JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes $x^2+2y^2+2yz+2z^2+15t^2$, $2x^2+2xy+3y^2+3z^2+3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 39-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__39_0>

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2$, $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2$;

Par M. J. LIOUVILLE.

On obtient un résultat assez remarquable en considérant à la fois les nombres

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2)$$

et

$$N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2)$$

des représentations d'un même entier n par les deux formes indiquées en tête de cet article. Quoiqu'il soit sans doute très-difficile d'obtenir une expression simple de chacun de ces nombres pris isolément, on trouve néanmoins la valeur de la somme suivante :

$$\begin{gathered} 4N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 15t^2) \\ + 6N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 3z^2 + 3t^2). \end{gathered}$$

Je puis démontrer en effet que cette valeur est égale à celle de cette autre somme

$$N(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2) + 9N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)],$$

dont les deux termes s'exprimeront simplement, d'après ce que j'ai donné dans le cahier de janvier 1864 au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2.$$

On remarquera que

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n multiple de 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2)] = N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 5t^2).$$

Je laisse au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des observations précédentes.