JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE MATHIEU

Note sur la surface de l'onde

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 298-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__298_0>

NOTE SUR LA SURFACE DE L'ONDE;

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

Dans notre Mémoire sur la dispersion de la lumière, nous avons fait remarquer que la surface de l'onde qui se propage dans un corps solide homogène et d'élasticité variable dans tous les sens, est en général du cent cinquantième degré, et nous avons indiqué le principe sur lequel repose cette proposition; cependant, pour qu'elle soit démontrée en toute rigueur, il est nécessaire d'ajouter quelques explications.

Commençons par faire quelques remarques sur l'équation qui donne les abscisses des points de contact des tangentes à une courbe algébrique parallèles à une direction donnée ou celles des points de contact des plans tangents à une surface algébrique parallèles à un plan donné.

En premier lieu, considérons une courbe algébrique du degré m, ayant pour équation

$$M(x, y) = 0; \tag{1}$$

on aura l'équation dont nous venons de parler en éliminant y entre (1) et

$$\frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dy} = 0. \tag{2}$$

Soit

$$\varphi(x) = 0 \tag{3}$$

cette résultante. M. Liouville, dans un Mémoire qui renferme un grand nombre de résultats d'analyse et de géométrie et dont un extrait se trouve dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, a donné, au tome VII de son *Journal* (année 1841, p. 363), le moyen de calculer les premiers termes de cette résultante; mais, en particulier, il résulte de son analyse que l'équation (3) est du degré $m(m-1)$ toutes les fois que la fonction formée par la somme des termes de plus haut degré de l'équation (1) ne renferme pas de facteurs multiples.

Si la courbe a un point dont les coordonnées satisfont aux équations

$$(4) \qquad \frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0,$$

il est évident que son abscisse satisfait à la résultante (3), et même, d'après un théorème de M. Poncelet, les abscisses des points de rebroussement sont racines triples, et celles des points doubles (réels ou imaginaires) racines doubles [*]; mais ce qu'il nous suffit ici de remarquer, c'est que si la courbe a des points qui satisfont aux équations (4), leurs abscisses sont racines de l'équation (3), et que, dans le cas contraire, les racines de la résultante (3) seront toutes les abscisses de points de contact au nombre de $m(m-1)$.

En second lieu, considérons une surface dont l'équation du degré m est

$$(5) \qquad M(x, y, z) = 0;$$

on aura les coordonnées x des points de contact des plans tangents parallèles à un plan donné, en éliminant y, z entre les trois équations

$$(6) \qquad M = 0, \quad \frac{dM}{dy} + b\frac{dM}{dz} = 0, \quad \frac{dM}{dx} + a\frac{dM}{dz} = 0,$$

et désignons la résultante par

$$(7) \qquad \varphi(x) = 0.$$

M. Liouville a montré dans le Mémoire cité comment on pouvait cal-

[*] *Voir* le *Traité des Propriétés projectives des figures*, t. II, et les *Mathematische Werke* de Jacobi, t. II, p. 197.

culer les termes de cette équation dont le premier est du degré $m(m-1)^2$. Or, groupons dans M les termes de même degré et écrivons-le

$$M(x, y, z) = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^{m-1} f_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \ldots;$$

il faut, pour que sa méthode soit applicable, que l'on puisse tirer des deux premières équations (6), pour les porter dans la troisième, $m(m-1)$ systèmes de valeurs pour $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ sous la forme

$$\frac{y}{x} = \alpha + \frac{\alpha'}{x} + \frac{\alpha''}{x^2} + \ldots, \quad \frac{z}{x} = \beta + \frac{\beta'}{x} + \ldots;$$

ce qui sera possible, toutes les fois que l'on pourra tirer $m(m-1)$ systèmes de valeurs convenables pour α, β, α', β' au moyen des équations (*loc. cit.*, p. 366) :

$$(a)\quad \begin{cases} f(\alpha, \beta) = 0, \quad \dfrac{df}{d\alpha} + b\dfrac{df}{d\beta} = 0, \\ \dfrac{df}{d\alpha}\alpha' + \dfrac{df}{d\beta}\beta' + f_1 = 0, \\ \left(\dfrac{d^2f}{d\alpha^2} + b\dfrac{d^2f}{d\alpha\, d\beta}\right)\alpha' + \left(\dfrac{d^2f}{d\alpha\, d\beta} + b\dfrac{d^2f}{d\beta^2}\right)\beta' + \dfrac{df_1}{d\alpha} + b\dfrac{df_1}{d\beta} = 0. \end{cases}$$

Supposons cette méthode applicable : la surface n'aura ni ligne de striction, ni ligne de rebroussement, et si elle n'a non plus aucun point singulier dont les coordonnées satisfassent aux équations

$$\frac{dM}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dy} = 0, \quad \frac{dM}{dz} = 0,$$

la résultante (7) ne donnera que les abscisses des points de contact de $m(m-1)^2$ plans tangents parallèles à un plan donné.

Revenons maintenant à notre question. D'après le raisonnement que nous avons donné à la page 61 de ce volume, il *suffit* de prouver que la surface dont l'équation est

$$(8) \qquad F(u, v, w, s) = 0,$$

$\frac{u}{s}, \frac{v}{s}, \frac{w}{s}$ désignant les coordonnées, a bien en général $6 \times 5^2 = 150$ plans tangents parallèles à un plan donné. Comme il est évident que, si cette proposition est vraie dans un cas particulier, elle aura lieu à plus forte raison dans le cas général, faisons, à la page 57,

$$a = b = c = d = e = f = 0,$$
$$a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = e_1 = f_1 = g_2 = g_3 = h_1 = h_3 = k_1 = k_2 = 0;$$

alors les expressions de L_1, M_2, $P_3, \ldots$, M_1 se réduisent à

$$L_1 = M_2 = P_3 = 0,$$
$$P_2 = (kw + hv)u, \quad P_1 = (gu + kw)v, \quad M_1 = (hv + gu)w,$$

l'équation (8) devient

$$F = 2MP_1P_2 + (M_1^2 + P_2^2 + P_1^2)s^2 - s^6 = 0,$$

et l'expression résultant de la somme des termes du plus haut degré qui s'y trouvent est

$$2uvw(kw + hv)(gu + hw)(hv + gu).$$

La méthode citée pour arriver à l'équation (7) n'est pas immédiatement applicable, parce que la dernière expression renferme un facteur qui ne contient ni v ni w. Mais faisons une transformation de coordonnées en posant

$$u = \frac{u' + v'}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{u' - v'}{\sqrt{2}},$$

cette expression devient

$$(u' - v'^2)w\left[\frac{h}{\sqrt{2}}(u' - v') + kw\right]\left[\frac{g}{\sqrt{2}}(u' + v') + hw\right]$$
$$\times\left[\frac{h + g}{\sqrt{2}}u' + \frac{g - h}{\sqrt{2}}v'\right],$$

la fonction $f(\alpha, \beta)$ des équations (a) a pour expression

$$f(\alpha, \beta) = (1-\alpha)(1+\alpha)\beta\left(\frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{h}{\sqrt{2}}\alpha + k\beta\right)\left(\frac{g}{\sqrt{2}} + \frac{g}{\sqrt{2}}\alpha + h\beta\right)$$
$$\times\left(\frac{h+g}{\sqrt{2}} + \frac{g-h}{\sqrt{2}}\alpha\right),$$

et il est aisé de voir que les équations (a) permettront d'obtenir pour α, β, α', β' $m(m-1)$ systèmes de solutions finies et déterminées.

Ceci admis, nous n'avons plus besoin que de prouver que l'on ne peut satisfaire à la fois aux quatre équations

$$F = 0, \quad \frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0,$$

dont les trois dernières peuvent s'écrire

$$(b)\quad \begin{cases} (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{du} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{du} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{du} = 0, \\ (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{dv} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{dv} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{dv} = 0, \\ (P_2 s^2 + M_1 P_1)\dfrac{dP_2}{dw} + (P_1 s^2 + M_1 P_2)\dfrac{dP_1}{dw} + (M_1 s^2 + P_1 P_2)\dfrac{dM_1}{dw} = 0. \end{cases}$$

En les multipliant respectivement par u, v, w et les ajoutant, nous obtenons

$$(M_1^2 + P_2^2 + P_1^2)s^2 = -3M_1P_1P_2,$$

et, en remplaçant le premier membre par le second dans $F = 0$, nous avons

$$(9)\qquad M_1 P_1 P_2 + s^6 = 0.$$

Enfin, des équations (b) on tire

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dP_2}{du} & \dfrac{dP_1}{du} & \dfrac{dM_1}{du} \\ \dfrac{dP_2}{dv} & \dfrac{dP_1}{dv} & \dfrac{dM_1}{dv} \\ \dfrac{dP_2}{dw} & \dfrac{dP_1}{dw} & \dfrac{dM_1}{dw} \end{vmatrix} = 0;$$

remplaçant les dérivées par leurs valeurs

$$\frac{dP_2}{du} = kw + hv,\quad \frac{dP_2}{dv} = hu,\quad \frac{dP_2}{dw} = ku,$$

$$\frac{dP_1}{du} = gv,\quad \frac{dP_1}{dv} = kw + gu,\quad \frac{dP_1}{dw} = kv,$$

$$\frac{dM_1}{du} = gw,\quad \frac{dM_1}{dv} = hw,\quad \frac{dM_1}{dw} = hv + gu,$$

et faisant les réductions, on a

$$4ghkuvw = 0.$$

On devrait donc avoir $u = 0$, ou $v = 0$, ou $w = 0$. Soit par exemple $u = 0$, P_2 serait nul et l'équation (9) impossible, et il en est de même si l'on suppose $v = 0$ ou $w = 0$. Notre proposition est donc démontrée.

Pour prouver que la courbe qui est donnée par l'équation (c) de la page 67 a sa réciproque du douzième degré, il suffit de considérer le cas où l'on a $A = -\alpha$, $C = -\alpha$; alors l'équation se réduit à

$$-\alpha^2 u^4 - \alpha^2 w^4 + (\alpha^2 - B^2 + 2B\alpha)\, u^2 w^2 + s^4 = 0,$$

et, par la raison qu'elle ne renferme plus que des termes du quatrième degré et un terme constant, elle ne peut avoir de points doubles. D'ailleurs l'ensemble des termes du plus haut degré

$$-\alpha^2 u^4 - \alpha^2 w^4 + (\alpha^2 - B^2 + 2B\alpha)\, u^2 w^2$$

ne renferme pas de facteur multiple; donc la polaire réciproque est en effet du douzième degré, d'après ce que nous avons dit en commençant.

Il serait encore aisé de prouver que la surface de l'onde possède en général une ligne de rebroussement correspondante à une ligne d'inflexion de la surface (8) et une ligne de striction.

Dans le même Mémoire, nous avons fait remarquer que, si une surface n'a qu'un certain nombre de plans tangents parallèles à un plan donné, il ne s'ensuit pas que par une droite on ne peut lui mener que ce même nombre de plans tangents, et cela est vrai; mais nous avons eu le tort d'en conclure que l'on doit pouvoir mener à la surface de l'onde plus de six plans tangents par une droite donnée; on ne peut lui en mener que six, et cela résulte uniquement de ce que sa surface réciproque est du sixième degré.

Considérons une surface algébrique quelconque; menons le cône circonscrit d'un point arbitraire pris pour sommet; en ce point élevons le cône normal, c'est-à-dire le cône formé par les droites normales à tous les plans tangents du premier cône; le degré du cône normal indique le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par une droite quelconque. Lorsque cette surface est du degré m et a sa réciproque du degré $m(m-1)^2$, ce qui est le cas de la surface (8), son cône circonscrit est du degré $m(m-1)$ et le cône normal du degré $m(m-1)^2$; quant à la surface réciproque, elle a un cône circonscrit du degré $m(m-1)$, dont le cône normal est du degré m.