JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MANNHEIM

Sur le déplacement d'un corps solide; nouvelle méthode pour déterminer les normales aux lignes ou surfaces décrites pendant ce déplacement

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 273-279.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__273_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le Déplacement d'un corps solide; nouvelle Méthode pour déterminer les normales aux lignes ou surfaces décrites pendant ce déplacement;

PAR M. MANNHEIM [*].

1. *Tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans son plan est une rotation autour du centre instantané de rotation.*

2. De cette proposition on déduit immédiatement que : *Les normales aux trajectoires des différents points d'une figure que l'on déplace d'une manière continue dans son plan passent toutes, à un instant quelconque du déplacement, par un même point.*

De là résulte une méthode que M. Chasles a fait connaître, pour déterminer les normales aux courbes décrites pendant le déplacement continu d'une figure de forme invariable.

3. Je me suis proposé de faire, pour le cas du déplacement continu d'un corps solide, ce que M. Chasles a fait pour le déplacement d'une figure plane.

C'est le résultat d'une partie de mes recherches sur cet objet que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

4. On sait que : *Tout déplacement infiniment petit d'un corps solide est un déplacement hélicoïdal autour de l'axe instantané de rotation glissant;* et le problème consiste à trouver la dépendance entre cet axe et les trajectoires des points du solide. Pour arriver à formuler

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (séance du 25 juin 1866).

cette dépendance, qui ne s'aperçoit pas immédiatement, il suffit de combiner la propriété qui vient d'être rappelée avec la suivante :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'un plan que l'on déplace d'une manière continue passent, à un instant quelconque du déplacement, par un point de ce plan [*].

5. On arrive ainsi à cet énoncé :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si l'on mène, parallèlement à un plan fixe arbitraire, les normales aux trajectoires des différents points d'un corps solide que l'on déplace d'une manière continue, ces normales s'appuient, à un instant quelconque du déplacement, sur une même droite parallèle à l'axe du déplacement.*

Cette droite passe par le foyer du plan arbitraire supposé entraîné : je l'appellerai l'*adjointe* de ce plan.

On remarquera que, dans cette manière d'exprimer la liaison entre les normales aux courbes décrites pendant le déplacement d'un solide, l'axe du déplacement n'intervient que par sa direction.

6. Ce théorème a des conséquences nombreuses; quelques-unes suffiront, je l'espère, pour en montrer l'importance.

Considérons dans un corps solide les points qui sont situés sur des droites parallèles entre elles, et appliquons le théorème fondamental en prenant pour plan fixe un plan (P) perpendiculaire à toutes ces droites. Par suite de cette position particulière de (P), les normales, parallèles à ce plan, aux trajectoires des points de cette droite sont perpendiculaires aux droites mêmes; elles sont donc aussi les normales

---

[*] C'est par l'énoncé de cette propriété que M. Chasles commence son beau Mémoire sur les *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace* (*Comptes rendus*, 26 juin 1843). Il donne le nom de *foyer* au point du plan mobile par lequel passent les plans normaux des trajectoires des points de ce plan. Il désigne sous le nom de *caractéristique* la droite suivant laquelle le plan mobile touche son enveloppe. Cette enveloppe est une développable que M. Chasles appelle *développable trajectoire*. J'adopterai, dans ce qui va suivre, toutes ces expressions, et, pour faciliter le langage, je dirai simplement l'*axe du déplacement*, au lieu de l'*axe instantané de rotation glissant*.

aux surfaces gauches engendrées par ces lignes. Nous pouvons donc dire :

Des droites A, B, C,..., *parallèles entre elles, liées d'une manière invariable et entraînées dans le même déplacement continu, engendrent des surfaces gauches qui jouissent de cette propriété : à un instant quelconque du déplacement, les normales à ces surfaces issues des points de* A, B, C,... *s'appuient sur une même droite, l'adjointe du plan perpendiculaire à* A, B, C,....

7. On sait que les normales issues de tous les points d'une génératrice d'une surface gauche appartiennent à un paraboloïde hyperbolique. D'après cela, le théorème précédent peut s'énoncer ainsi :

Des droites A, B, C,... *parallèles entre elles, liées d'une manière invariable et entraînées dans le même déplacement continu, engendrent des surfaces gauches qui jouissent de cette propriété : à un instant quelconque du déplacement, les paraboloïdes des normales de toutes ces surfaces ont une génératrice commune.*

8. Considérons maintenant une surface cylindrique; pendant son déplacement continu elle enveloppe une surface qui la touche suivant une certaine courbe : les trajectoires de chacun des points de cette courbe sont tangentes à la surface cylindrique. Par suite :

Une surface cylindrique, déplacée d'une manière continue, est, à un instant quelconque du déplacement, touchée par son enveloppe, suivant une ligne qui jouit de cette propriété : les normales à la surface cylindrique issues de tous les points de cette ligne s'appuient sur une même droite, qui est l'adjointe du plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre.

9. En particulier : *Des plans parallèles à une droite et liés entre eux d'une manière invariable sont entraînés dans le même déplacement; à un instant quelconque de ce déplacement, les plans normaux aux développables trajectoires de ces plans, menés respectivement par les caractéristiques de ceux-ci, passent par une même droite, l'adjointe du plan perpendiculaire à tous les plans entraînés.*

10. Ce théorème, appliqué à des plans passant par une même droite R, montre que réciproquement les caractéristiques de ces plans sont les projections d'une même ligne L, adjointe du plan perpendiculaire à R. On peut donc dire que ces caractéristiques appartiennent à la surface lieu de l'arête du dièdre droit mobile dont les faces passent constamment par les deux droites R et L. Ce lieu est un hyperboloïde; nous retrouvons ainsi ce théorème de M. Chasles :

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs caractéristiques forment un hyperboloïde à une nappe.

Mais nous voyons de plus, par la génération même de cet hyperboloïde, qu'il est particulier, puisqu'il en résulte que ses sections circulaires sont respectivement perpendiculaires à deux de ses génératrices. Nous pouvons dire aussi : *Lorsque des faisceaux de plans sont entraînés dans le même déplacement, chacun d'eux donne lieu à un hyperboloïde; l'un des systèmes de sections circulaires de tous ces hyperboloïdes est perpendiculaire à l'axe du déplacement.*

11. Nous avons considéré d'abord des droites parallèles entre elles, puis des plans parallèles à une même droite. Si l'on prend simultanément dans un corps solide des droites et des plans parallèles à une même droite, on aura, en vertu du théorème fondamental, une seule droite, adjointe du plan à la fois perpendiculaire à toutes les lignes et à tous les plans entraînés. Cette remarque est très-utile, comme nous allons le voir dans l'application que je vais faire des théorèmes précédents.

12. *Un trièdre de grandeur invariable se déplace suivant des conditions données; on demande de construire :* 1° *les caractéristiques de ses faces;* 2° *le plan tangent en un point quelconque de la surface lieu d'une de ses arêtes;* 3° *la tangente à la trajectoire d'un point quelconque.*

Désignons par (A), (B), (C) les trois faces du trièdre. Pour définir son déplacement, nous dirons, par exemple, que ces faces touchent trois surfaces données, deux de ces surfaces étant touchées respectivement par (A), (B) en des points situés sur deux courbes (a), (b) données.

Appelons a, b, c les points de contact de (A), (B), (C), à un instant quelconque du déplacement, avec les trois surfaces données, a et b

appartenant aux courbes (a), (b). La caractéristique de (A) est la tangente conjuguée en a à la tangente de (a); de même pour (B). Appelons α et β ces deux caractéristiques, et construisons la caractéristique γ de (C).

Les plans normaux à (A) et (B) menés par α et β se coupent suivant une droite L, parallèle à l'axe du déplacement. Menons la normale en c à la surface qui contient ce point, et prenons la trace de cette droite sur le plan normal à (B) qui contient β. En menant de cette trace une droite M parallèle à L, on a une ligne qu'il suffit de projeter sur (C) pour avoir la caractéristique γ de cette face. La tangente en c, au lieu (c) des points de contact analogues à celui-ci, n'est autre que la tangente conjuguée de la ligne que nous venons de déterminer.

Cherchons le plan tangent en un point quelconque d de l'intersection D des faces (A), (B) à la surface engendrée par cette ligne. La droite L, étant l'adjointe du plan perpendiculaire à D, est rencontrée par les normales à la surface gauche considérée. Pour avoir le plan tangent en d, il suffit donc de mener par D un plan perpendiculaire au plan de d et de L.

Enfin, pour construire la tangente à la trajectoire d'un point quelconque s entraîné dans le déplacement du trièdre, on mène par ce point un plan perpendiculaire à l'intersection D des faces (A), (B) : ce plan rencontre L en un certain point, la ligne qui le joint au point s est normale à la trajectoire de s. On opère ensuite de même au moyen de la droite M. On a ainsi deux normales qui définissent le plan normal, et par suite on a la tangente cherchée.

13. On voit, par cette application, que dans la méthode des normales qui résulte de mon théorème fondamental, il n'est pas question de l'axe du déplacement. Cet axe ne joue donc pas dans l'espace un rôle analogue au centre instantané sur le plan.

14. Si néanmoins on veut construire cet axe de déplacement, il suffit de remarquer qu'il est l'adjointe du plan perpendiculaire à sa direction. Nous avons dit que l'adjointe L d'un plan (P) passe par le foyer de ce plan. Par ce point, on mènera un plan perpendicnlaire à L : la trace de ce plan sur (P) rencontrera l'axe du déplacement à angle droit. Si l'on a les adjointes de deux plans, on obtiendra ainsi deux droites dont la perpendiculaire commune est l'axe du déplacement [*].

EXTRAIT DU JOURNAL *L'INSTITUT*.

Dans cette séance [**], M. Mannheim développe la communication qu'il a faite le 25 juin à l'Académie des Sciences, puis il ajoute :

Le théorème fondamental de cette communication a surtout pour objet de montrer la liaison qui existe entre les normales aux trajectoires des points d'un corps solide que l'on déplace d'une manière continue et la direction de l'axe de ce déplacement.

Si l'on n'a en vue que la détermination des normales aux lignes ou surfaces décrites pendant le déplacement du corps solide, il est avantageux de l'employer concurremment avec le théorème suivant dont il n'est qu'un cas particulier :

Un corps solide se déplace d'une manière continue, les normales aux trajectoires des points de ce corps qui s'appuient, à un instant quelconque du déplacement, sur une droite arbitraire, rencontrent une deuxième droite.

Ces deux droites, suivant une ancienne dénomination de M. Chasles, sont des *droites conjuguées* [***].

A proprement parler, ce théorème ne diffère que par la forme de celui-ci, qui est dû à M. Chasles :

Quand plusieurs plans passent par une même droite, leurs foyers sont sur une deuxième droite.

Il conduit à une solution très-simple du problème suivant :

Construire le plan normal à la trajectoire décrite par un point d'un corps solide assujetti, en se déplaçant, à remplir cinq conditions données.

Examinons, comme exemple, le cas où le corps doit toucher cinq surfaces données.

---

[*] M. Poncelet a construit l'axe du déplacement, connaissant les vitesses de trois points d'un corps solide en mouvement. M. Chasles a construit l'axe du déplacement, connaissant les trajectoires de trois points du corps solide que l'on déplace. Dans les conditions qui définissent le déplacement du trièdre de notre application, on ne donne la trajectoire d'aucun point.

[**] Séance du 14 juillet 1866 (Société Philomathique).

[***] *Voir* le Mémoire présenté à l'Académie des Sciences par M. Chasles dans la séance du 26 juin 1843. Dans une communication faite à l'Académie le 3 juin 1861, M. Chasles désigne ces mêmes droites sous le nom d'*axes de rotation conjugués*.

Considérons à un instant quelconque les points où la surface du corps mobile touche ces surfaces. Menons en ces points les normales aux surfaces qui les contiennent. Prenons, parmi ces cinq normales, deux groupes de quatre droites; construisons les deux droites rencontrant à la fois les quatre lignes de chacun de ces groupes. On obtient ainsi deux couples de *droites conjuguées*.

Les deux droites issues d'un point quelconque du corps solide, qui s'appuient sur les droites de chacun de ces couples, déterminent en ce point le plan normal cherché.

Lorsqu'un corps solide n'est assujetti qu'à quatre conditions, ses points se déplacent sur des surfaces; à un instant quelconque, les normales à toutes ces surfaces s'appuient sur deux droites.

Appliquées à l'étude du déplacement continu d'une droite dans l'espace, ces théorèmes permettent de déterminer facilement le plan tangent à certaines surfaces réglées.

On arrive ainsi, par exemple, à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface gauche engendrée par une droite tangente à une surface donnée et osculatrice à une deuxième surface.

Cette surface gauche est circonscrite aux deux surfaces directrices; comme conséquence de ce qui précède, on construit aussi la tangente à la courbe suivant laquelle elle touche l'une de ces surfaces directrices.