JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 211-216.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__211_0>

SUR LA FORME

$$x^2+3y^2+az^2+3at^2;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2+3y^2+az^2+3at^2,$$

ou l'entier constant a est un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $6l+1$, $6l-1$. Ce théorème consiste en ce que, si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N(q=x^2+3y^2+az^2+3at^2)$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2+3y^2+az^2+3at^2,$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N(a^\alpha q=x^2+3y^2+az^2+3at^2)$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N(a^\alpha q=x^2+3y^2+az^2+3at^2)$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q=x^2+3y^2+az^2+3at^2$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

2. Le cas de a premier $6l-1$, c'est-à-dire non diviseur de x^2+3y^2, est très-facile. Alors en effet l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$$

ne peut avoir lieu, avec un exposant $\alpha > 0$, qu'autant que x et y sont tous les deux divisibles par a. On pourra donc faire $x = ax_1$, $y = ay_1$, x_1 et y_1 étant des entiers, d'où l'on conclura que l'équation proposée se ramène à celle-ci

$$a^{\alpha-1} q = z^2 + 3t^2 + ax_1^2 + 3ay_1^2,$$

qui est de même forme, mais où l'exposant de a dans le premier membre est moindre d'une unité. Ayant ainsi reconnu que la valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}\,(a^{\alpha-1} q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

on en conclura, en continuant, qu'elle ne dépend pas de l'exposant et qu'elle ne diffère pas de celle de

$$\mathrm{N}\,(q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

qu'on suppose donnée.

3. Désormais donc nous ne considérerons plus qu'un nombre premier a de la forme

$$6l + 1.$$

Cela étant, je dis que l'on peut sans inconvénient supposer q non divisible par 3. En effet l'équation

$$3q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2$$

ne peut avoir lieu, vu la forme indiquée de a, qu'en prenant x et z multiples de 3; dès lors, en posant $x = 3x'$, $z = 3z'$, on se débarrassera du facteur 3 par la division sans que le second membre change de forme, et il suffirait de répéter cette opération plusieurs fois, si 3 se présentait avec un exposant plus élevé.

Ce qui précède compris, a étant premier $6l + 1$, q étant premier à $3a$, je ne m'occupe du nombre

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

qu'en tant qu'il dépend de α, et je le désigne par

$$\psi(\alpha);$$

en particulier je fais

$$\mathrm{N}\,(q = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = \psi(0).$$

La valeur de

$$\psi(0)$$

est supposée connue, et il s'agit d'en déduire celle de

$$\psi(\alpha).$$

Soit

$$q = 2^\mu m,$$

m étant un entier impair naturellement premier à $3a$ comme l'était q lui-même; nous distinguerons deux cas, suivant que l'on aura $\mu = 0$, partant $q = m$, ou bien au contraire $\mu > 0$.

4. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair $q = m$. Je trouve qu'il existe alors entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha + 1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{8\,(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\,\zeta_1(m),$$

où

$$\zeta_1(m)$$

désigne comme d'ordinaire la somme des diviseurs de m. Cette relation n'est autre chose qu'une équation aux différences finies très-facile à intégrer, et l'on en tire

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Telle est donc la valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

celle de ψ (o) étant

$$\mathrm{N}\,(m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2).$$

Soit, comme exemple, $m = 1$; on aura alors

$$\zeta_1(m) = 1, \quad \psi(0) = 2,$$

et notre formule donnera

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a+1}(-1)^\alpha,$$

quel que soit l'exposant α. Pour $\alpha = 1$, on trouve, comme il était aisé de le prévoir,

$$\mathrm{N}\,(a = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = 6.$$

Pour $\alpha = 2$, on obtient

$$\mathrm{N}\,(a^2 = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2) = 8a + 2.$$

Et ainsi de suite.

5. Considérons maintenant un entier pair, $q = 2^\mu m$. L'exposant μ étant > 0, la relation qu'on trouve encore entre deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha), \quad \psi(\alpha + 1)$$

devient

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{8(2^{\mu+1} - 3)(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1} \zeta_1(m).$$

Cette équation aux différences finies est plus compliquée que la précédente, mais dans son second membre seulement, et si l'on pose

$$(2^{\mu+1} - 3)\zeta_1(m) = \varpi_\mu(m),$$

elle n'en diffère plus que par le changement de

$$\zeta_1(m)$$

en

$$\varpi_\mu(m).$$

En l'intégrant, on aura donc

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} \varpi_\mu(m) + (-1)^\alpha \left[\psi(0) - \frac{4}{a+1} \varpi_\mu(m)\right].$$

Dans le cas de

$$\mu > 0,$$

la valeur générale de

$$\mathrm{N}\,(2^\mu a^\alpha m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} \varpi_\mu(m) + (-1)^\alpha \left[\psi(0) - \frac{4}{a+1} \varpi_\mu(m)\right].$$

Prenons, par exemple,

$$\mu = 1,$$

en sorte qu'il ne s'agisse que d'entiers impairement pairs. Nous aurons dans ce cas

$$\varpi_\mu(m) = \zeta_1(m).$$

Il faut en conclure que la valeur de

$$N\left[2a^{\alpha}m = x^2 + 3y^2 + a(z^2 + 3t^2)\right]$$

est

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^{\alpha}\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Cette valeur, semblable en apparence à celle que nous avons donnée pour

$$N(a^{\alpha}m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2)$$

au n° **4**, fournira néanmoins des résultats très-différents parce que la valeur de $\psi(0)$ n'est pas la même de part et d'autre. Au n° **4**, où l'on s'occupait d'entiers impairs, on avait

$$\psi(0) = N(m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2),$$

tandis qu'ici, traitant d'entiers impairement pairs, on doit prendre

$$\psi(0) = N(2m = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2).$$

Ainsi, en particulier, pour $m = 1$, on avait tout à l'heure $\zeta_1(m) = 1$ et $\psi(0) = 2$. Ici on aura encore $\zeta_1(m) = 1$, mais $\psi(0) = 0$; d'où l'on pourra conclure pour

$$N\left[2a^{\alpha} = x^2 + 3y^2 + az^2 + 3at^2\right]$$

l'expression que voici :

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{4}{a+1}(-1)^{\alpha}.$$

Je ne crois pas avoir besoin d'insister davantage sur ces détails qui ne peuvent offrir au lecteur aucune difficulté.