JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE

De la courbe qui est à elle-même sa propre podaire

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 329-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__329_0>

DE LA COURBE

QUI EST A ELLE-MÊME SA PROPRE PODAIRE;

Par M. J.-N. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. Je me propose ici de trouver une courbe qui soit à elle-même sa propre podaire, ou, pour prendre le problème sous un point de vue plus général, celle qui a pour podaire une ligne semblable à elle-même et tournée d'un certain angle autour du pôle. Nous pouvons d'ailleurs nous borner aux podaires orthogonales, puisque toute podaire oblique est de son côté semblable à la podaire orthogonale et tournée d'un certain angle.

Nous obtiendrons par cela même la solution de cette autre question : Trouver une courbe telle, qu'en la faisant rouler sur une courbe égale, elle engendre par quelque point de son plan une ligne semblable tournée d'un certain angle autour du point qui correspond dans la courbe fixe au point décrivant de la ligne mobile.

En d'autres termes encore : Trouver une courbe telle, qu'elle ait pour anticaustique par réflexion une ligne semblable tournée d'un certain angle autour du foyer lumineux.

Remarquons enfin que si ce profil se trouve employé dans une machine comme excentrique pour manœuvrer un cadre, il jouira et jouira seul de la propriété de le conduire de la même manière dans les deux positions, très-différentes en général au point de vue de la loi du mouvement, pour lesquelles le cadre est perpendiculaire à son plan ou circonscrit à la courbe dans son plan même [*].

2. Nous devons d'abord mettre à part une première solution évi-

[*] Haton de la Goupillière, *Traité des Mécanismes*, p. 88.

dente qui est la ligne droite. Elle répond en effet à la rigueur des termes de l'énoncé, et pour un pôle quelconque; car le pied des perpendiculaires abaissées sur toutes les tangentes se trouve sur la ligne elle-même, et satisfait par suite à une équation identique. Mais il est clair en même temps que cette solution ne remplit pas l'objet que nous avons en vue.

3. Si la courbe cherchée a pour podaire une ligne semblable, on peut dire également que celle dont elle est la podaire lui est semblable et prendre le problème sous ce point de vue inverse. Désignons donc par

$$r = f(\theta)$$

la courbe inconnue, et cherchons celle dont elle est la podaire. Il faudra pour cela, par l'extrémité du rayon vecteur r, élever la perpendiculaire

$$r' \cos(\theta' - \theta) = r,$$

et prendre l'enveloppe de cette droite; ce qui se fera en éliminant θ entre cette formule et son équation dérivée par rapport à θ, c'est-à-dire entre les deux relations

$$\begin{gathered} r' \cos(\theta' - \theta) = f(\theta), \\ r' \sin(\theta' - \theta) = f'(\theta). \end{gathered}$$

Le résultat de cette élimination devra être

$$r' = mf(\theta' + \mu),$$

en désignant par m et μ deux constantes arbitraires.

Ainsi donc la question revient à déterminer la fonction f de manière à satisfaire au système

$$(1) \qquad \begin{cases} mf(\theta' + \mu)\cos(\theta' - \theta) = f(\theta), \\ mf(\theta' + \mu)\sin(\theta' - \theta) = f'(\theta), \end{cases}$$

qui est au fond celui de *deux équations simultanées aux différences mêlées*, et mêlées même d'une manière plus compliquée qu'à l'ordinaire; car θ y désigne une fonction inconnue de θ' subordonnée à la principale fonction inconnue f, au lieu de figurer comme à l'ordinaire d'une manière distincte dans les formules.

4. La première donne par la différentiation

$$mf'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta) - mf(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\left(1-\frac{d\theta}{d\theta'}\right) = f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'};$$

mais on a, d'après la seconde,

$$mf(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta)\frac{d\theta}{d\theta'} = f'(\theta)\frac{d\theta}{d\theta'}.$$

Si l'on retranche, m disparaît et il reste

$$f'(\theta'+\mu)\cos(\theta'-\theta) = f(\theta'+\mu)\sin(\theta'-\theta).$$

On a de même, en multipliant en croix les équations (1),

$$f'(\theta)\cos(\theta'-\theta) = f(\theta)\sin(\theta'-\theta).$$

On déduit de ces deux dernières formules

$$\tag{2} \tang(\theta'-\theta) = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{f'(\theta'+\mu)}{f(\theta'+\mu)}.$$

Si nous étions autorisés à considérer θ et θ' comme deux valeurs absolument quelconques, cette équation entraînerait la suivante :

$$\frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \text{const.},$$

et conduirait immédiatement à la détermination de la fonction f. Mais une telle affirmation ne serait pas légitime en ce moment, car θ et θ' ne sont pas indépendants. En effet, θ est l'azimut du pied de la perpendiculaire abaissée sur la tangente au point dont l'azimut est θ'. Il est donc une fonction de θ', inconnue à la vérité, mais déterminée.

5. Faisons, pour la désigner provisoirement,

$$\theta' = \varphi(\theta) - \mu, \tag{3}$$

les formules (2) deviendront

$$\operatorname{tang}\{\varphi(\theta) - \theta - \mu\} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]}.$$

Si dans cette relation, qui est maintenant une identité, nous remplaçons θ par $\varphi(\theta)$, elle donnera

$$\operatorname{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \frac{f'[\varphi(\theta)]}{f[\varphi(\theta)]} = \frac{f'\{\varphi[\varphi(\theta)]\}}{f\{\varphi[\varphi(\theta)]\}};$$

et comme ces égalités ont un membre commun,

$$\operatorname{tang}\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \operatorname{tang}[\varphi(\theta) - \theta - \mu],$$

$$\{\varphi[\varphi(\theta)] - \varphi(\theta) - \mu\} = \{\varphi(\theta) - \theta - \mu\} + k\pi,$$

et enfin, μ disparaissant,

$$\varphi[\varphi(\theta)] - 2\varphi(\theta) + \theta = k\pi.$$

Mais cette équation doit encore perdre son second membre. On peut en effet l'écrire

$$\{\theta - \varphi(\theta)\} - \{\varphi(\theta) - \varphi[\varphi(\theta)]\} = k\pi.$$

Or $\varphi(\theta)$ représente $\theta' + \mu$ (3), et peut être remplacé par cette valeur dans la première parenthèse. Dans la seconde, envisageons $\varphi(\theta)$ comme l'azimut θ_1 d'un nouveau point M_1 de la podaire; $\varphi[\varphi(\theta)]$ ou $\varphi(\theta_1)$ représentera pareillement $\theta'_1 + \mu$, en désignant par θ'_1 l'azimut du point de contact de la tangente élevée perpendiculairement à l'extrémité du rayon r_1 de la podaire, de même que θ' est celui que l'on déduit du premier point M. L'équation devient par là

$$[\theta - (\theta' - \mu)] - [\theta_1 - (\theta'_1 - \mu)] = k\pi,$$

et comme μ disparaît encore,

$$(\theta - \theta') - (\theta_1 - \theta'_1) = k\pi.$$

Or $\theta - \theta'$ et $\theta_1 - \theta'_1$ sont, sauf leur signe qui peut être positif ou négatif, les angles nécessairement aigus du rayon vecteur et de la perpendiculaire à la tangente menée en son extrémité. Leur somme ou leur différence ne peut donc atteindre une demi-circonférence, et l'on doit avoir $k = 0$. La relation qui détermine la fonction φ prend ainsi la forme définitive

$$\varphi[\varphi(\theta)] - 2\varphi(\theta) + \theta = 0. \tag{4}$$

6. Cette équation d'une forme inusitée revient au fond au problème suivant : Déterminer une fonction telle, qu'entre elle et sa fonction inverse la moyenne arithmétique soit la variable elle-même. Si, en effet, de la relation

$$x = \varphi(\theta)$$

on déduit

$$\theta = \psi(x),$$

l'équation (4) pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\varphi(x) + \psi(x) = 2x.$$

Pour la résoudre, considérons une série de valeurs θ, θ_1, θ_2, $\theta_3, \ldots$ de la variable fournies par les conditions

$$\theta_1 = \varphi(\theta), \quad \theta_2 = \varphi(\theta_1) = \varphi[\varphi(\theta)], \quad \theta_3 = \varphi(\theta_2) = \varphi\{\varphi[\varphi(\theta)]\}, \ldots,$$

elles formeront aussi, comme on le voit, une série de valeurs de la fonction φ. L'équation (4) deviendra sous sa forme actuelle

$$\theta_2 - 2\theta_1 + \theta = 0,$$

et généralement, en y changeant θ en θ_1, θ_2, $\theta_3, \ldots, \theta_n$,

$$\theta_{n+2} - 2\theta_{n+1} + \theta_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\theta_{n+2} - \theta_{n+1} = \theta_{n+1} - \theta_n.$$

Cette série forme donc une progression arithmétique, et comme elle appartient à la fois à la variable θ et à sa fonction φ, on voit qu'à une série de valeurs de la variable en progression arithmétique de raison $\Delta\theta$ en correspond pour la fonction une autre, en progression arithmétique pareillement, avec une raison égale $\Delta\varphi$,

$$\Delta\varphi = \Delta\theta, \tag{5}$$

d'où

$$\varphi(\theta) = \theta + c,$$

en désignant par c une constante arbitraire [*].

7. Si maintenant nous rendons à $\varphi(\theta)$ sa valeur (3),

$$\theta' + \mu = \theta + c,$$

il vient

$$\theta' - \theta = \text{const.} = \alpha. \tag{6}$$

L'angle $\theta' - \theta$ du rayon vecteur et de la normale doit donc rester constant, ce qui est le caractère exclusif de la spirale logarithmique. Telle est, par suite, la solution la plus générale de la question proposée.

Comme on sait d'ailleurs que, pour cette courbe en particulier, toute ligne semblable est une spirale égale tournée d'un certain angle autour du pôle, on peut réduire après coup à une seule, par exemple à la seconde, les deux conditions qui lui sont imposées dans l'énoncé : d'être amplifiée dans le rapport de 1 à m et tournée de l'angle μ.

8. Si l'on demande en particulier que la courbe soit à elle-même sa propre podaire, la solution ne devra être cherchée que dans le résultat précédent, et il suffira de faire en sorte que la quantité dont la spi-

[*] La relation (5) étant une équation aux différences finies, à la vérité la plus simple de toutes, c devrait désigner une fonction périodique si $\Delta\theta$ était déterminé. Mais $\Delta\theta$, c'est-à-dire $\theta_1 - \theta$ ou $\varphi(\theta) - \theta$, est absolument quelconque, puisque θ reste arbitraire. Il faudrait donc que c eût une infinité de périodes, ce qui le réduit au rôle de constante.

rale a tourné sur son pôle sans changer de forme soit nulle ou égale à un nombre entier de circonférences.

Pour évaluer cette quantité, remontons à la valeur constante (6) de l'angle du rayon vecteur et de la normale

$$\frac{dr'}{r'\,d\theta'} = \operatorname{tang}\alpha,$$

$$\log r' = \theta' \operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A},$$

$$r' = e^{\theta' \operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}.$$

Il est facile de voir que

$$r = r'\cos\alpha, \quad \theta = \theta' - \alpha.$$

La podaire sera donc

$$r = e^{(\theta+\alpha)\operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}\cos\alpha,$$

ce qu'on peut écrire

$$r = e^{\left[\theta + \left(\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}\right)\right]\operatorname{tang}\alpha + \mathrm{A}}.$$

L'angle de rotation a, par suite, pour valeur

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

L'équation qui détermine α sera, d'après cela, en désignant par i un nombre entier quelconque positif ou négatif,

$$\alpha + \frac{\log\cos\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = 2i\pi.$$

Elle admet pour racines

$$\alpha = 2i\pi,$$

attendu que l'on a, en faisant disparaître l'indétermination,

$$\frac{\log\cos 2i\pi}{\operatorname{tang} 2i\pi} = 0.$$

Mais nous ne devons employer ici que la racine qui correspond à $i = 0$,

$$\alpha = 0,$$

car α est nécessairement un angle aigu. Cette solution indique que la normale se confond avec le rayon vecteur, ou que la spirale dégénère en un cercle.

Il ne saurait, du reste, exister d'autre solution. En effet, si nous faisons varier α de o à $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit, ainsi que nous l'avons fait remarquer, la dérivée du premier membre qui se réduit, tout calcul fait, à

$$-\frac{\log\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$$

reste essentiellement positive. Le premier membre croît donc incessamment à partir de zéro, sans s'annuler de nouveau.