JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHARLES BRIOT

Mémoire sur la réflexion et la réfraction de la lumière

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 305-327.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__305_0>

MÉMOIRE

SUR

LA RÉFLEXION ET LA RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. CHARLES BRIOT.

I.

1. La méthode qu'a suivie Fresnel pour traiter le problème de la réflexion et de la réfraction de la lumière a été l'objet de nombreuses controverses. Cette méthode repose sur deux principes : le principe des forces vives et celui de continuité. Le premier consiste en ce que la force vive ou l'intensité de l'onde incidente est égale à la somme des intensités de l'onde réfléchie et de l'onde réfractée. Pour l'appliquer, Fresnel suppose que la densité de l'éther qui pénètre les corps transparents est plus grande que la densité de l'éther libre, et que la vitesse de propagation de la lumière varie en raison inverse de la racine carrée de cette densité. Le principe de continuité signifie que l'état vibratoire de l'éther n'éprouve pas de changement brusque quand on passe du premier milieu au second, et qu'à une distance infiniment petite de part et d'autre de la surface de séparation, le mouvement vibratoire est le même dans les deux milieux.

Toutefois Fresnel n'établit cette concordance des vibrations que pour la composante parallèle à la surface de séparation; cette condition, jointe à l'équation des forces vives, suffit pour déterminer complétement le rayon réfléchi et le rayon réfracté. Mais alors l'accord n'a pas lieu entre les composantes perpendiculaires à la surface de séparation, et Fresnel est forcé d'admettre que cette composante varie brusquement d'un côté à l'autre de la surface.

2. C'est là un grave défaut dans la théorie de Fresnel. Mac-Cullagh et M. Neumann ont imaginé une autre méthode qui conduit aux mêmes formules, et qui offre l'avantage d'établir la concordance parfaite des vibrations, aussi bien pour la composante perpendiculaire que pour la composante parallèle à la surface de séparation des deux milieux. Mais alors il faut admettre que la direction de la vibration dans la lumière polarisée est, non pas perpendiculaire au plan de polarisation comme le supposait Fresnel, mais située dans ce plan; il faut admettre, en outre, que dans les corps pondérables la densité de l'éther est la même que dans le vide. Cette dernière hypothèse est contredite par les expériences de M. Fizeau, qui démontrent d'une manière formelle que la densité de l'éther est plus grande dans les corps pondérables que dans le vide, et que, lorsque le corps se meut, il emporte avec lui l'excès d'éther qu'il contient.

3. Il faut donc revenir aux idées de Fresnel. Il m'a semblé que l'on pouvait faire disparaître l'imperfection que présente sa méthode, et établir la concordance parfaite des vibrations, en tenant compte de tous les mouvements vibratoires qui existent dans l'éther, soit que ces mouvements se propagent loin de la surface de séparation, soit qu'ils restent concentrés dans le voisinage de cette surface, de manière à devenir insensibles à une petite distance de ce plan. La méthode que j'emploie est basée sur une extension du principe de continuité, dont la première idée se trouve dans les travaux de Cauchy. Voici en quoi consiste cette extension. Supposons que la surface de séparation soit plane; prenons pour origine des coordonnées un point O du plan de séparation; pour axe des x une perpendiculaire à ce plan, et pour axe des y et des z deux droites rectangulaires situées dans ce plan. Appelons x, y, z les coordonnées d'une molécule d'éther de l'un ou l'autre milieu dans l'état d'équilibre; $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ les coordonnées de cette même molécule pendant le mouvement. Admettons que le mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu soit représenté par une somme de mouvements simples, tels que

$$\xi = \mathrm{A}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta = \mathrm{B}e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = \mathrm{C}e^{ux+vy+wz-st},$$

caractérisés chacun par une exponentielle de la forme [*]

$$e^{ux+vy+wz-st}.$$

On exprimera l'accord des vibrations de part et d'autre du plan en écrivant que pour $x=0$ les valeurs de ξ, η, ζ dans l'un et l'autre milieu sont respectivement égales; ces relations devant être satisfaites pour tous les points du plan et à un instant quelconque, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de y, z, t, il faudra que tous les termes contiennent la même exponentielle $e^{vy+wz-st}$. Les exponentielles caractéristiques des différents mouvements simples coexistants ne pourront donc différer que par la valeur de la constante u. De là résultent, ainsi que l'a remarqué Cauchy, les lois géométriques de la réflexion et de la réfraction, savoir, que les normales aux plans des ondes planes coexistantes sont situées dans un même plan perpendiculaire au plan de séparation, et que les sinus des angles que font ces normales avec la perpendiculaire au plan de séparation sont proportionnels à leurs vitesses de propagation.

4. Je rappelle ici en quelques mots la démonstration de Cauchy. Supposons que les constantes u, v, w, s soient de la forme

$$u=\mathrm{u}i,\quad v=\mathrm{v}i,\quad w=\mathrm{w}i,\quad s=\mathrm{s}i,$$

la lettre i désignant le signe $\sqrt{-1}$, et posons

$$\mathrm{A}=\mathrm{a}e^{\delta i},\quad \mathrm{B}=\mathrm{b}e^{\delta' i},\quad \mathrm{C}=\mathrm{c}e^{\delta'' i};$$

les parties réelles et les parties imaginaires des intégrales simples vérifiant séparément les équations différentielles, ces parties réelles

$$\begin{aligned}\xi&=\mathrm{a}\cos(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t+\delta),\\ \eta&=\mathrm{b}\cos(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t+\delta'),\\ \zeta&=\mathrm{c}\cos(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y+\mathrm{w}z-\mathrm{s}t+\delta'')\end{aligned}$$

[*] *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, par Cauchy; t. I, p. 7. — *Essais sur la Théorie mathématique de la lumière*, par C. Briot; p. 4.

représentent un mouvement vibratoire se propageant par ondes planes parallèles au plan

$$ux + vy + wz = 0.$$

La durée de la vibration est $T = \frac{2\pi}{s}$. Si l'on pose $k = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, la longueur de l'onde est $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, et la vitesse de propagation $\omega = \frac{\lambda}{T} = \frac{s}{k}$. Prenons pour plan des xy un plan perpendiculaire à l'onde incidente, nous aurons $w = 0$ pour l'onde incidente, et par conséquent pour toutes les ondes coexistantes; les normales à toutes ces ondes sont donc situées dans le plan xoy, c'est-à-dire dans un même plan perpendiculaire au plan de séparation. La constante v est aussi la même pour toutes les ondes. Si l'on appelle α, α', α'',... les angles que font ces normales avec l'axe ox; k, k', k'',..., ω, ω', ω'',... les valeurs correspondantes de k et ω, on a

$$v = k \sin\alpha = k' \sin\alpha' = k'' \sin\alpha'' = \ldots,$$

d'où

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{k'}{k} = \frac{\omega}{\omega'}, \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha''} = \frac{\omega}{\omega''}, \ldots.$$

5. J'arrive maintenant au principe de continuité. Remarquons que les équations du mouvement vibratoire, quand on néglige la dispersion, sont des équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles du second ordre des trois fonctions ξ, η, ζ des quatre variables indépendantes x, y, z, t [*].

Si l'on pose

$$\xi = \xi_1 e^{vy + wz - st}, \quad \eta = \eta_1 e^{vy + wz - st}, \quad \zeta = \zeta_1 e^{vy + wz - st},$$

ξ_1, η_1, ζ_1 étant des fonctions de la seule variable x, ces équations se réduisent à des équations linéaires entre ξ_1, η_1, ζ_1, $\frac{d\xi_1}{dx}$, $\frac{d\eta_1}{dx}$, $\frac{d\zeta_1}{dx}$, $\frac{d^2\xi_1}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta_1}{dx^2}$, $\frac{d^2\xi_1}{dx^2}$. On peut les remplacer par un système de six équations

[*] *Essais*, p. 10.

du premier ordre de la forme

$$\frac{d\xi_1}{dx} = \xi'_1, \quad \frac{d\eta_1}{dx} = \eta'_1, \quad \frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta'_1,$$

$$\frac{d\xi'_1}{dx} = \mathcal{L}\,\xi_1 + \mathcal{M}\,\eta_1 + \mathcal{N}\,\zeta_1 + \mathcal{P}\,\xi'_1 + \mathcal{Q}\,\eta'_1 + \mathcal{R}\,\zeta'_1,$$

$$\frac{d\eta'_1}{dx} = \mathcal{L}'\xi_1 + \mathcal{M}'\eta_1 + \mathcal{N}'\zeta_1 + \mathcal{P}'\xi'_1 + \mathcal{Q}'\eta'_1 + \mathcal{R}'\zeta'_1.$$

$$\frac{d\zeta'_1}{dx} = \mathcal{L}''\xi_1 + \mathcal{M}''\eta_1 + \mathcal{N}''\zeta_1 + \mathcal{P}''\xi'_1 + \mathcal{Q}''\eta'_1 + \mathcal{R}''\zeta'_1.$$

Les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$,... sont des constantes dans l'un et l'autre milieu; mais ils changent rapidement, tout en conservant des valeurs finies, quand on passe d'un milieu à l'autre, c'est-à-dire quand x varie de $-x'$ à $+x'$, x' étant une quantité très-petite. Si l'on admet que ξ_1, η_1, ζ_1, ξ'_1, η'_1, ζ'_1 conservent des valeurs finies dans le voisinage du plan de séparation [*], les trois dernières équations montrent que $\frac{d\xi'_1}{dx}$, $\frac{d\eta'_1}{dx}$, $\frac{d\zeta'_1}{dx}$ conservent aussi des valeurs finies quand x varie de $-x'$ à $+x'$, tout en éprouvant des changements rapides; il en résulte que leurs intégrales ξ'_1, η'_1, ζ'_1 n'éprouvent que des variations très-petites; il en est de même à plus forte raison de ξ_1, η_1, ζ_1 en vertu des trois premières équations. Ainsi, non-seulement les composantes ξ, η, ζ du mouvement vibratoire dans l'un et l'autre milieu doivent être respectivement égales pour $x = 0$, mais encore leurs dérivées premières $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$ par rapport à la coordonnée x perpendiculaire au plan de séparation. Il en résulte six équations de condition qui suffisent pour traiter le problème de la réflexion et de la réfraction à la surface de séparation de deux milieux quelconques, monoréfringents ou biréfringents.

---

[*] Il est évident, d'après la nature des choses, que ξ, η, ζ ou ξ_1, η_1, ζ_1 conservent des valeurs finies dans le voisinage du plan de séparation. Si les quantités ξ'_1, η'_1, ζ'_1 devenaient très-grandes, leurs dérivées $\frac{d\xi'_1}{dx}$, $\frac{d\eta'_1}{dx}$, $\frac{d\zeta'_1}{dx}$ seraient des quantités très-grandes d'un ordre supérieur; ce qui n'a pas lieu, en vertu des trois dernières équations, puisque les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$,... ont des valeurs finies.

II.

6. Nous allons appliquer cette méthode d'abord au cas de deux milieux isotropes séparés par une surface plane. Mais auparavant nous rappellerons les principales propriétés des vibrations dans un semblable milieu.

Les équations différentielles du mouvement vibratoire dans un milieu isotrope, quand on néglige la dispersion, sont de la forme [*]

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} - (g+h)\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + \dfrac{d^2\xi}{dy^2} + \dfrac{d^2\xi}{dz^2}\right) - 2h\,\dfrac{d\left(\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz}\right)}{dx} = 0, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} - (g+h)\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right) - 2h\,\dfrac{d\left(\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz}\right)}{dy} = 0, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - (g+h)\left(\dfrac{d^2\zeta}{dx^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dy^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dz^2}\right) - 2h\,\dfrac{d\left(\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz}\right)}{dz} = 0, \end{cases}$$

g et h étant deux constantes qui dépendent de la densité du milieu et de la loi des forces moléculaires.

Les constantes qui entrent dans l'expression d'une intégrale simple

$$\xi = A e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\eta = B e^{ux+vy+wz-st},$$
$$\zeta = C e^{ux+vy+wz-st},$$

doivent être assujetties à vérifier les relations

$$(2)\quad \begin{cases} [s^2 - (g+h)(u^2+v^2+w^2)]A - 2hu(uA + vB + wC) = 0, \\ [s^2 - (g+h)(u^2+v^2+w^2)]B - 2hv(uA + vB + wC) = 0, \\ [s^2 - (g+h)(u^2+v^2+w^2)]C - 2hw(uA + vB + wC) = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$(3)\quad [s^2 - (g+3h)(u^2+v^2+w^2)](uA + vB + wC) = 0.$$

---

[*] *Exercices*, t. I, p. 115. — *Essais*, p. 43.

Ces équations peuvent être vérifiées de deux manières : on doit avoir

(4) $$s^2 = (g + 3h)(u^2 + v^2 + w^2), \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{v} = \frac{C}{w},$$

ou bien

(5) $$uA + vB + wC = 0, \quad s^2 = (g + h)(u^2 + v^2 + w^2).$$

Le premier mode donne les vibrations longitudinales, le second les vibrations transversales.

Supposons, en effet, que les constantes u, v, w, s soient de la forme $\mathrm{u}i$, $\mathrm{v}i$, $\mathrm{w}i$, $\mathrm{s}i$; par le premier mode, on a

$$\delta = \delta' = \delta'', \quad \frac{\xi}{\mathrm{u}} = \frac{\eta}{\mathrm{v}} = \frac{\zeta}{\mathrm{w}}, \quad \omega^2 = g + 3h;$$

la vibration est rectiligne et perpendiculaire au plan de l'onde; c'est une vibration longitudinale. Par le second mode, on a

$$\omega^2 = g + h, \quad \mathrm{u}\xi + \mathrm{v}\eta + \mathrm{w}\zeta = 0;$$

la vibration est située dans le plan de l'onde; c'est une vibration transversale; deux des coefficients A, B, C restant arbitraires, la courbe décrite par chaque molécule d'éther pendant son mouvement est une ellipse quelconque dans le plan de l'onde.

7. Prenons l'axe ox dans le second milieu, et supposons le plan xoy perpendiculaire à l'onde plane incidente; cette onde plane a pour exponentielle caractéristique une exponentielle de la forme $e^{(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}$, dans laquelle u, v, s sont des quantités positives. Dans les exponentielles relatives aux mouvements simples coexistants, il faudra faire $v = \mathrm{v}i$, $\mathrm{w} = 0$, $s = \mathrm{s}i$. En vertu de ce qui précède, à un même système de valeurs de v, w, s correspondent dans le premier milieu quatre valeurs de u, données par les équations (4) et (5),

(6) $$u = \pm\sqrt{\mathrm{v}^2 - \frac{\mathrm{s}^2}{g + 3h}}, \quad \frac{A}{u} = \frac{B}{\mathrm{v}i}, \quad C = 0,$$

(7) $$u = \pm\sqrt{\mathrm{v}^2 - \frac{\mathrm{s}^2}{g + h}}, \quad Au + B\mathrm{v}i = 0.$$

Nous supposons que l'onde incidente est une onde transversale; cette vibration satisfait à l'équation (7) qui se réduit à $u = \pm \mathrm{u} i$; la solution $u = \mathrm{u} i$ reproduit l'onde incidente qui se rapproche de la surface de séparation; la solution $u = - \mathrm{u} i$ donne une onde transversale réfléchie qui s'éloigne de cette surface. Si les valeurs de u fournies par l'équation (6) sont imaginaires et de la forme $\pm \mathrm{u}_1 i$, elles donneront deux ondes longitudinales, l'une se rapprochant du plan de séparation, l'autre s'en éloignant. La seconde solution $u = - u_1 i$ est seule admissible; car, en vertu de l'ébranlement communiqué par l'onde incidente à la surface de séparation, il ne peut se produire évidemment dans l'un et l'autre milieu que des ondes qui se propagent en s'éloignant de cette surface. Si ces valeurs de u sont réelles, on a deux exponentielles de la forme $e^{\mathrm{U}_1 x + (\mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}$, ou $e^{-\mathrm{U}_1 x + (\mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}$. A la première correspond la vibration

$$\xi = \mathrm{a}\, e^{\mathrm{U}_1 x} \cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta), \quad \eta = \mathrm{a}\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{U}_1} e^{\mathrm{U}_1 x} \cos\left(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\zeta = 0,$$

parallèle au plan d'incidence et de forme elliptique; elle se propage par ondes planes parallèles au plan $y = 0$, avec une vitesse égale à $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}}$ ou $\frac{\omega}{\sin\alpha}$ dans le sens oy; c'est la vitesse même avec laquelle l'onde incidente communique l'ébranlement au plan de séparation. Mais, à cause de l'exponentielle $e^{\mathrm{U}_1 x}$, puisque la coordonnée x est négative dans le premier milieu, l'amplitude de la vibration diminue à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation; cette vibration reste donc concentrée dans le voisinage de ce plan.

L'autre exponentielle donnerait au contraire une vibration dont l'amplitude croîtrait indéfiniment à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation; cette solution n'est pas admissible.

Ainsi, dans tous les cas, trois vibrations peuvent coexister dans le premier milieu : la vibration transversale incidente, la vibration transversale réfléchie, et une troisième vibration qui se propage loin de la surface de séparation sous forme de vibration longitudinale, ou qui reste concentrée dans le voisinage de cette surface sous forme elliptique. Nous dirons avec Cauchy que la vibration est persistante dans le premier cas, évanescente dans le second cas. De sorte que l'état vibratoire du premier milieu est représenté par les formules

$$(8)\quad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{A}_1\, e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + a e^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{B}_1\, e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + b e^{(-\mathrm{u}_1 x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}e^{(\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i} + \mathrm{C}_1\, e^{(-\mathrm{u}x+\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

auxquelles on joindra les relations

$$(9)\qquad \mathrm{A}\mathrm{u} + \mathrm{B}\mathrm{v} = 0, \quad -\mathrm{A}_1\mathrm{u} + \mathrm{B}_1\mathrm{v} = 0, \quad \frac{a}{-\mathrm{u}_1} = \frac{b}{\mathrm{v}},$$

et que l'on réduira à leurs parties réelles. Les premiers termes se rapportent à l'onde incidente, les deuxièmes à l'onde transversale réfléchie, les troisièmes à l'onde longitudinale réfléchie que l'on a supposée persistante; si elle était évanescente, il suffirait de remplacer u_1 par $\mathrm{U}_1 i$, U_1 étant une quantité positive.

8. Pour passer du premier milieu au second, il suffit, dans les équations (6) et (7), de remplacer les deux constantes g et h par g' et h'. Si les racines de l'équation (7) sont imaginaires et de la forme $u = \pm \mathrm{u}' i$, elles fourniront deux ondes transversales persistantes; on ne prendra que la solution $u = \mathrm{u}' i$ qui donne une onde s'éloignant de la surface de séparation; l'autre, se rapprochant, n'est pas admissible. Si ces racines sont réelles, on a deux exponentielles de la forme $e^{-\mathrm{U}'x+(\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}$, ou $e^{\mathrm{U}'x+(\mathrm{v}y-\mathrm{s}t)i}$; à la première correspond une vibration

$$\begin{aligned} \xi &= \mathrm{a}\, e^{-\mathrm{U}'x} \cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta), \\ \eta &= \mathrm{a}\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{v}}\, e^{-\mathrm{U}'x} \cos\left(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \zeta &= \mathrm{c}\, e^{-\mathrm{U}'x} \cos(\mathrm{v}y - \mathrm{s}t + \delta''), \end{aligned}$$

de forme elliptique, se propageant par ondes parallèles au plan $y = 0$, dans le sens oy, avec la même vitesse $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{v}}$ que dans le premier milieu; l'amplitude de la vibration diminue à mesure qu'on s'éloigne du plan de séparation. L'autre exponentielle, donnant une vibration dont l'amplitude augmente indéfiniment à mesure qu'on s'éloigne de ce plan, doit être rejetée. Il en est de même des racines de l'équation (6). Ainsi, dans le second milieu, deux vibrations seulement pourront exister, l'une transversale, l'autre longitudinale, persistantes ou évanescentes. De sorte que l'état vibratoire du second milieu sera représenté par les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi = \mathrm{A}' e^{(\mathrm{u}'x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i} + a' e^{(\mathrm{u}'_1 x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}, \\ \eta = \mathrm{B}' e^{(\mathrm{u}'x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i} + b' e^{(\mathrm{u}'_1 x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}, \\ \zeta = \mathrm{C}' e^{(\mathrm{u}'x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t)i}, \end{cases}$$

auxquelles on joindra les relations

$$(11) \qquad \mathrm{A}'\mathrm{u}' + \mathrm{B}'\mathrm{v} = 0, \quad \frac{a'}{\mathrm{u}'_1} = \frac{b'}{\mathrm{v}},$$

et que l'on réduira encore à leurs parties réelles. Les premiers termes se rapportent à l'onde transversale réfractée, les seconds à l'onde longitudinale. On a supposé ces deux vibrations persistantes : si elles étaient évanescentes, il suffirait de remplacer u' et u'_1 par $\mathrm{U}'i$ et $\mathrm{U}'_1 i$, U' et U'_1 étant des quantités positives.

9. Posons

$$\omega^2 = g + h, \quad \omega'^2 = g' + h', \quad \omega_1^2 = g + 3h, \quad \omega_1'^2 = g' + 3h',$$
$$\mathrm{k} = \sqrt{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2},$$

et appelons α l'angle d'incidence, on a

$$\mathrm{v} = \mathrm{k}\sin\alpha, \quad \mathrm{s}^2 = \omega^2\mathrm{k}^2,$$

et les équations (6) et (7) donnent

$$(12) \qquad \begin{cases} \mathrm{u}' = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega'^2} - \sin^2\alpha}, \\ \mathrm{u}_1 = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2} - \sin^2\alpha}, \\ \mathrm{u}'_1 = \mathrm{k}\sqrt{\dfrac{\omega^2}{\omega_1'^2} - \sin^2\alpha}. \end{cases}$$

Les lettres ω et ω' représentent les vitesses de propagation des vibrations transversales dans les deux milieux, ω_1 et ω'_1 celles des vibrations longitudinales. Nous supposons les deux milieux transparents, c'est-à-dire les deux quantités ω^2 et ω'^2 positives. La vibration transversale réfractée sera persistante ou évanescente, suivant que $\sin\alpha$ sera plus petit ou plus grand que $\frac{\omega}{\omega'}$. Si les quantités ω_1^2 $\omega_1'^2$ sont négatives, les vibrations longitudinales seront toujours évanescentes; mais si ces quantités sont positives, elles seront persistantes ou évanescentes suivant la grandeur de l'angle d'incidence α.

III.

10. Pour avoir les conditions relatives à la surface de séparation, il faut, comme nous l'avons dit, égaler entre elles les valeurs auxquelles se réduisent pour $x = 0$ les composantes ξ, η, ζ du mouvement vibratoire considéré dans l'un et l'autre milieu, et égaler aussi leurs premières dérivées $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$. On obtient ainsi les six équations de condition

$$(13)\qquad \begin{cases} A + A_1 + a = A' + a', \\ B + B_1 + b = B' + b', \\ C + C_1 = C', \\ (A - A_1)u - a u_1 = A'u' + a'u'_1, \\ (B - B_1)u - b u_1 = B'u' + b'u'_1, \\ (C - C_1)u = C'u', \end{cases}$$

auxquelles il faut joindre les relations (9) et (11).

11. De la troisième et de la sixième des équations (13), on déduit immédiatement les deux formules

$$(14)\qquad C_1 = C\frac{u - u'}{u + u'},\quad C' = C\frac{2u}{u + u'},$$

qui suffisent pour résoudre la question, quand le rayon incident est polarisé en ligne droite et a sa vibration parallèle à oz.

Les quatre autres équations se rapportent au cas où le rayon incident est polarisé en ligne droite et a sa vibration située dans le plan d'incidence. En remplaçant A, A_1, a, A', a' par leurs valeurs tirées des relations (9) et (11), on obtient les quatre équations

$$(15)\qquad \begin{cases} (B - B_1)\frac{1}{u} + b\frac{u_1}{v^2} = B'\frac{1}{u'} - b'\frac{u'_1}{v^2}, \\ B + B_1 + b = B' + b', \\ B + B_1 - b\frac{u_1^2}{v^2} = B' - b'\frac{u_1'^2}{v^2}, \\ (B - B_1)u - bu_1 = B'u' + b'u'_1, \end{cases}$$

entre les quatre inconnues B_1, B', b, b'.

De la première et de la quatrième on déduit

$$B' = (B - B_1)\frac{u'(u^2 + v^2)}{u(u'^2 + v^2)};$$

de la seconde et de la troisième on déduit de même

$$b' = b\,\frac{u_1^2 + v^2}{u_1'^2 + v^2}.$$

En portant ces valeurs dans la quatrième équation, on a

$$b = (B - B_1)\frac{v^2(u^2 - u'^2)(u_1'^2 + v^2)}{u(u_1 + u'_1)(u'^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}.$$

En substituant les valeurs de B', b', b dans la seconde équation, on a enfin

$$B - B_1 = B\,\frac{2u(u'^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}{(u + u')[(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)]}.$$

On déduit de là les valeurs des inconnues

$$(16)\qquad \begin{cases} B_1 = B\,\frac{u - u'}{u + u'} \times \frac{(uu' - v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u + u')(u_1 - u'_1)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ B' = B\,\frac{2u'}{u + u'} \times \frac{(u^2 + v^2)(u_1u'_1 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ b = B\,\frac{2(u - u')}{u_1 + u'_1} \times \frac{v^2(u_1'^2 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}, \\ b' = B\,\frac{2(u - u')}{u_1 + u'_1} \times \frac{v^2(u_1^2 + v^2)}{(uu' + v^2)(u_1u'_1 + v^2) + v^2(u - u')(u_1 - u'_1)}. \end{cases}$$

IV.

12. Lorsque le rayon incident a sa vibration perpendiculaire au plan d'incidence, les vibrations longitudinales n'interviennent pas dans le phénomène; comme on a

$$\cot\alpha = \frac{u}{v}, \quad \cot\alpha' = \frac{u'}{v},$$

les formules (14) se mettent sous la forme

$$C_1 = -C\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}, \quad C' = C\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}. \tag{17}$$

Ce sont les formules trouvées par Fresnel.

Mais lorsque le rayon incident a sa vibration située dans le plan d'incidence, il est nécessaire d'avoir égard aux vibrations longitudinales. Dans l'incertitude où l'on est encore en ce qui concerne leur existence, on doit examiner successivement les différents cas qui peuvent se présenter. Considérons d'abord le cas où les deux vibrations longitudinales sont persistantes ainsi que la vibration transversale réfractée, et appelons α_1 et α'_1 les angles aigus que font les normales à ces deux ondes avec la perpendiculaire au plan de séparation; on aura de même

$$\cot\alpha_1 = \frac{u_1}{v}, \quad \cot\alpha'_1 = \frac{u'_1}{v},$$

et les équations (16) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
B_1 &= -B\frac{\sin(\alpha-\alpha')\cos(\alpha+\alpha'+\alpha_1-\alpha'_1)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)},\\
B' &= B\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha'\cos(\alpha_1-\alpha'_1)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)},\\
b &= -B\frac{2\sin^2\alpha_1\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)},\\
b' &= -B\frac{2\sin^2\alpha'_1\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha_1+\alpha'_1)\cos(\alpha-\alpha'-\alpha_1+\alpha'_1)}.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Comme on a

$$v = k\sin\alpha = k'\sin\alpha' = k_1\sin\alpha_1 = k'_1\sin\alpha'_1,$$

on en déduit

$$\frac{\sin\alpha}{\omega} = \frac{\sin\alpha'}{\omega'} = \frac{\sin\alpha_1}{\omega_1} = \frac{\sin\alpha'_1}{\omega'_1}.$$

Le cas que nous examinons se présentera si, les quantités ω_1^2 et ω'^2_1 étant positives, $\sin\alpha$ est plus petit que chacun des trois rapports $\frac{\omega}{\omega'}$, $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$.

13. Étudions en particulier le rayon transversal réfléchi et le rayon transversal réfracté, et supposons que le rayon incident ait sa vibration située dans le plan d'incidence. Il en sera de même du rayon réfléchi et du rayon réfracté. Appelons $o\varphi$, $o\varphi_1$, $o\varphi'$ des perpendiculaires à ces rayons dans le plan d'incidence, et faisant avec oy des angles aigus. Les vibrations des trois rayons transversaux pourront être représentées par

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{D}\cos(\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t),\\ \varphi_1 &= \mathrm{D}_1\cos(-\mathrm{u}x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t),\\ \varphi' &= \mathrm{D}'\cos(\mathrm{u}'x + \mathrm{v}y - \mathrm{s}t), \end{aligned}$$

D, D_1, D' étant des quantités positives ou négatives. On aura

$$\mathrm{B} = \mathrm{D}\cos\alpha,\quad \mathrm{B}_1 = \mathrm{D}_1\cos\alpha,\quad \mathrm{B}' = \mathrm{D}'\cos\alpha';$$

et par suite, en posant $\alpha_1 - \alpha'_1 = \varpi$,

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{D}_1 &= -\mathrm{D}\frac{\sin(\alpha-\alpha')\cos(\alpha+\alpha'+\varpi)}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\varpi)};\\ \mathrm{D}' &= \mathrm{D}\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\varpi}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha'-\varpi)}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules se réduiraient à celles de Fresnel si l'on avait $\varpi = 0$, ou $\alpha_1 = \alpha'_1$, c'est-à-dire si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales était la même dans les deux milieux.

14. Supposons maintenant que le rayon incident soit polarisé dans un azimut quelconque. Nous pouvons décomposer cette vibration en deux, l'une $\zeta = C\cos(ux + vy - st)$ dirigée suivant oz, l'autre $\varphi = D\cos(ux + vy - st)$ suivant $o\varphi$. Les formules (17) et (19) ne donnant pas de différence de phase, le rayon réfléchi et le rayon réfracté seront aussi polarisés en ligne droite. Appelons θ, θ_1, θ' les angles que font avec oz les trois vibrations, angles comptés de oz vers $o\varphi$, $o\varphi_1$, $o\varphi'$. On aura

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{D}{C}, \quad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{D_1}{C_1}, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{D'}{C'},$$

et par suite

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang}\theta_1 &= \operatorname{tang}\theta \times \frac{\cos(\alpha + \alpha' + \varpi)}{\cos(\alpha - \alpha' - \varpi)}, \\ \operatorname{tang}\theta' &= \operatorname{tang}\theta \times \frac{\cos\varpi}{\cos(\alpha - \alpha' - \varpi)}. \end{aligned} \right.$$

Les formules (20) déterminent la direction de la vibration transversale réfléchie et celle de la vibration transversale réfractée. Les formules (17) donnent les amplitudes. Ces formules (20) sont susceptibles d'une interprétation géométrique analogue à celle qui a été remarquée il y a longtemps par Mac-Cullagh sur les formules de Fresnel, et qui a été le point de départ de ses propres recherches sur ce sujet. Si l'on appelle plan de vibration le plan mené par la normale au plan de l'onde et la direction de la vibration, les formules (20) signifient que les trois plans de vibration du rayon incident, du rayon réfléchi et du rayon réfracté se coupent suivant une même droite située dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence et faisant un angle égal à ϖ avec l'onde réfractée. Lorsque $\varpi = 0$, cette droite coïncide avec la direction de la vibration réfractée.

V.

15. Supposons maintenant que, le rayon transversal réfracté étant toujours persistant, les deux vibrations longitudinales soient évanescentes, ce qui aura lieu si les quantités ω_1^2 et $\omega_1'^2$ sont négatives, ou bien si, ces quantités étant positives, $\sin\alpha$ est plus grand que chacun des rapports $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$, tout en étant plus petit que $\frac{\omega}{\omega'}$. Il suffira, comme

nous l'avons dit, de remplacer u_1 et u'_1 par $U_1 i$ et $U'_1 i$. Des relations (12) on déduit

$$\frac{U_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}}, \quad \frac{U'_1}{v} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}}.$$

Les formules (17) ne changent pas. Si, pour abréger, on pose

$$(21) \qquad \varepsilon = \frac{\frac{U_1}{v} - \frac{U'_1}{v}}{1 - \frac{U_1 U'_1}{v^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}}}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2 \sin^2\alpha}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1'^2 \sin^2\alpha}\right)}},$$

les équations (16) deviennent

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} B_1 &= -B \frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{\cos(\alpha + \alpha') + i\varepsilon \sin(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\ B' &= B \frac{2\sin\alpha' \cos\alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{1}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\ b &= B \frac{1 - \frac{U_1'^2}{v^2}}{\left(\frac{U_1}{v} + \frac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \frac{U_1}{v}\frac{U'_1}{v}\right)} \times \frac{2i\sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}, \\ b' &= B \frac{1 - \frac{U_1^2}{v^2}}{\left(\frac{U_1}{v} + \frac{U'_1}{v}\right)\left(1 - \frac{U_1}{v}\frac{U'_1}{v}\right)} \times \frac{2i\sin(\alpha - \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') - i\varepsilon \sin(\alpha - \alpha')}. \end{aligned} \right.$$

On en déduit, pour la vibration transversale réfléchie et la vibration transversale réfractée,

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} D_1 &= -D \frac{\tang(\alpha - \alpha')}{\tang(\alpha + \alpha')} \times \frac{1 + i\varepsilon \tang(\alpha + \alpha')}{1 - i\varepsilon \tang(\alpha - \alpha')}, \\ D' &= D \frac{2\sin\alpha' \cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha - \alpha')} \times \frac{1}{1 - i\varepsilon \tang(\alpha - \alpha')}. \end{aligned} \right.$$

16. Ces formules se réduiraient aux formules de Fresnel, si la quantité ε était nulle. Mais si cette quantité n'est pas nulle, les deux rayons transversaux, l'un réfléchi, l'autre réfracté, qui proviennent d'un même rayon incident polarisé en ligne droite dans un azimut quelconque, seront polarisés elliptiquement à cause de la différence de phase de leurs composantes. Soit $E\cos(ux+vy-st)$ la vibration incidente faisant avec oz l'angle θ compté de oz vers $o\varphi$; on a

$$C = E\cos\theta,\quad D = E\sin\theta.$$

Si l'on pose

$$(24)\qquad \tang\delta' = \varepsilon\tang(\alpha+\alpha'),\quad \tang\delta'' = \varepsilon\tang(\alpha-\alpha'),$$

les formules (23) deviennent

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} D_1 &= -D\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}e^{(\delta'+\delta'')i},\\ D' &= D\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}e^{\delta''i}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait $\delta = \delta' + \delta''$, la vibration transversale réfléchie a pour composantes les parties réelles des formules

$$\zeta = -E\cos\theta\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}e^{(-ux+vy-st)i},$$

$$\varphi_1 = -E\sin\theta\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}e^{(-ux+vy-st+\delta)i},$$

c'est-à-dire

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta &= -E\cos\theta\frac{\sin(\alpha-\alpha')}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(-ux+vy-st),\\ \varphi_1 &= -E\sin\theta\frac{\sin\delta''}{\sin\delta'}\cos(-ux+vy-st+\delta).\end{aligned}\right.$$

De même la vibration transversale réfractée a pour composantes

$$(27)\left\{\begin{aligned} \zeta &= E\cos\theta\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')}\cos(u'x+vy-st),\\ \varphi' &= E\sin\theta\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha\cos\delta''}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}\cos(u'x+vy-st+\delta'').\end{aligned}\right.$$

La différence de phase est $\delta = \delta' + \delta''$ pour le rayon réfléchi, δ'' pour le rayon réfracté.

17. Nous avons à étudier des vibrations de la forme

$$\zeta = P\cos st, \quad \varphi = Q\cos(st - \delta).$$

L'élimination de t donne l'ellipse

$$\frac{\zeta^2}{P^2} + \frac{\varphi^2}{Q^2} - 2\frac{\zeta}{P}\frac{\varphi}{Q}\cos\delta = \sin^2\delta.$$

Les angles θ_1 que font les axes de l'ellipse avec oz, angles comptés de oz vers $o\varphi$, seront donnés par la formule

$$\operatorname{tang} 2\theta_1 = \frac{2PQ}{P^2 - Q^2} \times \cos\delta.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tang}\Theta = \frac{Q}{P},$$

on a

$$\operatorname{tang} 2\theta_1 = \operatorname{tang} 2\Theta \times \cos\delta.$$

On peut reconnaître le sens du mouvement sur l'ellipse, à l'aide de la loi des aires,

$$\zeta\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\frac{d\zeta}{dt} = PQs.\sin\delta = \pm\, abs,$$

a et b étant les longueurs des demi-axes.

L'ellipse sera décrite de oz vers $o\varphi$ ou en sens inverse, suivant que la quantité PQ sin δ sera positive ou négative.

18. Pour le rayon réfléchi, on a

$$(28)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang}\theta \times \dfrac{\sin(\alpha+\alpha')\sin\delta''}{\sin(\alpha-\alpha')\sin\delta'}, \quad \operatorname{tang} 2\theta_1 = \operatorname{tang} 2\Theta \times \cos\delta, \\ \pm\, ab = \varepsilon E^2 \sin\theta\cos\theta\, \dfrac{\sin 2\alpha \operatorname{tang}^2(\alpha-\alpha')\cos^2\delta''}{\sin^2(\alpha+\alpha')}; \end{cases}$$

pour le rayon réfracté,

$$(29)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang}\theta \times \dfrac{\cos\delta''}{\cos(\alpha-\alpha')}, \quad \operatorname{tang} 2\theta_1 = \operatorname{tang} 2\Theta \times \cos\delta'', \\ \pm\, ab = \varepsilon E^2 \sin\theta\cos\theta\, \dfrac{4\sin^2\alpha'\cos^2\alpha\cos^2\delta''\sin(\alpha-\alpha')}{\sin^2(\alpha+\alpha')\cos^2(\alpha-\alpha')}. \end{cases}$$

Ces ellipses se réduisent à des lignes droites pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$; le sens du mouvement sur chacune d'elles change quand θ passe par ces valeurs o ou $\frac{\pi}{2}$; il dépend aussi du signe de ε. Si $\omega > \omega'$, les deux ellipses sont décrites dans le même sens; mais, pour deux observateurs placés sur le rayon réfléchi et sur le rayon réfracté, de manière que le rayon entre par les pieds et sorte par la tête, les mouvements vibratoires paraîtront s'effectuer en sens contraires.

19. Les formules de Fresnel étant très-approchées, il est probable que le coefficient d'ellipticité ε a une valeur absolue très-petite; c'est ce qui aura lieu si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est à peu près la même dans les deux milieux. Si l'on néglige le carré de ε, les formules (25) se réduisent à

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} D_1 &= -D\frac{\operatorname{tang}(\alpha-\alpha')}{\operatorname{tang}(\alpha+\alpha')}e^{\delta i},\\ D' &= D\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha+\alpha')\cos(\alpha-\alpha')}e^{\delta'' i};\end{aligned}\right.$$

ce sont les formules de Fresnel, à part la différence de phase.

Outre ces deux ondes planes transversales qui se propagent en s'éloignant du plan de séparation, il existe, comme nous l'avons dit, dans le voisinage de ce plan, et de part et d'autre, des vibrations elliptiques qui se propagent parallèlement au plan. Quoiqu'elles deviennent insensibles à une petite distance, elles ne jouent pas moins un rôle essentiel dans la transformation du mouvement.

Les formules (23) sont les mêmes que celles qui ont été données par Cauchy (*Exercices*, t. I^er^, p. 176) et vérifiées par M. Jamin dans les circonstances les plus favorables à la manifestation de la polarisation elliptique.

VI.

20. Examinons enfin le cas où la vibration transversale réfractée devient évanescente ainsi que les deux vibrations longitudinales.

Il faut remplacer u' par $U'i$,

$$\frac{U'}{V} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}},$$

et l'on a

$$C_1 = C\frac{u - U'i}{u + U'i},$$

$$B_1 = -B\frac{u - U'i}{u + U'i}\,\frac{\left(1 + \varepsilon\frac{U'}{v}\right) - i\frac{u}{v}\left(\frac{U'}{v} + \varepsilon\right)}{\left(1 + \varepsilon\frac{U'}{v}\right) + i\frac{u}{v}\left(\frac{U'}{v} + \varepsilon\right)},$$

ε ayant toujours la valeur (21). Si l'on pose

$$\tang\delta' = \frac{U'}{u} = \tang\alpha\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}},$$

$$\tang\delta'' = \cot\alpha\,\frac{\frac{U'}{v} + \varepsilon}{1 + \varepsilon\frac{U'}{v}},$$

il vient

$$C_1 = Ce^{-2\delta' i},$$

$$B_1 = -Be^{-2(\delta' + \delta'')i}.$$

Si le rayon incident est polarisé en ligne droite dans l'azimut θ, la vibration transversale réfléchie est polarisée elliptiquement et a pour composantes,

$$(31)\qquad \begin{cases} \zeta = E\cos\theta\cos(-ux + vy - st - 2\delta'), \\ \varphi_1 = E\sin\theta\cos(-ux + vy - st - 2\delta' - 2\delta'' + \pi). \end{cases}$$

La différence de phase est $\pi - 2\delta''$, et l'on a

$$\tang 2\theta_1 = \tang 2\theta \times \cos(\pi - 2\delta''),$$

$$\pm ab = E^2\sin\theta\cos\theta \times \sin 2\delta''.$$

Quand on néglige ε, la différence de phase est donnée par la formule

$$\tang\delta'' = \cot\alpha\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2\sin^2\alpha}};$$

on retombe sur celle de Fresnel qui donne l'angle double.

La vibration transversale réfractée s'est changée, comme les vibrations longitudinales, en une vibration elliptique n'existant que dans le voisinage du plan de séparation, mais seulement dans le second milieu, et se propageant avec la même vitesse $\frac{\omega}{\sin\alpha}$. Lorsque le rayon incident a sa vibration parallèle à oz, les vibrations longitudinales ne se produisent pas, et la vibration transversale évanescente rectiligne

$$\zeta = 2\mathrm{C}\cos\delta' e^{-\mathrm{U}'x}\cos(\nu y - st - \delta')$$

existe seule dans le second milieu. Une expérience bien connue de Fresnel a mis en évidence l'existence de cette vibration.

21. Il est à remarquer que tous les cas de la question sont compris dans les formules (17) et (19) du § IV. Il suffit d'y considérer certains angles comme devenant imaginaires. Supposons, par exemple, que la vibration transversale réfractée soit persistante et les deux vibrations longitudinales évanescentes. Les angles α_1 et α'_1 sont imaginaires, et l'on a

$$\cot\alpha_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha_1} - 1} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_1^2\sin^2\alpha} - 1} = i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2\sin^2\alpha}},$$

$$\cot\alpha'_1 = i\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega'^2_1\sin^2\alpha}},$$

$$\operatorname{tang}\varpi = -\frac{\cot\alpha_1 - \cot\alpha'_1}{1 + \cot\alpha_1\cot\alpha'_1} = -\varepsilon i.$$

Les équations (19) deviennent

$$\mathrm{D}_1 = -\mathrm{D}\frac{\sin(\alpha - \alpha')}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{\cos(\alpha + \alpha') - \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha + \alpha')}{\cos(\alpha - \alpha') + \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha - \alpha')},$$

$$\mathrm{D}'_1 = \mathrm{D}\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha}{\sin(\alpha + \alpha')} \times \frac{1}{\cos(\alpha - \alpha') + \operatorname{tang}\varpi\sin(\alpha - \alpha')};$$

en remplaçant $\operatorname{tang}\varpi$ par $-\varepsilon i$, on obtient les formules (23).

22. Il semble que l'expérience puisse décider la question en ce qui concerne l'existence des vibrations longitudinales. 1° Si ces vibrations ne peuvent pas se propager dans l'éther, c'est-à-dire si ω_1^2 et ω'^2_1 sont des quantités négatives, il faudra prendre les formules de la section V.

Quel que soit l'angle d'incidence, un rayon incident polarisé en ligne droite dans un azimut différent de 0 et de 90 degrés donnera naissance à un rayon réfléchi et à un rayon réfracté polarisés elliptiquement. 2° Si les vibrations longitudinales peuvent se propager dans l'éther, et si leur vitesse de propagation est moindre que celle des vibrations transversales, on prendra les formules de la section IV; le rayon réfléchi et le rayon réfracté seront toujours polarisés en ligne droite comme le rayon incident. 3° Si la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est réelle et plus grande que celle des vibrations transversales, il faudra prendre les formules de la section IV ou celles de la section V, suivant la grandeur de l'angle d'incidence. Tant que $\sin\alpha$ sera inférieur à chacun des rapports $\frac{\omega}{\omega_1}$, $\frac{\omega}{\omega'_1}$, on prendra les premières formules; mais quand $\sin\alpha$ sera plus grand que ces rapports, on prendra les secondes. Jusqu'à une certaine limite de l'angle d'incidence, on aura la polarisation rectiligne, au delà la polarisation elliptique.

VII.

23. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que l'onde incidente est une onde transversale; la même méthode peut être appliquée à la réflexion et à la réfraction d'une onde longitudinale. Cette onde donnerait naissance à deux ondes réfléchies, l'une longitudinale, l'autre transversale, et aussi à deux ondes réfractées. Les rayons transversaux auraient leurs vibrations rectilignes et situées dans le plan d'incidence. En appelant α_1 l'angle d'incidence, α, α', α'_1 les angles de la normale au plan de séparation avec le rayon transversal réfléchi, le rayon réfracté transversal et le rayon réfracté longitudinal, on obtient les formules

$$b_1 = b\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)\cos(\alpha_1 + \alpha'_1 + \alpha - \alpha')}{\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$b' = -b\frac{2\sin^2\alpha'_1\cos\alpha_1\cos(\alpha + \alpha')}{\sin\alpha_1\sin(\alpha_1 + \alpha'_1)\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$B = -b\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha_1\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

$$B' = b\frac{2\sin\alpha'\cos\alpha'\cos\alpha_1\sin(\alpha_1 - \alpha'_1)}{\sin(\alpha + \alpha')\cos(\alpha_1 - \alpha'_1 - \alpha + \alpha')},$$

analogues aux formules (18). Les lettres b, b_1, b', B, B' désignent les amplitudes des projections sur oy de la vibration incidente, des vibrations longitudinales réfléchie et réfractée, des vibrations transversales réfléchie et réfractée. On en déduit cette conséquence remarquable : c'est que si les vibrations longitudinales se propagent réellement dans l'éther, il serait possible par la réflexion ou la réfraction de les transformer partiellement en vibrations transversales, et de les rendre ainsi lumineuses.

La méthode qui précède ne repose sur aucune hypothèse concernant la densité de l'éther dans les milieux pondérables. On n'a fait usage que du principe de continuité, ou de l'accord des vibrations à la surface de séparation des deux milieux. Si l'on applique le théorème des forces vives aux résultats obtenus, on arrive à des conséquences conformes à l'hypothèse de Fresnel.

Dans un second Mémoire, nous appliquerons la même méthode aux milieux biréfringents.