JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est > 0 et $\equiv 3 \pmod{8}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 191-192.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__191_0>

Sur les formes quadratiques proprement primitives, dont le déterminant changé de signe est > 0 *et* $\equiv 3 \pmod{8}$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Étant donné un entier k positif et $\equiv 3 \pmod{8}$, soit N le nombre des classes de formes quadratiques proprement primitives dont le déterminant est égal à $-k$. Considérons successivement les diverses formes qui représentent ces classes, et pour chacune d'elles cherchons les deux plus petits nombres impairs a, a' qu'elle exprime proprement, a' étant supposé $> a$, puis effectuons le produit

$$a(a'-a),$$

enfin calculons la somme

$$\sum a(a'-a)$$

pour les N formes indiquées. J'ai reconnu que l'on a toujours

$$\sum a(a'-a) = \frac{2}{3}\mathrm{N}k.$$

La démonstration est facile : je laisse à nos jeunes lecteurs le plaisir de la trouver d'eux-mêmes.

Soit, par exemple, $k = 3$; on n'a alors que la seule forme

$$x^2 + 3y^2,$$

pour laquelle $a = 1$, $a' = 3$. La vérification est immédiate.

Pour $k = 11$, on a trois formes

$$x^2 + 11y^2,\quad 3x^2 + 2xy + 4y^2,\quad 3x^2 - 2xy + 4y^2,$$

et trois systèmes a, a', savoir :

$$a = 1, \quad a' = 11; \qquad a = 3, \quad a' = 5; \qquad a = 3, \quad a' = 5.$$

De là

$$\sum a(a' - a) = 1.10 + 2.3 + 2.3 = 22.$$

D'un autre côté,

$$\frac{2}{3} \mathrm{N} k = \frac{2}{3}.3.11 = 22.$$

Notre théorème est donc encore vérifié cette fois.

Il l'est également pour $k = 19$. Aux trois formes

$$x^2 + 19y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 5y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 5y^2,$$

qui se présentent alors, répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 19; \qquad a = 5, \quad a' = 7; \qquad a = 5, \quad a' = 7,$$

de façon que 38 est la valeur commune des deux quantités

$$\sum a(a' - a)$$

et

$$\frac{2}{3} \mathrm{N} k.$$

Enfin cette valeur commune est 54, lorsqu'on a $k = 27$, ce qui amène les trois formes

$$x^2 + 27y^2, \quad 4x^2 + 2xy + 7y^2, \quad 4x^2 - 2xy + 7y^2,$$

auxquelles répondent les trois systèmes

$$a = 1, \quad a' = 27; \qquad a = 7, \quad a' = 9; \qquad a = 7, \quad a' = 9.$$

Je ne pousserai pas plus loin ces exercices numériques.