JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Extrait d'une lettre adressée à M. Besge

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 221-224.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__221_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. BESGE PAR M. J. LIOUVILLE.

« ... J'aurai à vous parler de formes quadratiques, primitives ou non, dont un au moins des coefficients extrêmes devra être impair. Il s'agit de formes binaires et celles que j'indique sont les seules qui puissent représenter des nombres impairs. Permettez-moi donc, pour abréger, de les appeler tout simplement *formes impaires*.

» Sous le bénéfice de cette convention, soit k un entier donné, positif et $\equiv 3 \pmod{8}$; et désignons par $F(k)$ le nombre des classes de formes impaires, primitives ou non, dont le déterminant est égal à $-k$. On trouvera sans peine $F(3) = 1$, puis

$$F(11) = 3,\quad F(19) = 3,\quad F(27) = 4,\quad F(35) = 6,\quad F(43) = 3,\quad \text{etc.};$$

la valeur de $F(27)$ résulte, par exemple, de ce que l'on a pour le déterminant -27 les quatre formes impaires distinctes

$$x^2 + 27y^2,\quad 3x^2 + 9y^2,\quad 3x^2 + 2xy + 7y^2,\quad 3x^2 - 2xy + 7y^2,$$

dont la seconde doit être comptée ici, quoique non primitive. Pour aller plus loin dans le calcul de $F(k)$, on possède aujourd'hui des procédés commodes.

» Maintenant considérons la suite décroissante de nombres positifs

$$k,\quad k - 4.1^2,\quad k - 4.2^2,\quad k - 4.3^2,\ldots,\quad k - 4\omega^2,$$

ω étant le plus grand entier, pair ou impair, qu'on puisse prendre en laissant

$$k - 4\omega^2 > 0.$$

Les nombres dont il s'agit sont tous $\equiv 3 \pmod{4}$, mais alternativement $\equiv 3$, puis $\equiv 7 \pmod{8}$; le premier k étant $\equiv 3 \pmod{8}$, comme on l'a dit plus haut. Soit h un quelconque de ces nombres k, $k-4.1^2$, etc., et considérons non plus toutes les classes de formes quadratiques impaires de déterminant $-h$, mais seulement parmi ces classes celles qui sont ambiguës. Elles se rangeront en deux catégories bien distinctes, suivant que le plus petit entier qu'elles peuvent représenter, et qui est toujours impair, sera $\equiv 1 \pmod{4}$ ou au contraire $\equiv 3 \pmod{4}$. Supposons qu'il y ait n_1 classes appartenant à la première catégorie et n_2 appartenant à la seconde catégorie quand $h=k$, c'est-à-dire quand il s'agit du déterminant $-k$. Supposons ensuite que, pour l'ensemble des autres valeurs de h, savoir

$$k-4.1^2,\quad k-4.2^2,\ldots,\quad k-4\omega^2,$$

auxquelles répondent des déterminants toujours négatifs, mais numériquement plus petits que k, on obtienne p_1 classes rentrant dans la première catégorie et p_2 rentrant dans la seconde. Enfin, soit

$$\varepsilon = n_1 - n_2 + 2(p_1 - p_2).$$

Vous voyez que les classes de formes appartenant au déterminant $-k$ dans l'une ou dans l'autre des deux catégories indiquées ci-dessus ne sont comptées qu'une fois, tandis que celles qui se rapportent aux déterminants suivants sont comptées deux fois dans le calcul de ε.

» Cela posé, j'ai reconnu qu'il existe une relation bien simple entre le nombre ε, ainsi déduit de la considération de nos deux catégories de formes ambiguës, et le nombre $F(k)$ des classes de formes quadratiques impaires de déterminant $-k$. J'ai trouvé, en effet, que l'on a toujours

$$\text{(A)}\qquad \varepsilon = F(k).$$

Il me semble que le théorème exprimé par cette équation n'est pas indigne d'intérêt. On le conclut, du reste, aisément, d'une formule que j'ai donnée (cahier de février 1862, p. 44, lig. 2) dans une lettre adressée à M. Hermite. La formule à laquelle je fais allusion conduit en outre à d'autres conséquences curieuses dont je n'ai pas à parler pour le moment.

» Revenant à nos classes de formes ambiguës impaires et aux deux catégories entre lesquelles elles se partagent, représentons par N_1 le nombre complet de celles qui appartiennent à la première catégorie et par N_2 le nombre complet de celles qui appartiennent à la seconde catégorie. Nous aurons évidemment

$$N_1 = n_1 + p_1, \quad N_2 = n_2 + p_2,$$

d'où l'on conclura sans peine que l'équation (A) pourrait être remplacée par celle-ci

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2}[F(k) + n_1 - n_2].$$

Mais la manière la plus nette d'exprimer notre théorème serait peut-être d'écrire

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}[F(k) + n_2 - n_1];$$

alors le second membre ne dépendrait que du déterminant $-k$, et le premier de déterminants négatifs à valeur numérique moindre.

» Quoi qu'il en soit, vérifions l'équation

$$\varepsilon = F(k)$$

sur quelques exemples, en laissant de côté celui de $k = 3$ pour lequel la vérification est immédiate.

» Quand $k = 11$, comme on a

$$11 - 4.1^2 = 7,$$

les formes ambiguës à considérer sont

$$x^2 + 11y^2, \quad x^2 + 7y^2.$$

De la première, on conclut que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0;$$

de la seconde, que

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 0.$$

Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(11)$, comme le veut notre théorème.

» Pour $k = 19$, comme on a

$$19 - 4.1^2 = 15, \quad 19 - 4.2^2 = 3,$$

les formes ambiguës à considérer sont

$$x^2 + 19y^2, \quad x^2 + 15y^2, \quad 3x^2 + 5y^2, \quad x^2 + 3y^2.$$

De la première, on conclut que

$$n_1 = 1, \quad n_2 = 0;$$

des trois autres, que

$$p_1 = 2, \quad p_2 = 1.$$

Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(19)$; c'est le résultat annoncé.

» Pour $k = 27$, quatre formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 27y^2, \quad 3x^2 + 9y^2,$$

d'où $n_1 = 1$, $n_2 = 1$; puis

$$x^2 + 23y^2, \quad x^2 + 11y^2,$$

d'où $p_1 = 2$, $p_2 = 0$. Donc $\varepsilon = 4$, partant $\varepsilon = F(27)$.

Pour $k = 35$, quatre formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 35y^2, \quad 5x^2 + 7y^2,$$

d'où $n_1 = 2$, $n_2 = 0$; puis

$$x^2 + 31y^2, \quad x^2 + 19y^2,$$

d'où $p_1 = 2$, $p_2 = 0$. Donc $\varepsilon = 6$, partant $\varepsilon = F(35)$.

» Enfin, pour $k = 43$, six formes ambiguës à considérer; d'abord

$$x^2 + 43y^2,$$

d'où $n_1 = 1$, $n_2 = 0$; puis

$$x^2 + 39y^2, \quad 3x^2 + 13y^2, \quad x^2 + 27y^2, \quad 3x^2 + 9y^2, \quad x^2 + 7y^2,$$

d'où $p_1 = 3$, $p_2 = 2$. Donc $\varepsilon = 3$, partant $\varepsilon = F(43)$. Vous voyez que cette fois encore la vérification cherchée a lieu. »