JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2, x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 280-282.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__280_0>

SUR LES DEUX FORMES

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2;$$

Par M. J. LIOUVILLE.

---

1. On aurait peut-être à vaincre de grandes difficultés si l'on cherchait une expression simple et générale des nombres

$$N(n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2)$$

et

$$N(n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2)$$

de représentations qu'un même entier n peut avoir séparément sous chacune des deux formes marquées en tête de cet article. Mais on obtient sans peine la valeur de la somme suivante,

$$\begin{gathered} 4N(n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2) \\ + 6N(n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2). \end{gathered}$$

Je me suis assuré, en effet, que cette valeur est égale à celle de cette autre somme,

$$\begin{gathered} N(3n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) \\ + 9N[n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)], \end{gathered}$$

dont les deux termes s'expriment tout de suite au moyen de ce que j'ai communiqué dans le cahier de juillet 1861 relativement à la forme

$$x^2 + 2(y^2 + z^2 + t^2),$$

qui peut s'écrire

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2.$$

On remarquera que

$$N[n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n divisible par 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N[n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = N(q = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2).$$

Je laisse d'ailleurs au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des considérations précédentes, et je n'ajoute même pas de vérifications numériques : il n'y a ici aucune difficulté.

2. Le théorème que nous venons de donner au n° **1** contient comme cas particulier celui que nous avons donné dernièrement dans le cahier d'avril (p. 131).

Remplaçons en effet n par $2n$ (n restant entier), et d'après le théorème du n° **1**, les deux sommes

$$\begin{gathered} 4N(2n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2) \\ + 6N(2n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2) \end{gathered}$$

et

$$N(6n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) + 9N[2n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)]$$

seront égales. Or on a évidemment, d'une part,

$$\begin{gathered} N(2n = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4zt + 4t^2) \\ = N(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2) \end{gathered}$$

et

$$N(2n = x^2 + 2y^2 + 6z^2 + 6t^2) = N(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2),$$

puis, d'autre part,

$$N(6n = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2) = N(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)$$

et

$$N[2n = 3(x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2)] = N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)].$$

Ayez égard à ces réductions, et vous retomberez sur le résultat inscrit dans le cahier d'avril. Tout cela tient à la liaison intime qui existe entre les deux formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

au sujet desquelles nous avons donné dans le temps tous les détails désirables.