^{\delta+\varepsilon+\eta},$$

car on a $2\alpha+\eta+\varepsilon = k$, et cette dernière expression étant nulle d'après (k), on a

$$\frac{dU}{d(u^2)}u + \frac{dU}{d(2uv)}v + \frac{dU}{d(2uw)}w = 0;$$

Θ étant une somme d'expressions semblables à U, on a la première formule (h); et par un changement de lettres, on a les deux autres.

Si après la suppression du symbolisme, Θ est une fonction de $u^2+v^2+w^2$, il peut être considéré comme étant la somme d'expressions telles que U, et d'autres telles que

$$V = a(u^2+v^2+w^2)^n = a[(u^2)^n + n(u^2)^{n-1}v^2 + \ldots];$$

on a

$$\frac{dV}{d(u^2)} = na(u^2+v^2+w^2)^{n-1}, \quad \frac{dV}{d(2uv)} = 0, \quad \frac{dV}{d(2uw)} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{dV}{d(u^2)}u + \frac{dV}{d(2uv)}v + \frac{dV}{d(2uw)}w = na(u^2+v^2+w^2)^{n-1}u;$$

on en conclut facilement la première formule (i), et de même les deux autres.

5. Appliquons maintenant les considérations précédentes à l'étude de la propagation du mouvement dans l'éther, qui est renfermé dans les corps cristallisés.

Le mouvement de l'éther étant considéré comme représenté par les équations (a), et de plus comme s'effectuant sans changement de densité, on aura les équations (h) du numéro précédent, et tous les termes de Θ se détruiront, dès qu'on lui enlèvera son caractère symbolique.

Cependant, faisons une généralisation qui ne compliquera rien, et remplaçons les conditions (h) par les conditions (i), qui les renferment; alors si on ôte à Θ son caractère symbolique, il se réduira à une fonction de $u^2+v^2+w^2$.

Supposons ensuite que le mouvement soit simple et donné par les formules

$$(l)\quad \begin{cases} \xi = A\cos(ux+vy+wz-st), \quad \eta = B\cos(ux+vy+wz-st), \\ \zeta = C\cos(ux+vy+wz-st); \end{cases}$$

$\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$ seront égaux à $-s^2\xi$, $-s^2\eta$, $-s^2\zeta$; dès lors ne regardons plus dans les équations (a) u, v, w comme des signes de différentiation, mais comme des quantités, savoir celles qui sont écrites dans les formules (l), et nous aurons, en changeant tous les signes, les trois équations

$$(m)\quad \begin{cases} \frac{d\Theta}{d(u^2)}\xi + \frac{d\Theta}{d(2uv)}\eta + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\zeta = s^2\xi, \\ \frac{d\Theta}{d(2uv)}\xi + \frac{d\Theta}{d(v^2)}\eta + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\zeta = s^2\eta, \\ \frac{d\Theta}{d(2uw)}\xi + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\eta + \frac{d\Theta}{d(w^2)}\zeta = s^2\zeta. \end{cases}$$

Si on élimine ξ, η, ζ entre ces trois formules, on obtient l'équation caractéristique

$$(n)\qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

qui est du troisième degré en s^2. Lorsqu'on limite Θ aux termes du second degré en u^2, v^2,..., $2uv$, cette équation se réduit à l'équation homogène par rapport à u, v, w, s

$$(p)\quad \left\{ \begin{aligned} &[s^2 - \alpha(u^2+v^2+w^2)]\{s^4 - [(b+c)u^2+(c+a)v^2+(a+b)w^2]s^2 \\ &\qquad + (bcu^2+cav^2+abw^2)(u^2+v^2+w^2)\} = 0 \end{aligned} \right.$$

du n° **6** de la première partie, si l'on choisit les axes coordonnés, et elle permet de déterminer les trois vitesses $\frac{s}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$, avec lesquelles peut se propager une onde plane parallèle au plan $ux + vy + wz = 0$; si au contraire Θ renferme des termes d'ordres supérieurs au quatrième, l'équation (p) ne donne plus qu'approximativement ces trois vitesses, et l'équation (n) renferme outre les termes de l'équation (p) d'autres de degrés plus élevés; toutefois, il est essentiel de remarquer que, d'après la forme des équations (m), les trois vibrations correspondantes à ces trois ondes planes parallèles resteront rectangulaires.

Or, d'après les formules (i), les équations (m) sont satisfaites par

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \quad s^2 - \varphi(u^2+v^2+w^2) = 0;$$

donc, pour l'une des ondes planes, la vibration est normale à cette onde, et, d'après la position relative des trois vibrations, les deux autres sont transversales, c'est-à-dire situées dans l'onde, et on a pour elles

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0.$$

Si au lieu des formules (i) on a les formules (h), il faut faire

$$\varphi(u^2+v^2+w^2) = 0;$$

la première onde plane disparaît, les deux autres restent les mêmes.

Proposons-nous enfin de trouver la *surface de l'onde*, qui est l'enveloppe du plan

$$(r) \qquad ux + vy + wz = s$$

(1^{re} partie, n° 2); pour l'obtenir, il faut éliminer u, v, w entre les équations (n), (r) et

$$(q) \qquad \frac{x}{\frac{dF}{du}} = \frac{y}{\frac{dF}{dv}} = \frac{z}{\frac{dF}{dw}},$$

et on arrivera de la sorte à l'équation

$$(t) \qquad \mathfrak{F}(x, y, z, s) = 0.$$

Au lieu d'appliquer cette méthode sur l'équation (n), on peut le faire sur les deux équations en lesquelles elle se décompose,

$$s^2 - \varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \quad \psi(u, v, w, s) = 0.$$

De la première on conclut une onde sphérique représentée par

$$s^2 - \varphi\left(\frac{s^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right) = 0,$$

sur laquelle la vibration est longitudinale, et qui disparaît si

$$\varphi(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

De la seconde équation on conclut une onde pour laquelle la vibration est située dans le plan tangent (r), ou, si l'on veut, sur l'onde même.

Quand l'équation (n) est homogène, s s'élimine en même temps que u, v, w entre les équations (n), (r), (q), de sorte que l'équation (t) de l'onde est indépendante de cette quantité; c'est ce qui a lieu quand on néglige la dispersion. Mais quand on y a égard, l'équation (n) cesse d'être homogène, et l'équation (t) contient s; d'ailleurs, si on désigne par T la durée de la vibration, on a

$$T = \frac{2\pi}{s},$$

comme on le voit d'après les formules (l). Observons ensuite que, tandis que dans l'acoustique la durée de la vibration constitue la hauteur du son, dans la lumière elle produit la couleur, et tout le monde sait que par la réflexion ou la réfraction la hauteur du son et la couleur d'un rayon simple ne changent pas.

D'après cela, donnons dans l'équation (t) une valeur déterminée à s, nous avons la surface d'onde sur laquelle se trouve la lumière d'une même couleur. Quand un rayon de lumière simple passe de l'air dans un cristal, la durée de sa vibration ou sa couleur ne change pas; or, la vitesse dans l'air étant la même pour les différentes couleurs, et étant mesurée par le rapport de la longueur d'ondulation à la durée de la vibration, il s'ensuit que la longueur d'ondulation dans l'air est en raison inverse de la durée de la vibration, et que dans l'équation (t) on pourra introduire au lieu de s la longueur d'ondulation dans l'air de la couleur considérée. La surface de l'onde ainsi définie servira donc à déterminer la position des rayons réfractés d'une certaine couleur, absolument de la même manière que la surface de l'onde est en général employée à trouver la réfraction d'un rayon incident de lumière blanche, dont on néglige la dispersion.

Quand on tient compte de la dispersion, on n'a plus rigoureusement pour surface d'onde la surface donnée par Fresnel, mais on a différentes surfaces d'onde variables avec la couleur et très-rapprochées de celle-là, et, d'après ce que nous avons vu, les vibrations lumineuses se font rigoureusement dans les surfaces d'onde qui leur sont propres.

6. Il est fort intéressant de connaître quelles actions mutuelles on peut imaginer entre les molécules d'un système, pour que le mouvement vibratoire de ce système soit représenté par les équations

$$(m)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d\Theta}{d(u^2)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(2uv)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(2uw)}\,\zeta = s^2\xi,\\
&\frac{d\Theta}{d(2uv)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(v^2)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\,\zeta = s^2\eta,\\
&\frac{d\Theta}{d(2uw)}\,\xi + \frac{d\Theta}{d(2vw)}\,\eta + \frac{d\Theta}{d(w^2)}\,\zeta = s^2\zeta;
\end{aligned}\right.$$

nous allons donc montrer une action que l'on peut concevoir entre deux molécules, pour que ces équations en soient une conséquence, étant d'ailleurs bien loin de prétendre avoir trouvé le dernier mot de cette question; au reste, la recherche que nous allons présenter est encore utile, en ce qu'elle sert à démontrer que nos équations renferment celles de Cauchy comme cas particulier.

Désignons par μ une molécule dont les coordonnées sont $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, a, b, c étant des constantes, et soient m, m′,... les molécules environnantes, puis posons

$$\Theta = \mathrm{Sm}\psi\,(g_1 R^2 + g_2 R^3 + g_3 R^4 + \ldots),$$
$$R = l(u^2) + m(v^2) + n(w^2) + p(2vw) + q(2wu) + r(2uv),$$

le signe S étant un signe intégral, s'étendant à toutes les molécules m, m′,..., de sorte que ψ, quantité indépendante du choix des axes coordonnés, la fonction symbolique R, et même les coefficients g_1, g_2,..., peuvent être supposés variables, quand on passe d'une des molécules m, m′,... à l'autre.

Posons ensuite

$$2g_1 R + 3g_2 R^2 + \ldots = \Lambda,$$

et nous aurons

$$\frac{d\Theta}{d(u^2)} = \mathrm{Sm}\psi l\Lambda,\quad \frac{d\Theta}{d(v^2)} = \mathrm{Sm}\psi m\Lambda,\quad \frac{d\Theta}{d(w^2)} = \mathrm{Sm}\psi n\Lambda,$$
$$\frac{d\Theta}{d(2vw)} = \mathrm{Sm}\psi p\Lambda,\quad \frac{d\Theta}{d(2wu)} = \mathrm{Sm}\psi q\Lambda,\quad \frac{d\Theta}{d(2uv)} = \mathrm{Sm}\psi r\Lambda;$$

les équations (m) deviennent donc

$$(n)\qquad \begin{cases} \mathrm{Sm}\psi\Lambda(l\xi + r\eta + q\zeta) = s^2\xi, \\ \mathrm{Sm}\psi\Lambda(r\xi + m\eta + p\zeta) = s^2\eta, \\ \mathrm{Sm}\psi\Lambda(q\xi + p\eta + n\zeta) = s^2\zeta. \end{cases}$$

Si l'on change de coordonnées, ces équations deviennent

$$(u')\qquad \mathrm{Sm}\psi\Lambda'(l'\xi' + r'\eta' + q'\zeta') = s^2\xi',\ldots,$$

en posant

$$R = l'(u'^2) + m'(v'^2) + n'(w'^2) + p'(2v'w') + q'(2w'u') + r'(2u'v'),$$
$$\Lambda' = 2g_1 R' + 3g_2 R'^2 + \ldots.$$

et l', m', n', p', q', r' sont déterminés par l'équation

$$(v)\quad \begin{cases} l'u'^2 + m'v'^2 + n'w'^2 + 2p'v'w' + 2q'w'u' + 2r'u'v' \\ \quad = lu^2 + mv^2 + nw^2 + 2pvw + 2qwu + 2ruv. \end{cases}$$

Pour le démontrer, rappelons-nous les formules du n° **2**, par lesquelles on calcule $\frac{d\Theta}{d(u'^2)}, \frac{d\Theta}{d(v'^2)}, \ldots, \frac{d\Theta}{d(2u'v')}$ au moyen de $\frac{d\Theta}{d(u^2)}, \frac{d\Theta}{d(v^2)}, \ldots$; on en conclut facilement que des formules (u) on peut déduire les formules (u'), si l'on a les six égalités

$$(w)\quad \begin{cases} l'\Lambda' = \Lambda(lm_1^2 + mm_2^2 + nm_3^2 + 2pm_2m_3 + 2qm_3m_1 + 2rm_1m_2), \\ m'\Lambda' = \Lambda(ln_1^2 + mn_2^2 + nn_3^2 + 2pn_2n_3 + 2qn_3n_1 + 2rn_1n_2), \\ n'\Lambda' = \Lambda(lp_1^2 + mp_2^2 + np_3^2 + 2pp_2p_3 + 2qp_3p_1 + 2rp_3p_2), \\ p'\Lambda' = \Lambda[lp_1m_1 + mp_2m_2 + np_3m_3 + p(p_2m_3 + m_2p_3) \\ \qquad\qquad + q(p_3m_1 + m_3p_1) + r(p_1m_2 + m_1p_2)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si dans les égalités (w) on supprime les facteurs Λ et Λ', on a six autres égalités, desquelles on déduit l'équation (v) et aussi $R = R'$, $\Lambda = \Lambda'$; donc les égalités (w) sont satisfaites, en même temps que (v).

Il résulte de là qu'on peut écrire les équations (m) sous la forme (u) et que l'équation

$$(x)\qquad lu^2 + mv^2 + nw^2 + 2pvw + 2qwu + 2ruv = 1,$$

où u, v, w sont pris pour désigner des coordonnées rectilignes, est celle d'une surface du second degré à centre, propre à définir l'action qui s'exerce entre les deux molécules μ et m.

Les équations qui donnent le mouvement d'un système de molécules qui s'attirent ou se repoussent mutuellement, suivant une fonction de la distance, peuvent s'écrire, dans le cas où elles ne renferment que des termes d'ordre pair, sous la forme

$$(y)\qquad \begin{cases} \mathrm{Sm}\psi\mathrm{P}(\mathrm{x}^2\xi + \mathrm{xy}\eta + \mathrm{xz}\zeta) = s^2\xi, \\ \mathrm{Sm}\psi\mathrm{P}(\mathrm{xy}\xi + \mathrm{y}^2\eta + \mathrm{yz}\zeta) = s^2\eta, \\ \mathrm{Sm}\psi\mathrm{P}(\mathrm{xz}\xi + \mathrm{yz}\eta + \mathrm{z}^2\zeta) = s^2\zeta \end{cases}$$

(voir *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. Ier), en posant

$$P = \frac{N}{1.2} + \frac{N^2}{1.2.3.4} + \frac{N^3}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$N = x^2 u^2 + y^2 v^2 + z^2 w^2 + 2yzvw + 2zxwu + 2xyuv.$$

On voit donc que des équations (u) on déduit comme cas particulier les équations (y); il suffit en effet de poser

$$l = x^2, \quad m = y^2, \quad n = z^2, \quad p = yz, \quad q = zx, \quad r = xy,$$

$$2g_1 = \frac{1}{1.2}, \quad 3g_2 = \frac{1}{1.2.3.4}, \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$R = N, \quad \Lambda = P.$$

Les équations (u) et (y) sont identiques aux équations que nous avons écrites sous les formes (a) et (b) aux nos **1** et **2**, et la proposition dont il a été question au no **3** se trouve démontrée.

Il résulte encore de ce qui précède que pour que nos équations se réduisent à celles de Cauchy, il faut et il suffit que la surface à centre du second degré (x) se réduise à deux plans parallèles dont l'équation soit

$$(xu + yv + zw)^2 = 1,$$

u, v, w étant les coordonnées variables.

Revenons au système de molécules auquel les équations (u) conviennent. Si nous considérons séparément l'action de la molécule m sur la molécule μ, nous aurons pour les trois composantes de cette action

$$m\psi\Lambda(l\xi + r\eta + q\zeta),$$

$$m\psi\Lambda(r\xi + m\eta + p\zeta),$$

$$m\psi\Lambda(q\xi + p\eta + n\zeta),$$

en posant

$$\Lambda = 2g_1 R + 3g_2 R^2 + \ldots.$$

Si nous choisissons pour axes de coordonnées les axes de symétrie de la surface (x), p, q, r seront nuls, et les trois composantes de l'action se réduiront à

$$\mathrm{m}\psi\Lambda l\xi,\quad \mathrm{m}\psi\Lambda m\eta,\quad \mathrm{m}\psi\Lambda n\zeta, \tag{z}$$

et l'équation de la surface (x) à

$$lu^2 + mv^2 + nw^2 = 1.$$

Considérons la surface à centre du second degré

$$\frac{x^2}{l} + \frac{y^2}{m} + \frac{z^2}{n} = 1, \tag{α}$$

qui est réciproque de la précédente, l'origine des coordonnées x, y, z passant par la molécule μ; l'expression

$$\mathrm{R} = lu^2 + mv^2 + nw^2$$

représente le carré de la distance δ de la molécule μ au plan tangent à l'ellipsoïde (α), mené parallèlement au plan

$$ux + vy + wz = 0;$$

donc Λ représente une fonction paire quelconque de δ, qui ne renferme pas de termes indépendants de δ; et les trois composantes de l'action sont proportionnelles à une même fonction paire de δ, à la composante parallèle de la vibration et à l'axe correspondant de la surface (α). Deux des trois quantités l, m, n sont nulles, si l'action qui s'exerce entre deux molécules est une fonction de la distance.

En retournant ce calcul, on démontrera que réciproquement, si pour trois axes coordonnés rectangulaires choisis convenablement, et variables d'une des molécules m, m′,... à l'autre, l'action élémentaire est formée de trois composantes représentées par les expressions (z), le mouvement vibratoire est donné par les équations (u) ou (m).

TROISIÈME PARTIE.

1. Les équations (a) du n° **1** de la deuxième partie donnent le mode de propagation du mouvement dans l'éther renfermé dans les corps cristallisés, si Θ s'annule, lorsqu'on lui enlève son caractère symbolique.

(Si l'on supposait que Θ se réduisît à une fonction de $u^2 + v^2 + w^2$, on trouverait la même onde et, en plus, une onde sphérique sur laquelle la vibration serait normale.)

Si l'on réduit Θ aux termes du deuxième et du troisième ordre en u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2wu$, $2uv$, et qu'on suppose le mouvement simple, les équations citées deviendront

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&\left[L_1 + \frac{dU}{d(u^2)}\right]\xi + \left[M_1 + \frac{dU}{d(2uv)}\right]\eta + \left[P_1 + \frac{dU}{d(2uw)}\right]\zeta = s^2\xi,\\
&\left[M_1 + \frac{dU}{d(2uv)}\right]\xi + \left[M_2 + \frac{dU}{d(v^2)}\right]\eta + \left[P_2 + \frac{dU}{d(2vw)}\right]\zeta = s^2\eta,\\
&\left[P_1 + \frac{dU}{d(2uw)}\right]\xi + \left[P_2 + \frac{dU}{d(2vw)}\right]\eta + \left[P_3 + \frac{dU}{d(w^2)}\right]\zeta = s^2\zeta,
\end{aligned}\right.$$

L_1, M_1,... ayant les valeurs (D) du n° **6** de la première partie, dans la supposition de $\alpha = 0$, et comme nous savons, si on choisit les axes de coordonnées, on pourra supposer d, e, f nuls, et il restera

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}
&L_1 = cv^2 + bw^2, &&M_2 = cu^2 + aw^2, &&P_3 = bu^2 + av^2,\\
&P_2 = -\,avw, &&P_1 = -\,buw, &&M_1 = -\,cuv.
\end{aligned}\right.$$

Quant à U, c'est une fonction du troisième degré des six symboles u^2, v^2,..., $2uv$, et nous écrirons d'abord pour la représenter la forme la plus générale du troisième degré de ces symboles :

$$\begin{aligned}
U = {} & \mathcal{A}_1 (u^2)^3 + \mathcal{B}_1 (u^2)^2\, 2uv + \mathcal{C}_1 (u^2)^2 v^2 + \mathcal{D}_1 (2uv)^2 u^2\\
& + B_1 (u^2)^2\, 2uw + C_1 (u^2)^2 w^2 + D_1 (2uw)^2 u^2\\
& + \mathcal{E}_1 (u^2)^2\, 2vw + \mathcal{F}_1 u^2.2uv.2wu + \mathcal{G}_1 u^2.v^2.2uv\\
& + \mathcal{H}_1 (2uv)^3 + \mathcal{K}_1 (2uv)^2.2uw
\end{aligned}$$

$$+ \mathcal{L}_1 u^2.v^2.2uw + \mathcal{M}_1 u^2.2uv.2vw + K_1(2uw)^2.2uv$$
$$+ L_1 u^2.w^2.2uv + M_1 u^2.2uw.2vw + \mathcal{Q}_1 u^2.(2vw)^2$$
$$+ \mathcal{A}_2(v^2)^3 + \mathcal{B}_2(v^2)^2.2vw + \mathcal{C}_2(v^2)^2 w^2 + \mathcal{D}_2(2vw)^2 v^2$$
$$+ B_2(v^2)^2 2vu + C_2(v^2)^2 u^2 + D_2(2vu)^2 v^2$$
$$+ \mathcal{F}_2(v^2)^2 2wu + \mathcal{T}_2 v^2.2vw.2uv + \mathcal{G}_2 v^2.w^2.2vw$$
$$+ \mathcal{H}_2(2vw)^3 + \mathcal{K}_2(2vw)^2 2vu$$
$$+ \mathcal{L}_2 v^2.w^2.2vu + \mathcal{M}_2 v^2.2vw.2wu$$
$$+ K_2(2vu)^2 2vw + L_2 v^2.u^2.2vw + M_2 v^2.2vu.2wu + \mathcal{Q}_2 v^2(2wu)^2$$
$$+ \mathcal{A}_3(w^2)^3 + \mathcal{B}_3(w^2)^2 2wu + \mathcal{C}_3(w^2)^2 u^2 + \mathcal{D}_3(2wu)^2 w^2$$
$$+ B_3(w^2)^2 2wv + C_3(w^2)^2 v^2 + D_3(2wv)^2 w^2$$
$$+ \mathcal{F}_3(w^2)^2 2uv + \mathcal{T}_3 w^2.2wu.2vw + \mathcal{G}_3 w^2.u^2.2wu$$
$$+ \mathcal{H}_3(2wu)^3 + \mathcal{K}_3(2wu)^2.2wv$$
$$+ \mathcal{L}_3 w^2.u^2.2wv + \mathcal{M}_3 w^2.2wu.2uv$$
$$+ K_3(2wv)^2 2wu + L_3 w^2.v^2.2wu + M_3 w^2.2wv.2uv$$
$$+ \mathcal{Q}_3 w^2(2uv)^2 + \mathcal{N} u^2.v^2.w^2 + \mathcal{P}\, 2uv.2uw.2vw.$$

Otant à U son caractère symbolique, nous aurons l'expression

$$Z = \mathcal{A}_1 u^6 + \mathcal{A}_2 v^6 + \mathcal{A}_3 w^6 + 2\mathcal{B}_1 u^5 v + 2\mathcal{B}_2 v^5 w + 2\mathcal{B}_3 w^5 u$$
$$+ 2B_1 u^5 w + 2B_2 v^5 u + 2B_3 w^5 v$$
$$+ (\mathcal{C}_1 + 4\mathcal{D}_1) u^4 v^2 + (\mathcal{C}_2 + 4\mathcal{D}_2) v^4 w^2 + (\mathcal{C}_3 + 4\mathcal{D}_3) w^4 u^2$$
$$+ (C_1 + 4D_1) u^4 w^2$$
$$+ (C_2 + 4D_2) v^4 u^2 + (C_3 + 4D_3) w^4 v^2 + (2\mathcal{F}_1 + 4\mathcal{T}_1) u^4 vw$$
$$+ (2\mathcal{F}_2 + 4\mathcal{T}_2) v^4 wu$$
$$+ (2\mathcal{F}_3 + 4\mathcal{T}_3) w^4 uv + (2\mathcal{G}_1 + 8\mathcal{H}_1) u^3 v^3$$
$$+ (2\mathcal{G}_2 + 8\mathcal{H}_2) v^3 w^3 + (2\mathcal{G}_3 + 8\mathcal{H}_3) w^3 u^3$$
$$+ (8\mathcal{K}_1 + 2\mathcal{L}_1 + 4\mathcal{M}_1) u^3 v^2 w + (8\mathcal{K}_2 + 2\mathcal{L}_2 + 4\mathcal{M}_2) v^3 w^2 u$$
$$+ (8\mathcal{K}_3 + 2\mathcal{L}_3 + 4\mathcal{M}_3) w^3 u^2 v$$
$$+ (8K_1 + 2L_1 + 4M_1) u^3 w^2 v + (8K_2 + 2L_2 + 4M_2) v^3 u^2 w$$
$$+ (8K_3 + 2L_3 + 4M_3) w^3 v^2 u$$
$$+ (\mathcal{N} + 8\mathcal{P} + 4\mathcal{Q}_1 + 4\mathcal{Q}_2 + 4\mathcal{Q}_3) u^2 v^2 w^2.$$

Tous les termes de Z doivent être nuls; on a donc

$$
(\mathrm{B})\left\{
\begin{array}{c}
\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\mathcal{A}_3=0, \quad \mathcal{B}_1=\mathcal{B}_2=\mathcal{B}_3=\mathrm{B}_1=\mathrm{B}_2=\mathrm{B}_3=0,\\
\mathcal{C}_1=-4\mathcal{D}_1, \quad \mathcal{C}_2=-4\mathcal{D}_2, \quad \mathcal{C}_3=-4\mathcal{D}_3,\\
\mathrm{C}_1=-4\mathrm{D}_1, \quad \mathrm{C}_2=-4\mathrm{D}_2, \quad \mathrm{C}_3=-4\mathrm{D}_3,\\
\mathcal{N}=6\mathcal{A}-8\mathcal{P}-4\mathcal{Q}_1-4\mathcal{Q}_2-4\mathcal{Q}_3,\\
\mathcal{I}_1=-2\mathcal{T}_1, \quad \mathcal{I}_2=-2\mathcal{T}_2, \quad \mathcal{I}_3=-2\mathcal{T}_3,\\
\mathcal{G}_1=-4\mathcal{H}_1, \quad \mathcal{G}_2=-4\mathcal{H}_2, \quad \mathcal{G}_3=-4\mathcal{H}_3,\\
\mathcal{L}_1=-4\mathcal{K}_1-2\mathcal{M}_1, \quad \mathcal{L}_2=-4\mathcal{K}_2-2\mathcal{M}_2, \quad \mathcal{L}_3=-4\mathcal{K}_3-2\mathcal{M}_3,\\
\mathrm{L}_1=-4\mathrm{K}_1-2\mathrm{M}_1, \quad \mathrm{L}_2=-4\mathrm{K}_2-2\mathrm{M}_2, \quad \mathrm{L}_3=-4\mathrm{K}_3-2\mathrm{M}_3.
\end{array}\right.
$$

Dans le cas où le cristal a trois plans de symétrie, qu'on prend pour plans de coordonnées, il est aisé de voir que si on imagine deux mouvements par ondes planes, parallèles aux plans

$$ux+vy+wz=0 \quad \text{et} \quad -ux+vy+wz=0,$$

η et ζ pourront être censés rester les mêmes, et ξ changer de signe.

Il suit de là que les équations (A) ne doivent pas changer, si on y remplace u par $-u$ et ξ par $-\xi$, et de même elles ne doivent pas changer, si on y remplace v par $-v$, η par $-\eta$, ou encore w par $-w$, ζ par $-\zeta$. Alors, avec un peu d'attention, on reconnaîtra que U ne doit conserver que des termes, qui, après la suppression du symbolisme, soient pairs en u, en v et en w.

Donc, pour un cristal dont toutes les molécules sont disposées symétriquement par rapport aux plans de coordonnées, on a encore

$$
(\mathrm{C})\left\{
\begin{array}{llllll}
\mathcal{T}_1=0, & \mathcal{H}_1=0, & \mathcal{K}_1=0, & \mathcal{M}_1=0, & \mathrm{K}_1=0, & \mathrm{M}_1=0,\\
\mathcal{T}_2=0, & \mathcal{H}_2=0, & \mathcal{K}_2=0, & \mathcal{M}_2=0, & \mathrm{K}_2=0, & \mathrm{M}_2=0,\\
\mathcal{T}_3=0, & \mathcal{H}_3=0, & \mathcal{K}_3=0, & \mathcal{M}_3=0, & \mathrm{K}_3=0, & \mathrm{M}_3=0,
\end{array}\right.
$$

et d'après les conditions (B) et (C), l'expression de U devient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}=&-4\mathcal{D}_1(u^2)^2v^2+\mathcal{D}_1(2uv)^2u^2-4\mathrm{D}_1(u^2)^2w^2+\mathrm{D}_1(2uw)^2u^2\\
&+\mathcal{Q}_1u^2.(2vw)^2-4\mathcal{D}_2(v^2)^2w^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \mathcal{D}_2 (2vw)^2 v^2 - 4\mathrm{D}_2 (v^2)^2 u^2 + \mathrm{D}_2 (2vu)^2 v^2 + \mathfrak{Q}_2 v^2 (2wu)^2 \\
&\quad - 4\mathcal{D}_3 (w^2)^2 u^2 + \mathcal{D}_3 (2wu)^2 w^2 \\
&- 4\mathrm{D}_3 (w^2)^2 v^2 + \mathrm{D}_3 (2wv)^2 w^2 + \mathfrak{Q}_3 w^2 (2uv)^2 \\
&\quad - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) u^2 . v^2 . w^2 \\
&+ \mathfrak{P}\, 2uv . 2vw . 2wu.
\end{aligned}
$$

On aura donc à substituer dans les équations (A) les expressions suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{U}}{d(u^2)} &= - 4\mathrm{D}_2 v^4 - 4\mathcal{D}_3 w^4 - 4\mathcal{D}_1 u^2 v^2 - 4\mathrm{D}_1 u^2 w^2 \\
&\quad - 4(2\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}_3) v^2 w^2, \\
\frac{d\mathrm{U}}{d(v^2)} &= - 4\mathcal{D}_1 u^4 - 4\mathrm{D}_3 w^4 - 4\mathrm{D}_2 u^2 v^2 - 4\mathcal{D}_2 v^2 w^2 \\
&\quad - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) w^2 u^2, \\
\frac{d\mathrm{U}}{d(w^2)} &= - 4\mathrm{D}_1 u^4 - 4\mathcal{D}_2 v^4 - 4\mathcal{D}_3 w^2 u^2 - 4\mathrm{D}_3 v^2 w^2 \\
&\quad - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2) u^2 v^2, \\
\frac{d\mathrm{U}}{d(2vw)} &= 4\mathcal{D}_2 v^3 w + 4\mathrm{D}_3 v w^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1) u^2 v w, \\
\frac{d\mathrm{U}}{d(2uw)} &= 4\mathrm{D}_1 u^3 w + 4\mathcal{D}_3 u w^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_2) v^2 w u, \\
\frac{d\mathrm{U}}{d(2uv)} &= 4\mathcal{D}_1 u^3 v + 4\mathrm{D}_2 u v^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_3) w^2 u v.
\end{aligned}
$$

2. Supposons maintenant que l'on ait un cristal uniaxe, et que l'on prenne pour axe des z l'axe d'isotropie. La dernière expression de U doit subir de nouvelles réductions, et pour les obtenir, il suffirait d'exprimer comme au n° 5 de la première partie, que l'expression de U reste invariable quand on fait tourner l'angle droit des x et y dans son plan. Mais le calcul serait un peu long, et on peut arriver au même but de la manière suivante.

Pour que l'axe des z soit un axe d'isotropie, il faut que la nouvelle expression de U reste invariable par l'échange des deux lettres u et v, et il en résulte

$$
(b) \qquad \mathcal{D}_1 = \mathrm{D}_2, \quad \mathcal{D}_2 = \mathrm{D}_1, \quad \mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_2, \quad \mathcal{D}_1 = \mathrm{D}_3;
$$

de même on doit faire dans les expressions (a)

$$(c)\qquad b = a;$$

alors les dérivées de U deviennent

$$\frac{dU}{d(u^2)} = -4D_2v^4 - 4D_3w^4 - 4D_2u^2v^2 - 4D_1u^2w^2 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3)v^2w^2,$$

$$\frac{dU}{d(v^2)} = -4D_2u^4 - 4D_3w^4 - 4D_2u^2v^2 - 4D_1v^2w^2 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3)w^2u^2,$$

$$\frac{dU}{d(w^2)} = -4D_1u^4 - 4D_1v^4 - 8(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1)u^2v^2 - 4D_3w^2u^2 - 4D_3v^2w^2,$$

$$\frac{dU}{d(2vw)} = 4D_1v^3w + 4D_3vw^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1)u^2vw,$$

$$\frac{dU}{d(2uw)} = 4D_1u^3w + 4D_3uw^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1)v^2wu,$$

$$\frac{dU}{d(2uv)} = 4D_2u^3v + 4D_2uv^3 + 4(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_3)w^2uv.$$

Les conditions (b) et (c) ne sont pas les seules qui conviennent à un axe d'isotroprie pris pour axe des z; il faut encore y ajouter la relation

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 = D_1,$$

qu'on obtiendrait par la méthode indiquée ci-dessus.

Toutefois cette condition n'est pas indispensable à connaître, si on remarque qu'il suffit d'étudier la manière dont se propage le mouvement dans un plan passant par l'axe des z, et pour obtenir cette simplification, il n'y a qu'à faire $v = 0$ dans les équations (A).

On aura donc à substituer dans les formules (A) les expressions

$$L_1 = aw^2,\ M_2 = cu^2 + aw^2,\ P_3 = au^2,\ P_2 = 0,\ P_1 = -auw,\ M_1 = 0,$$

$$\frac{dU}{d(u^2)} = aw^2 - 4D_3w^4 - 4D_1u^2w^2,$$

$$\frac{dU}{d(v^2)} = cu^2 + aw^2 - 4D_2u^4 - 4D_3w^4 - 4(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3)w^2u^2,$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{d(w^2)} = au^2 - 4\mathrm{D}_1 u^4 - 4\mathrm{D}_3 w^2 u^2,$$

$$\frac{d\mathrm{U}}{d(2wv)} = 0, \quad \frac{d\mathrm{U}}{d(2uw)} = -auw + 4\mathrm{D}_1 u^3 w + 4\mathrm{D}_3 uw^3, \quad \frac{d\mathrm{U}}{d(2uv)} = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$-4\mathrm{D}_1 = \mathrm{A}, \quad -4\mathrm{D}_2 = \mathrm{B}, \quad -4\mathrm{D}_3 = \mathrm{C}, \quad -2(2\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_3) = \mathrm{D},$$

et nous aurons enfin

$$(\mathrm{D})\left\{\begin{aligned} &(aw^2 + \mathrm{A}w^2u^2 + \mathrm{C}w^4 - s^2)\xi - (auw + \mathrm{A}u^3 w + \mathrm{C}uw^3)\zeta = 0,\\ &(cu^2 + aw^2 + \mathrm{B}u^4 + 2\mathrm{D}w^2u^2 + \mathrm{C}w^4 - s^2)\eta = 0,\\ &(au + \mathrm{A}u^3 + \mathrm{C}uw^2)w\xi - [u(au + \mathrm{A}u^3 + \mathrm{C}w^2u) - s^2]\zeta = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut satisfaire à ces équations,

1° En posant $\xi = 0$, $\zeta = 0$,

$$(d) \qquad s^2 = cu^2 + aw^2 + \mathrm{B}u^4 + 2\mathrm{D}u^2w^2 + \mathrm{C}w^4,$$

2° En posant $\eta = 0$,

$$(e) \qquad s^2 = (u^2 + w^2)(a + \mathrm{A}u^2 + \mathrm{C}w^2),$$

cette dernière équation provenant de l'élimination de $\frac{\xi}{\zeta}$ entre les équations (D).

Nous savons par quels calculs on peut des deux équations caractéristiques (d) et (e) déduire deux surfaces d'onde; mais la détermination des équations de ces surfaces ne sera pas nécessaire pour calculer la dispersion.

Quand on néglige dans les équations (d) et (e) les termes du quatrième ordre en u et w, on a les deux ondes d'Huyghens, savoir une sphère et un ellipsoïde de révolution tangents sur l'axe.

Quand on a égard aux termes du quatrième ordre, on a pour ondes deux surfaces excessivement rapprochées de celles d'Huyghens, et variables d'une couleur à l'autre. Le rayon dit *ordinaire* ne serait donné par une onde parfaitement sphérique, qu'autant qu'on aurait $\mathrm{C} = \mathrm{A}$.

Si l'on fait $u = 0$, les équations (d) et (e) donnent l'une et l'autre

$$s^2 = aw^2 + Cw^4;$$

on en conclut que les deux vitesses de propagation suivant l'axe sont égales, et il en résulte cette propriété remarquable que les deux ondes sont encore tangentes sur l'axe.

3. Considérons d'abord le cas beaucoup plus simple où le corps est isotrope. Les ondes dont nous venons de parler sont alors toutes deux sphériques et par suite coïncident, et la vibration n'a plus de direction déterminée. On a

$$c = a, \quad A = B = C = D;$$

donc

$$s^2 = (u^2 + w^2)[a + A(u^2 + w^2)],$$

et si l'on pose

$$u^2 + w^2 = k^2,$$

on a

$$(f) \qquad \frac{s^2}{k^2} = a + Ak^2.$$

D'ailleurs le mouvement vibratoire étant donné par les équations

$$\xi = M\cos(ux + wz - st),$$
$$\eta = N\cos(ux + wz - st),$$
$$\zeta = P\cos(ux + wz - st),$$

$\frac{s}{k}$ représente la vitesse de propagation ω dans le corps considéré, et si l'on désigne par λ la longueur d'ondulation, on a

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Soient ω_0 et λ_0 les mêmes quantités pour l'air que ω et λ pour le corps.

Si l'on désigne par n l'indice de réfraction, on a

$$n = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\lambda_0}{\lambda}:$$

d'où

$$\frac{s}{k} = \omega = \frac{\omega_0}{n}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0},$$

et à cause de (f), on a

$$\frac{\omega_0^2}{n^4} - \frac{a}{n^2} - \frac{4\pi^2 A}{\lambda_0^2} = 0,$$

c'est-à-dire que n est donnée par une équation de la forme

$$\frac{1}{n^4} - \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\beta}{\lambda_0^2} = 0,$$

α et β étant des constantes; la racine que l'on doit prendre est celle qui a pour valeur approchée $n = \sqrt{\alpha}$. L'expérience a confirmé cette formule et prouvé que β est positif. Ce que nous trouvons pour les corps isotropes est conforme à ce qui a été donné par Cauchy (*Mémoires de Prague*, p. 60).

4. Revenons aux cristaux uniaxes, et considérons encore les méridiens des deux ondes situés dans le plan des zx, courbes qui ont l'axe des z pour axe de symétrie.

Désignons par χ l'angle de la normale à l'onde plane

$$ux + wz = s$$

avec l'axe des z, et par λ la longueur d'ondulation correspondante; posons encore

$$u^2 + w^2 = k^2$$

et nous aurons

$$\cos\chi = \frac{w}{k}, \quad \sin\chi = \frac{u}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Récrivons les deux formules trouvées ci-dessus

$$(e) \qquad s^2 = (u^2 + w^2)(a + Au^2 + Cw^2),$$

$$(d) \qquad s^2 = cu^2 + aw^2 + Bu^4 + 2Du^2w^2 + Cw^4,$$

dont la première convient au rayon *ordinaire*, la seconde au rayon *extraordinaire*.

Considérons d'abord le rayon ordinaire, et désignons par $\omega = \frac{s}{k}$ la vitesse de l'onde plane d'une certaine couleur, par ω_0 la vitesse de la même lumière dans l'air et par λ_0 sa longueur d'ondulation aussi dans l'air; enfin soit T la durée de la vibration qui est la même dans les deux milieux. Nous aurons

$$\omega = \frac{\lambda}{T}, \quad \omega_0 = \frac{\lambda_0}{T}, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\omega_0}{\lambda_0\omega},$$

et, d'après (e),

$$\omega^2 = a + (A\sin^2\chi + B\cos^2\chi)\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}.$$

Pour le rayon extraordinaire, employons les mêmes lettres ω et χ en les accentuant, pour représenter les quantités analogues à celles que nous venons de désigner par ces lettres, relativement au rayon ordinaire, et nous aurons, d'après (d),

$$\begin{aligned}\omega'^2 &= c\sin^2\chi' + a\cos^2\chi' \\ &\quad + (B\sin^4\chi' + 2D\sin^2\chi'\cos^2\chi' + C\cos^4\chi')\frac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}.\end{aligned}$$

Posons

$$(g)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\omega_0^2} = \alpha^2, \quad \frac{c}{\omega_0^2} = \beta^2, \\ &-\frac{4\pi^2 A}{\omega_0^2} = E, \quad -\frac{4\pi^2 B}{\omega_0^2} = F, \quad -\frac{4\pi^2 C}{\omega_0^2} = G, \quad -\frac{4\pi^2 D}{\omega_0^2} = H,\end{aligned}\right.$$

les formules précédentes deviennent

$$(\nu)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - \alpha^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + (E\sin^2\chi + G\cos^2\chi)\frac{1}{\lambda_0^2} = 0, \\ &\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^4 - (\beta^2\sin^2\chi' + \alpha^2\cos^2\chi')\left(\frac{\omega'}{\omega_0}\right)^2 \\ &\quad + (F\sin^4\chi' + 2H\sin^2\chi'\cos^2\chi' + G\cos^4\chi')\frac{1}{\lambda_0^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

et l'on doit prendre pour $\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\frac{\omega'}{\omega_0}$ les plus grandes racines de ces équations.

Cherchons maintenant la réfraction d'un rayon, en prenant d'abord une face réfringente contenant l'axe, et le rayon incident situé dans un plan perpendiculaire à l'axe; les rayons réfractés ordinaire et extraordinaire seront aussi perpendiculaires à l'axe de sorte que l'on aura

$$\chi = \chi' = \frac{\pi}{2},$$

et si l'on remarque que $\frac{\omega_0}{\omega}$ et $\frac{\omega_0}{\omega'}$ deviennent des indices de réfraction n et n', on tire des formules (v)

$$\frac{1}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2} + \frac{E}{\lambda_0^2} = 0, \quad \frac{1}{n'^4} - \frac{\beta^2}{n'^2} + \frac{F}{\lambda_0^2} = 0;$$

la vérification expérimentale de ces formules déterminera les quatre constantes α, β, E, F. Des expériences de ce genre ont été faites par M. Rudberg.

Ensuite, pour vérifier les formules (v), nous supposerons que la face réfringente du cristal soit normale à l'axe, que l'on ait fait arriver le rayon incident sous diverses inclinaisons déterminées, et que l'on ait pu déterminer par l'expérience les angles des rayons réfractés avec l'axe.

Mais les formules (v) renferment les angles χ et χ' qu'il faudra savoir calculer au moyen des angles φ et φ' des rayons réfractés avec l'axe et que nous supposons des données de l'expérience. Désignons par $F = 0$ l'une des équations (e) et (d), et considérant u et w comme des coordonnées rectilignes variables, nous aurons l'équation d'une courbe. Or, d'après le n° **2** de la première partie, on obtient la direction d'un rayon réfracté correspondant à une direction $\left(\frac{u}{k}, \frac{w}{k}\right)$ de l'onde plane en menant la tangente à cette courbe au point u, w et abaissant sur cette tangente une perpendiculaire qui donne la direction cherchée. On a donc

$$(w) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\frac{dF}{du}}{\frac{dF}{dw}}.$$

Appliquée à l'équation (e), cette formule donne

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\varphi &= \frac{au + 2Au^3 + (A+C)uw^2}{aw + (A+C)u^2w + 2Cw^3}\\ &= \frac{a\sin\chi - [2A\sin^2\chi + (A+C)\sin\chi\cos^2\chi]\dfrac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}{a\cos\chi - [(A+C)\sin^2\chi\cos\chi + 2C\cos^3\chi]\dfrac{4\pi^2\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}},\end{aligned}$$

ou encore, d'après les formules (g),

$$(\beta)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\chi\,\frac{\alpha^2 - [2E\sin^2\chi + (E+G)\cos^2\chi]\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}{\alpha^2 - [(E+G)\sin^2\chi + 2G\cos^2\chi]\dfrac{\omega_0^2}{\omega^2\lambda_0^2}}.$$

Bien que nous nous occupions du rayon ordinaire, $\frac{\omega}{\omega_0}$ n'est pas égal à $\frac{\sin\varphi}{\sin i}$; mais, d'après la construction générale d'Huyghens qui détermine le rayon réfracté au moyen du rayon incident, on a

$$(\alpha)\qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sin\chi}{\sin i}.$$

Dans la première formule (ν), les valeurs des constantes α et E doivent être supposées connues, et il reste à déterminer G.

Supposons qu'on ait fait arriver un rayon sous une incidence i et que l'expérience ait donné φ, angle du rayon réfracté ordinaire avec l'axe. La première formule (ν) et les équations (α), (β) renferment trois inconnues G, $\frac{\omega}{\omega_0}$, χ; on peut donc déterminer G. Mais ces trois équations ne sont pas sous une forme commode à ce calcul, dans lequel il faut profiter de ce que χ diffère très-peu de φ.

Posons

$$\frac{\sin i}{\sin\varphi} = n,$$

n est une quantité connue, puisque i et φ le sont; puis faisons

$$\chi = \varphi + \varepsilon,\quad \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1+\tau}{n};$$

et pour transformer nos trois formules, considérons

$$(t)\qquad \varepsilon,\ \tau,\ \frac{E}{\lambda_0^2},\ \frac{G}{\lambda_0^2}$$

comme de très-petites quantités dont on peut négliger les carrés et les produits deux à deux. L'équation (α) devient facilement

$$(\mathrm{L})\qquad \frac{\tau}{n} = \varepsilon\frac{\cos\varphi}{\sin i};$$

pour transformer (β), on remplacera dans la fraction χ par φ, puis $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ par $\frac{1+2\tau}{n^2}$, $\operatorname{tang}\chi$ par $\operatorname{tang}\varphi + \frac{\varepsilon}{\cos^2\varphi}$, et, après quelques réductions faciles, on trouvera

$$(\mathrm{M})\qquad \frac{\alpha^2\varepsilon}{n^2} = \frac{E-G}{\lambda_0^2}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Enfin dans la première formule (ν), on remplacera respectivement

$$\chi,\quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2,\quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

par

$$\varphi,\quad \frac{1+2\tau}{n^2},\quad \frac{1+4\tau}{n^4},$$

et l'on aura

$$(\mathrm{P})\qquad \frac{1}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2} + 2\tau\left(\frac{2}{n^4} - \frac{\alpha^2}{n^2}\right) + (E\sin^2\varphi + G\cos^2\varphi)\frac{1}{\lambda_0^2} = 0.$$

On pourra donc calculer ε, τ et $\frac{G}{\lambda_0^2}$ au moyen des trois équations du premier degré (L), (M), (P). On verrait aisément, ce calcul fait, comment on pourrait, si on le jugeait utile, tenir compte d'après la méthode des approximations successives des carrés et produits deux à deux des quantités (t).

Tous les coefficients de la première équation (ν) étant maintenant connus, concevons une expérience nouvelle qui ait déterminé une autre incidence i et l'angle correspondant φ de réfraction; deux des trois équations (L), (M), (P) détermineront τ et ε, qui devront satisfaire à la troisième.

Occupons-nous ensuite du rayon extraordinaire. Appliquons donc la formule (w) à l'équation (d) et nous aurons

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{cu + 2Bu^3 + 2Duw^2}{aw + 2Du^2w + 2Cw^3},$$

φ' étant l'angle du rayon extraordinaire avec l'axe du cristal. De là on déduira par le calcul qui a conduit à (β)

$$(\gamma) \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \operatorname{tang}\chi' \frac{\beta^2 - 2(F\sin^2\chi' + H\cos^2\chi')\frac{\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}}{\alpha^2 - 2(H\sin^2\chi' + G\cos^2\chi')\frac{\omega_0^2}{\omega'^2\lambda_0^2}}.$$

Enfin nous avons

$$(\delta) \qquad \frac{\omega'}{\omega_0} = \frac{\sin\chi'}{\sin i},$$

puisque nous supposons la face réfringente normale à l'axe.

Concevons une expérience qui ait donné un angle i et l'angle φ' correspondant; la seconde formule (ν) et les deux équations (γ) et (δ) contiendront trois inconnues $\frac{\omega'}{\omega_0}$, χ' et H, et pourront par conséquent servir à déterminer la constante H. Il faudrait encore transformer ces trois formules pour rendre leur application facile; mais, pour abréger, nous n'effectuerons pas ces transformations.

Tous les coefficients de la seconde équation (ν) étant connus, de nouvelles expériences serviront comme ci-dessus à vérifier cette formule.

Remarquons en terminant qu'on passe de la formule (d) à la formule (e) en changeant c, B, 2D en a, A, A + C, ou en changeant β^2, F, 2H en α^2, E, E + G; donc on doit passer de même de la seconde formule (ν) à la première, et de la formule (γ) à la formule (β). Ce qui montre comment ayant déterminé les formules qui conviennent au rayon extraordinaire, on peut en déduire celles qui sont relatives au rayon ordinaire.

Nota. — A la deuxième page de la préface de notre Mémoire, nous aurions dû pour la discussion de l'introduction des termes que nous y désignons par $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ renvoyer à un beau Mémoire de M. de Saint-Venant sur la théorie de l'élasticité, publié dans ce Journal (août 1863, p. 270).