JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MANNHEIM

Transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 193-210.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__193_0>

TRANSFORMATION

par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure;

PAR M. **MANNHEIM**.

1. Dans une brochure sur la *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques*, que j'ai publiée en 1857 [*], j'ai résolu deux problèmes énoncés ainsi :

1° *Transformer à l'aide de la théorie des polaires réciproques une relation métrique quelconque, sans lui faire subir aucune préparation.*

2° *Déterminer immédiatement les différentes formes sous lesquelles se serait présenté le résultat de la transformation, si l'on avait opéré sur différentes formes de la relation donnée.*

Pour résoudre le premier problème, j'ai donné l'expression d'un segment de droite au moyen des éléments de sa figure polaire réciproque. Cette expression conduit à la solution complète de la transformation des relations métriques de longueurs.

Présentée sous des formes très-diverses, en vue de la solution du second problème, cette expression permet d'arriver rapidement à des résultats simples, et par cela même intéressants; néanmoins, il est toujours utile d'examiner si l'introduction d'éléments spéciaux ne conduirait pas à des simplifications inattendues. Ce travail est un exemple à l'appui de cette observation. L'expression du rayon de courbure d'une courbe plane, devient, en effet, très-simple lorsqu'on y introduit le rayon de courbure de la polaire réciproque de cette courbe.

[*] Mallet-Bachelier, quai des Augustins 55, Paris.

On peut arriver à cette élégante expression en partant des formules démontrées dans ma brochure, mais afin de ne rien emprunter d'étranger à ce *Journal*, je la recherche directement.

Je considère ensuite les courbes gauches, isolées ou tracées sur une surface. Le problème à résoudre, quant aux rayons de courbure, est toujours la détermination d'une formule où n'entrent que des éléments de la figure polaire réciproque. Dans tous les cas, ces formules une fois obtenues, la transformation d'une propriété relative aux rayons de courbure se réduit à de simples substitutions.

N. B. — Pour les questions de Géométrie plane, je prends toujours une circonférence de cercle pour courbe directrice. Les points sont désignés par une lettre italique, leurs polaires par la même lettre majuscule romaine.

Pour la Géométrie de l'espace, la surface directrice est une sphère. Les points sont toujours désignés par une lettre italique et leurs polaires par la même lettre majuscule romaine, placée entre parenthèses.

Les droites sont désignées par une lettre majuscule romaine, sans parenthèses, et leurs polaires par la même lettre majuscule de ronde.

FORMULE DE TRANSFORMATION RELATIVE AU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE.

2. Désignons par ρ_a le rayon de courbure correspondant au point a d'une courbe plane (*fig.* 1).

La polaire du point a est la droite A qui touche la polaire réciproque de la courbe donnée en un point b; je désigne par ρ_{A} le rayon de courbure de cette polaire au point de contact b de la tangente A.

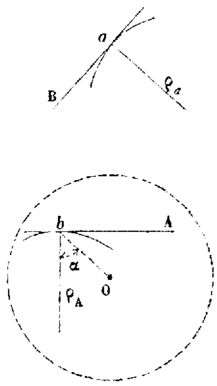
Le cercle osculateur de la courbe en a a pour polaire réciproque une conique, ayant pour foyer le centre O du cercle directeur et osculatrice en b à la polaire réciproque de la courbe donnée (**115** et **73**) [*].

Le rayon de ce cercle osculateur est égal à l'inverse du paramètre

[*] Les numéros de renvoi se rapportent au *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciroques* de M. Poncelet.

de cette conique [*], et comme on connaît la relation qui existe entre ce paramètre et le rayon de courbure en un point quelconque de cette

Fig. 1.



conique, on a tout de suite la formule de transformation cherchée.

Désignons par p le paramètre de la conique osculatrice, de foyer O, par ρ_A le rayon de courbure de cette courbe en b et par α l'angle que fait ce rayon avec bO; on a, par une relation établie dans la plupart des Traités de calcul différentiel,

$$p = \rho_A \cos^3 \alpha;$$

et comme, d'après ce que nous venons de dire, $\rho_a = \frac{1}{p}$, il vient

$$\rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \alpha}.$$

Telle est la formule qui lie le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de sa transformée polaire.

---

[*] Cette propriété, que j'ai indiquée au bas de la page 34 de ma brochure, est presque évidente lorsque l'on considère la tangente au cercle osculateur, qui est parallèle à l'axe focal de la transformée de ce cercle.

La distance du centre du cercle directeur au pôle de cette tangente, n'est autre dans la conique que l'ordonnée correspondant au foyer, c'est-à-dire le paramètre de cette courbe.

Comme nous aurons constamment à nous servir d'angles, tels que α, compris entre le rayon de courbure ρ_A et la droite bO qui joint le point b, auquel correspond ρ_A, au centre O du cercle directeur, je les désignerai par les rayons de courbure auxquels ils se rapportent.

Avec cette convention, la formule de transformation du rayon de courbure s'écrit

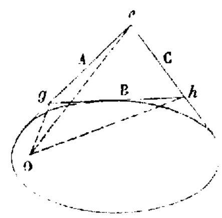
$$\rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \rho_A}. \tag{1}$$

3. Pour appliquer cette expression, nous allons transformer le théorème suivant, démontré à la page 165 du deuxième volume des *Applications d'Analyse et de Géométrie* de M. Poncelet.

THÉORÈME I. — *Lorsqu'une courbe du troisième ordre est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle abc, le produit des rayons de courbure correspondant aux sommets a, b, c est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle abc.*

Soit ABC (*fig.* 2) le triangle polaire réciproque du triangle *abc* par

FIG. 2.



rapport à une circonférence dont le centre est O [*]. La courbe du troisième ordre a pour transformée une courbe de troisième classe à la fois inscrite et circonscrite au triangle ABC. Le cercle circonscrit au triangle *abc* se transforme en une conique inscrite au triangle ABC, ayant pour foyer le point O centre du cercle directeur.

En désignant par ρ_a le rayon de courbure au point a de la courbe

---

[*] Je n'ai indiqué sur cette figure que le centre de la circonférence directrice; j'agirai toujours ainsi pour les figures qui suivront.

donnée du troisième ordre, on a, par la formule (1),

$$\rho_a = \frac{1}{\rho_A \cos^3 \rho_A} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho_A \sin^3(A, eO)}.$$

Les rayons de courbure ρ_b, ρ_c sont exprimés par des formules analogues. Quant au rayon du cercle qui passe par les sommets a, b, c du triangle, il est égal à $\frac{1}{p}$, p désignant le paramètre de la conique transformée de ce cercle.

La relation qui exprime le théorème I se transforme donc, en appliquant ces formules, dans la relation suivante :

$$\frac{1}{\rho_A \sin^3(A, eO) \times \rho_B \sin^3(B, gO) \times \rho_C \sin^3(C, hO)} = \frac{1}{p^3},$$

d'où

$$\rho_A \rho_B \rho_C = \frac{p^3}{\sin^3(A, eO) \sin^3(B, gO) \sin^3(C, hO)}.$$

De cette relation, je vais déduire deux propositions :

1° L'une exprime le produit des rayons de courbure d'une courbe de troisième classe, à la fois inscrite et circonscrite au triangle ABC.

2° L'autre est relative à toutes les sections coniques tangentes aux trois côtés du triangle ABC.

Je commence par cette dernière; cela me permettra d'énoncer ensuite sous une forme élégante la première proposition, qui est le résultat proprement dit de la transformation.

Le triangle ABC et la courbe de troisième classe étant donnés, la relation que nous venons de trouver est vraie, quelle que soit la conique tangente aux côtés du triangle ABC. Or le premier membre de cette relation est constant, nous voyons donc que pour une conique quelconque inscrite au triangle ABC, on a

$$\frac{p}{\sin(A, eO) \sin(B, gO) \sin(C, hO)} = \text{const.}$$

Afin de préciser, cherchons cette constante. Pour cela, considérons le cas où la conique se confond avec le cercle inscrit au triangle ABC.

Le foyer de la conique et son paramètre sont maintenant le centre et le rayon de ce cercle inscrit. Quant aux angles (A, eO), (B, gO), (C, hO) ils deviennent les demi-angles des angles A, B, C du triangle ABC.

La constante de la relation précédente est donc, en désignant par r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC,

$$\frac{r}{\sin\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B \sin\frac{1}{2}C}.$$

Mais on sait que cette expression est égale à quatre fois le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC, on peut donc dire :

LEMME. — *Quelle que soit la conique inscrite au triangle* ABC (*fig.* 2), *on a toujours*

$$\frac{p}{\sin(A, eO)\sin(B, gO)\sin(C, hO)} = 4R;$$

p étant le paramètre de la conique, O l'un de ses foyers et R *le rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC.

Il est clair qu'on pourrait laisser la conique fixe et supposer variables les triangles qui lui sont circonscrits.

Je reviens maintenant à l'objet même de notre recherche. Nous avons trouvé

$$\rho_A \rho_B \rho_C = \frac{p^3}{\sin^3(A, eO)\sin^3(B, gO)\sin^3(C, hO)}.$$

Mais le deuxième membre, d'après le lemme précédent, est égal $64R^3$; nous voyons donc que :

THÉORÈME II. — *Lorsqu'une courbe de troisième classe est à la fois inscrite et circonscrite à un triangle, le produit des rayons de courbure, correspondant aux trois sommets, est égal à* 64 *fois le cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.*

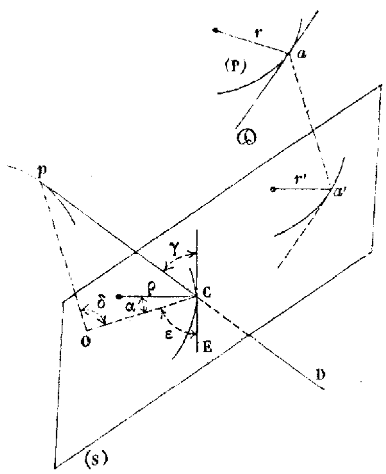
En rapprochant ce théorème du théorème I, on reconnaît que :

Une courbe de troisième ordre et de troisième classe ne peut pas être à la fois inscrite et circonscrite à un triangle.

FORMULE DE TRANSFORMATION DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DE L'ESPACE.

4. Soit r le rayon de courbure au point a d'une courbe gauche donnée [*].

Fig. 3.



La polaire réciproque de cette courbe est une surface développable, le plan polaire du point a touche cette surface suivant la droite D, polaire de la tangente Ⓓ.

Le point de contact de D et de l'arête de rebroussement de la développable est le pôle du plan osculateur (P) de la courbe gauche au point a.

---

[*] Les résultats auxquels nous arriverons ne seront pas plus généraux que si nous considérions simplement une courbe plane dans l'espace, puisqu'il ne s'agit ici que de propriétés relatives au rayon de courbure.

Par le centre O de la sphère directrice [*], menons un plan quelconque (S); projetons la courbe donnée sur ce plan; désignons par a' la projection du point a et par r' le rayon de courbure en ce point de la projection de la courbe donnée.

On sait que

$$r' = r\frac{\cos^3[\mathcal{D}, (S)]}{\cos[(P), (S)]}.$$

Le plan sécant (S) coupe la développable suivant une courbe, polaire réciproque de la projection de la courbe donnée sur ce plan, par rapport au grand cercle de la sphère directrice qui est sur (S).

C étant le point de rencontre de D et de (S), désignons par ρ le rayon de courbure en C de cette courbe d'intersection; en appliquant la formule (1), on a

$$r' = \frac{1}{\rho \cos^3 \rho}.$$

Substituant pour r' sa valeur en fonction de r, on obtient

$$r\frac{\cos^3[\mathcal{D}, (S)]}{\cos[(P), (S)]} = \frac{1}{\rho \cos^3 \rho},$$

d'où

$$r = \frac{\cos[(P), (S)]}{\rho \cos^3 \rho . \cos^3 [\mathcal{D}, (S)]}.$$

La droite Op étant perpendiculaire au plan (P), l'angle de Op et de (S) est complémentaire de l'angle de (P) et de (S); la droite D étant la polaire de $\mathcal{D}$, le plan issu de O et qui contient D est perpendiculaire à $\mathcal{D}$, et par suite l'angle du plan (O, D) et du plan (S) est complémentaire de l'angle de $\mathcal{D}$ et de (S); la formule précédente peut donc s'écrire

$$(2) \qquad r = \frac{\sin[Op, (S)]}{\rho \cos^3 \rho . \sin^3 [(O, D), (S)]}.$$

Cette formule exprime r au moyen du rayon de courbure d'une section quelconque, faite dans la surface développable transformée de la courbe donnée.

---

[*] Nous ne figurons pas la sphère directrice.

5. On peut lui donner différentes formes.

Désignons par δ l'angle de Oc et de Op, on a

$$\frac{\sin[Op, (S)]}{\sin[(O, D), (S)]} = \sin\delta;$$

par suite,

$$(2') \qquad r = \frac{\sin\delta}{\rho\cos^3 p.\sin^2[(O, D), (S)]}.$$

Dans le cas particulier où l'angle δ est droit, quel que soit le plan (S) mené par OC,

$$(2'') \qquad r = \frac{1}{\rho\cos^3 p.\sin^2[(O, D), (S)]}.$$

Enfin quand le plan sécant (S) est perpendiculaire à Op, on a simplement

$$(2''') \qquad r = \frac{1}{\rho\cos^3 p}.$$

Cette formule est évidente, si l'on remarque que dans l'hypothèse où elle a été établie le plan sécant est parallèle à (P).

6. Désignons par ε l'angle que la tangente E fait avec la droite OC : cet angle est complémentaire de l'angle α; appelons τ l'angle que le plan tangent à la surface développable le long de D fait avec le plan (O, **D**), et γ l'angle de D et de E.

On a

$$\frac{\sin\gamma}{\sin[(O, D), (S)]} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\tau},$$

et, par suite, la formule (2) peut s'écrire

$$(2^{\text{IV}}) \qquad r = \frac{\sin[Op, (S)]}{\rho\sin^3\gamma.\sin^3\tau}.$$

Ces différentes formules (2), (2'), (2^{IV}) expriment sous des formes diverses un théorème relatif aux rayons de courbure des sections faites dans une développable par des plans passant par un point fixe.

Si nous considérons en particulier la formule (2^{IV}), nous voyons que :

Théorème III. — *Lorsqu'on coupe une surface développable* (*fig.* 3) *par un plan passant par un point fixe* O, *on a, quel que soit le plan sécant* (S),

$$\frac{\sin[Op, (S)]}{\rho \sin^3 \gamma} = \text{const.}$$

p est le point de l'arête de rebroussement situé sur la génératrice D de la développable, ρ le rayon de courbure de la courbe de section au point de rencontre du plan (S) et de (D), enfin γ est l'angle que fait cette courbe avec D.

On peut déduire de ce théorème la relation qui existe entre le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de sa perspective. Il suffit pour cela de l'appliquer au cône perspectif de la courbe donnée, et de considérer, comme plans sécants de ce cône, le plan osculateur de la courbe donnée et le plan du tableau de la perspective. En opérant ainsi, on retrouve une élégante formule, qui a été donnée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XX, p. 428, par M. Peaucellier, capitaine du Génie.

En se servant des formules (2), (2'), etc., comme nous avons fait de la formule (1) dans notre premier exemple, les théorèmes relatifs aux rayons de courbure des courbes gauches conduiront à des théorèmes relatifs aux surfaces développables.

Je vais, comme application de ces formules, considérer les courbes tracées sur une surface.

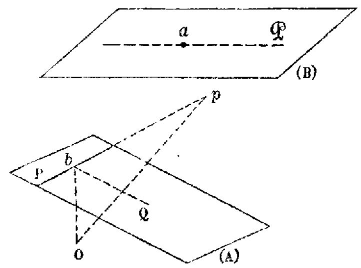
FORMULE DE TRANSFORMATION DU RAYON DE COURBURE D'UNE SECTION PLANE NORMALE EN UN POINT D'UNE SURFACE ET DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX AU MÊME POINT.

7. Soient a (*fig.* 4) le point où le plan (B) touche une surface donnée, $\mathfrak{P}$ la trace sur (B) du plan d'une section normale. Nous nous proposons de trouver, pour le rayon de courbure de cette section, la formule de transformation polaire.

Soient O le centre de la sphère directrice, b le pôle de (B), (A) le plan polaire de a et P la droite polaire de la droite $\mathfrak{P}$.

Le plan de la section normale, qui a pour trace $\mathfrak{P}$, a pour pôle le point p de la droite P, tel que Op est perpendiculaire à Ob, puisque le plan de cette section est perpendiculaire à (B).

FIG. 4.



La section normale elle-même a pour polaire réciproque un cône, circonscrit à la transformée de la surface donnée, dont le sommet est au point p. La courbe de contact de ce cône a pour tangente en b la droite Q, conjuguée de P.

Le rayon de courbure de la section normale s'exprime, d'après ce qui précède, au moyen du rayon de courbure d'une section faite dans le cône qui lui correspond par un plan issu de O.

Désignons par r le rayon de courbure de la section normale, et par ρ le rayon de courbure de la section faite dans le cône par le plan qui contient la droite Q.

En appliquant la formule (2″), Ob étant perpendiculaire à Op, on a

$$r = \frac{1}{\rho \cos^3 \rho . \sin^2 [(O, P), (O, Q)]}. \tag{3}$$

Remarquons que ρ est aussi le rayon de courbure de la section faite par le plan (O, Q) dans la surface polaire de la surface donnée [*], et si nous appelons *plans conjugués* deux plans tels que (O, P), (O, Q), issus de O et passant par deux tangentes conjuguées, nous voyons en définitive que : le rayon de courbure d'une section normale s'exprime

[*] On sait en effet que toutes les sections faites à la fois dans deux surfaces circonscrites l'une à l'autre par un plan tangent à la ligne de contact, sont mutuellement osculatrices. (*Développements de Géométrie* de M. Dupin, p. 36.)

au moyen du rayon de courbure de la section faite dans la surface polaire par le plan (O, Q), issu du centre O de la sphère directrice et conjugué du plan (O, P), qui contient la polaire réciproque P de la tangente $\mathfrak{T}$ à la section normale.

8. Dans le cas particulier où l'on considère une section principale en désignant par $\mathbf{R}'_1$ le rayon de courbure principal correspondant, la formule (3) se réduit à

$$R'_1 = \frac{1}{\rho_1 \cos^3 \rho_1}, \tag{4}$$

ρ_1 étant ce que devient le rayon de courbure ρ; l'angle [(O, P), (O, Q)] est égal à un droit, puisque les plans conjugués sont ici rectangulaires [*].

Les rayons de courbure principaux au point où le plan (B) touche une surface donnée, sont donc exprimés au moyen des rayons de courbure des sections, faites dans la transformée par les deux plans conjugués rectangulaires qui contiennent le pôle du plan (B).

9. Je reviens au rayon de courbure d'une section normale quelconque menée par $a\mathfrak{T}$ (*fig*. 4), et je vais montrer qu'on peut l'exprimer au moyen du rayon de courbure de la section déterminée dans la surface polaire par le plan (O, P).

Pour cela, il est nécessaire d'établir un théorème, auquel nous allons arriver en appliquant les formules (3) et (4) à la transformation du théorème suivant :

Théorème IV. — *Deux plans conjugués normaux en un point d'une surface donnée, déterminent deux sections, dont les rayons de courbure r, r' sont liés aux rayons de courbure principaux en ce point par la relation*

$$rr' \sin^2\theta = R'_1 R'_2;$$

---

[*] Deux tangentes conjuguées $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, ont pour polaires réciproques deux tangentes conjuguées T, S (96). Les plans conjugués qui contiennent les droites T, S sont perpendiculaires aux premières $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, et par conséquent comprennent entre eux l'angle de ces droites. Par suite, à deux tangentes conjuguées rectangulaires correspondent des tangentes conjuguées situées dans des plans conjugués rectangulaires.

où θ est l'angle des plans conjugués et R'_1, R'_2 *les rayons de courbure principaux* [*].

Désignons par (B) le plan tangent au point considéré sur la surface donnée. Les traces des plans conjugués sur ce plan tangent sont des tangentes conjuguées comprenant entre elles l'angle θ. Les polaires de ces droites sont des tangentes conjuguées, qui déterminent avec le centre O de la sphère directrice des plans conjugués, passant par le pôle b de (B) et comprenant aussi entre eux l'angle θ.

Soient ρ et ρ' les rayons de courbure des sections déterminées par ces plans conjugués dans la surface polaire, et ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure des sections déterminées dans la même surface par les plans conjugués passant par b et rectangulaires entre eux.

En appliquant les formules (3) et (4) à la transformation de la relation

$$rr' \sin^2\theta = R'_1 R'_2,$$

il vient

$$\frac{\sin^2\theta}{\rho\cos^3\rho.\sin^2\theta\rho'.\cos^3\rho'.\sin^2\theta} = \frac{1}{\rho_1\cos^3\rho_1.\rho_2\cos^3\rho_2},$$

d'où

$$\rho\rho'\cos^3\rho.\cos^3\rho'.\sin^2\theta = \text{const}.$$

Nous avons donc le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Lorsque deux plans conjugués tournent autour de leur intersection, on a toujours*

$$\rho\rho'\cos^3\rho.\cos^3\rho'.\sin^2\theta = \text{const}.$$

Ce théorème, qui est une généralisation du théorème IV, conduit tout de suite à une nouvelle formule de transformation du rayon de courbure d'une section normale.

La relation qui l'exprime peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho\cos^3\rho.\sin^2\theta} = \frac{\rho'\cos^3\rho'}{\rho_1\cos^3\rho_1.\rho_2\cos^3\rho_2}.$$

---

[*] Ce théorème résulte de ce que pour l'indicatrice au point considéré, l'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante.

Mais le premier membre de cette relation est l'expression de r telle que la donne la formule (3); on a donc aussi

$$(3') \qquad r = \frac{\rho' \cos^3 \rho'}{\rho_1 \cos^3 \rho_1 . \rho_2 \cos^3 \rho_2}.$$

Dans cette formule ρ' est le rayon de courbure de la section faite dans la surface polaire par le plan qui contient la polaire réciproque de la tangente menée à la section normale donnée par l'extrémité du rayon de courbure r. Appliquons cette formule à la transformation de la relation d'Euler.

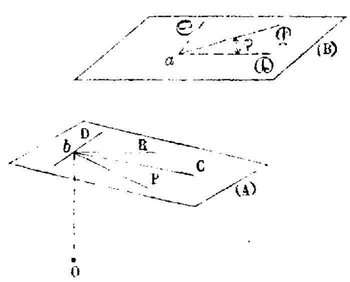
TRANSFORMATION DE LA RELATION D'EULER.

10. Écrivons ainsi cette relation

$$(a) \qquad \frac{1}{r_0} = \frac{\cos^2 \varphi}{R'_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R'_2}.$$

R'_1 et R'_2 sont les rayons de courbure principaux en a (*fig.* 5); R'_1 est

Fig. 5.



dans le plan principal, qui a pour trace $\mathfrak{D}$ sur le plan (B) tangent en a à la surface donnée; R'_2 est dans le plan principal, qui passe par $\mathfrak{C}$; r_0 est le rayon de courbure de la section normale qui contient $\mathfrak{P}$.

Soit (A) le plan polaire de a, ce plan touche la surface polaire réciproque de la surface donnée au point b, pôle de (B).

Les droites P, C, D contenues dans le plan (A) sont les polaires des droites $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; les plans (O, C), (O, D) sont des plans conjugués rectangulaires; le plan (O, P) fait avec le plan (O, D) un angle φ, égal à l'angle compris entre les droites $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$.

Transformons la relation (a), en appliquant les formules (3′) et (4); il vient

$$\frac{\rho_1\cos^3\rho_1 \cdot \rho_2\cos^3\rho_2}{\rho_0\cos^3\rho_0} = \rho_2\cos^3\rho_2 . \cos^2\varphi + \rho_1\cos^3\rho_1 . \sin^2\varphi,$$

d'où

$$(b) \qquad \frac{1}{\rho_0\cos^3\rho_0} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1\cos^3\rho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2\cos^3\rho_2}.$$

Cette relation est tout à fait analogue à la relation d'Euler, elle lie le rayon de courbure d'une section oblique quelconque, déterminée dans la surface polaire par le plan (O, P) aux rayons de courbure des sections faites par les plans conjugués rectangulaires (O, C), (O, D) [*].

Les trois plans (O, P), (O, C), (O, D) passent par la même droite Ob; dans le cas particulier où cette droite est une normale à la surface polaire, la relation (b) se réduit à la relation (a).

11. On peut écrire cette relation (b) sous une autre forme.

Considérons les coniques ayant pour foyer le point O, et qui sont osculatrices en b à la surface polaire.

La conique qui est dans le plan (O, P) a pour paramètre p_0, qui est égal à $\rho_0\cos^3\rho_0$; en désignant par p_1 et p_2 les paramètres des coniques qui sont dans les plans conjugués rectangulaires, on a aussi

$$p_1 = \rho_1\cos^3\rho_1, \quad p_2 = \rho_2\cos^3\rho_2.$$

La relation (b) devient alors

$$(c) \qquad \frac{1}{p_0} = \frac{\cos^2\varphi}{p_1} + \frac{\sin^2\varphi}{p_2}.$$

Les paramètres p_1 et p_2 sont, l'un le paramètre maximum, l'autre le paramètre minimum parmi les paramètres de toutes les sec-

---

[*] Les angles ρ_0, ρ_1 et ρ_2 de la relation (b) sont liés entre eux de la manière suivante :

$$\frac{1}{\cot\rho_0} = \frac{\cos\varphi}{\cot\rho_1} + \frac{\sin\varphi}{\cot\rho_2}.$$

tions coniques osculatrices que nous considérons; p_1 et p_2 jouent donc ici le même rôle que les rayons de courbure principaux dans la relation d'Euler.

Les coniques qui ont pour paramètres p_1 et p_2 sont dans les plans conjugués rectangulaires, qu'on pourrait appeler *plans conjugués principaux* à cause de leur complète analogie avec les plans principaux.

On peut écrire la relation (c), en prenant pour foyer commun des coniques osculatrices, un point quelconque de la droite autour de laquelle on fait tourner les plans sécants; si le point choisi est à l'infini, ces coniques deviennent les paraboles osculatrices, dont les axes sont parallèles à la droite donnée, et la relation (c) conserve toujours la même forme.

12. On peut appliquer les formules (3′) et (4) à la transformation de la relation (b), et généraliser ainsi la relation d'Euler; mais je vais simplement transformer la relation (c) en replaçant le centre de la sphère directrice au foyer commun de toutes les coniques osculatrices.

Ces coniques ont pour transformées des cylindres de révolution osculateurs de cylindres circonscrits à la surface polaire, qui, par suite de la position donnée au centre de la sphère directrice, n'est autre que la surface primitive (*fig.* 5).

L'osculation a lieu le long de génératrices situées dans le plan (B) tangent à cette surface primitive.

Les plans conjugués rectangulaires, qui contiennent les coniques dont les paramètres sont p_1 et p_2, sont respectivement perpendiculaires aux axes de l'indicatrice en a : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Ces paramètres p_1 et p_2 sont égaux aux inverses des rayons de courbure des sections normales aux cylindres circonscrits à la surface primitive, ayant pour génératrices des droites parallèles à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, rayons de courbure correspondant aux points de ces sections qui sont dans (B). De même p_0 est égal à l'inverse du rayon de courbure de la section droite du cylindre, circonscrit à la surface primitive, et dont les génératrices sont parallèles à $\mathcal{T}$, pour le point de cette section qui est dans (B).

On a donc, pour l'expression du rayon de courbure de la section droite de ce dernier cylindre, la relation transformée de (c), c'est-à-dire, en appelant r'_0, R'_1, R'_2 les rayons de courbure des sections perpendiculaires à $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{O}$,

$$r'_0 = R'_2 \cos^2\varphi + R'_1 \sin^2\varphi. \tag{d}$$

Cette relation donne le rayon de courbure en un point du contour apparent d'une surface projetée sur un plan, en fonction des rayons de courbure principaux au point de la surface, dont celui-ci est la projection, et de l'angle de la projetante avec l'un des axes de l'indicatrice au même point de la surface.

13. Nous allons déduire de cette relation un théorème utile.

Projetons une surface sur deux plans perpendiculaires entre eux, et perpendiculaires au plan (B), tangent en a à la surface donnée. Nous obtiendrons sur chacun de ces plans le contour apparent de la surface. Désignons par r et r' les rayons de courbure qui correspondent aux projections du point a; on a

$$r = R_2 \cos^2\varphi + R_1 \sin^2\varphi,$$
$$r' = R_2 \sin^2\varphi + R_1 \cos^2\varphi,$$

d'où, en ajoutant,

$$r + r' = R_1 + R_2;$$

d'après cela :

THÉORÈME VI. — *La somme des rayons de courbure des contours apparents d'une surface sur deux plans, rectangulaires entre eux et perpendiculaires à un plan tangent fixe de cette surface, est constante, quels que soient les plans rectangulaires sur lesquels on effectue les projections.*

Au moyen de ce théorème on étend facilement au cas de l'espace certains théorèmes démontrés pour les courbes planes [*].

14. Au moyen de la relation (b), on arrive au théorème suivant,

[*] On démontre directement le théorème VI à l'aide de la remarque suivante : *Pour un point quelconque de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à une surface, le produit du rayon de courbure de la section droite du cylindre par le rayon de courbure de la section normale de la surface, menée par la génératrice du cylindre, est égal au produit des rayons de courbure principaux relatifs au point considéré.*

qu'on peut obtenir aussi en transformant par polaires réciproques le théorème VI.

THÉORÈME VII. — *Deux plans rectangulaires se coupent suivant une droite fixe qui rencontre en a une surface donnée; ils déterminent dans cette surface deux sections ayant pour rayons de courbure en a :* ρ_0 *et* ρ'_0; *l'expression*

$$\frac{1}{\rho_0 \cos^3 \rho_0} + \frac{1}{\rho'_0 \cos^3 \rho'_0}$$

est constante, quelle que soit l'orientation des plans sécants rectangulaires [*].

Ces quelques exemples me paraissent suffire pour donner une idée de l'emploi qu'on peut faire des formules de transformation établies dans ce travail.

[*] Les angles que nous désignons par ρ_0 et ρ'_0 sont liés entre eux de telle manière que

$$\operatorname{tang}^2 \rho_0 + \operatorname{tang}^2 \rho'_0 = \text{const.}$$