JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ANGELO GENOCCHI

Note sur quelques sommations de cubes

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 177-187.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__177_0>

NOTE

SUR

QUELQUES SOMMATIONS DE CUBES [*];

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

1° On connaît plusieurs solutions, en nombres entiers et positifs, de l'équation

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 = y^3. \tag{1}$$

On peut en déduire un nombre infini d'autres solutions, en multipliant par un même facteur les valeurs déjà trouvées de x, r et y. Ces solutions seront *dérivées;* nous chercherons d'autres solutions *primitives* de la manière suivante.

Faisant

$$x + r = 4s, \quad y = 6t,$$

on a

$$s(r + 8s^2) = 9t; \tag{2}$$

pour résoudre celle-ci, on pose

$$s = 9t'^3, \quad r + s\sqrt{-8} = (p + q\sqrt{-8})^3,$$

d'où l'on tire

$$r = p(p^2 - 24q^2), \quad s = q(3p^2 - 8q^2),$$

[*] Cette Note a été imprimée en italien dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei* (t. XIX, anno XIX, sessione I, del 3 décembre 1865), et dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, publiées par le M. professeur Tortolini (t. VII, n° III). La traduction que nous communiquons à nos lecteurs, sur la demande du prince Balthasar Boncompagni qui nous l'a transmise, est de M. Narducci. (J. L.)

et, par conséquent,

$$t'^3 = s'(p^2 - 24s'^2), \quad \text{en faisant} \quad q = 3s'.$$

Ensuite on fait

$$s' = 27t''^3, \quad p + s'\sqrt{24} = (r' + s''\sqrt{24})^3,$$

d'où

$$p = r'(r'^2 + 72s''^2), \quad s' = 3s''(r'^2 + 8s''^2),$$

c'est-à-dire

$$s''(r'^2 + 8s''^2) = 9t''^3,$$

équation semblable à l'équation (2), et qui étant résolue avec les mêmes nombres peut servir à en trouver successivement autant de solutions que l'on désire.

Prenons la solution

$$r' = s'' = t'' = 1:$$

nous en déduirons

$$s' = 27t'^3 = 27, \quad q = 3s' = 81, \quad p = r'(r'^2 + 72s''^2) = 73,$$
$$r = p(p^2 - 24q^2) = 73^2(73 - 24 \,.\, 81^2) = -73 \,.\, 152135,$$
$$s = q(3p^2 - 8q^2) = 81(3 \,.\, 73^2 - 8 \,.\, 81^2) = -81 \,.\, 36501,$$

et par conséquent

$$r = -11105855 \quad \text{et} \quad x = 4s - r = -720469.$$

En changeant le signe, nous aurons les valeurs entières et positives

$$x = 720469, \quad r = 11105855,$$

qui satisferont à l'équation (1) avec y aussi entier et positif.

2° On peut appliquer la même méthode à l'équation

$$(3) \qquad x^3 + (x + r)^3 + (x + 2r)^3 + \ldots + (x + nr - r)^3 = y^3,$$

en supposant $n > 3$. Faisant $s = 2x + (n - 1)r$, cette équation devient, comme l'a remarqué M. Le Besgue,

$$ns[s^2 + (n^2 - 1)r^2] = 8y^3; \tag{4}$$

par conséquent, dans le cas de $n = 4$, on a

$$s(s^2 + 15r^2) = 2y^3, \tag{5}$$

et si l'on fait

$$s = 2s'^3, \quad s + r\sqrt{-15} = (p + q\sqrt{-15})^3,$$

il en résulte

$$2s'^3 = p(p^2 - 45q^2), \quad r = 3q(p^2 - 5q^2);$$

faisant ensuite

$$p = 2y'^3, \quad p + 3q\sqrt{5} = (s'' + r'\sqrt{5})^3,$$

on a

$$3q = r'(3s''^2 + 5r'^2), \quad s''(s''^2 + 15r'^2) = 2y'^3:$$

la dernière de ces équations est semblable à l'équation (5).

Prenant $r' = 1$, $s'' = 25$, $y' = 20$, valeurs qui correspondent à l'égalité

$$11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3,$$

on trouvera

$$p = 2y'^3 = 2.20^3, \qquad s' = y'(s''^2 - 5r'^2) = 20.620 = 20^2.31,$$

$$s = 2s'^3 = 2.20^6.31^3, \quad q = \frac{r'}{3}(3s''^2 + 5r'^2) = \frac{1880}{3} = 20.\frac{94}{3},$$

$$r = 3q(p^2 - 5q^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}(20^2.4.9 - 47^2) = 2.20^4.\frac{47}{9}.285791.$$

On peut multiplier par 9 et diviser par 2.20^4 les valeurs de r et s en les réduisant ainsi à

$$r = 47.285791 = 13432177,$$
$$s = 9.20^2.31^3 = 107247600,$$

23..

d'où

$$x = \frac{s-3r}{2} = \frac{66951069}{2}.$$

Donc, en multipliant par 2 ces valeurs de x et r, on aura une nouvelle solution de l'équation (3), pour $n=4$, en nombres entiers et positifs,

$$x = 66951069, \quad r = 26864354.$$

3° En général, pour satisfaire à l'équation (4), faisant par abrégé $n^2 - 1 = m$, posons

$$s = n^2 s'^3, \quad s + r\sqrt{-m} = (p + q\sqrt{-m})^3,$$

d'où

$$r = q(3p^2 - mq^2), \quad n^2 s'^3 = p(p^2 - 3mq^2);$$

posons en outre

$$np = 8y'^3, \quad p + q\sqrt{3m} = (s'' + r'\sqrt{3m})^3,$$

d'où

$$q = 3r'(s''^2 + mr'^2), \quad p = s''(s''^2 + 9mr'^2);$$

alors, en faisant $3r' = r''$, nous aurons une équation semblable à l'équation (4), savoir

$$ns''[s''^2 + (n^2 - 1)r''^2] = 8y'^3.$$

Ainsi, étant donnée une solution de l'équation (4), les mêmes nombres pourront être pris pour les valeurs de r'', s'' et y'', et de ceux-ci on déduira r', p, q, r, s, d'où l'on aura une nouvelle solution de l'équation (4), qui pourra pareillement en donner une autre, etc., etc. Mais il est clair que les solutions obtenues de cette manière pourront n'être pas les seules possibles; en outre, quoiqu'on trouve des valeurs positives pour s et r, il peut se faire que x se trouve négatif, et que par conséquent on n'ait pas pour l'équation (3) une solution en nombres positifs, quoiqu'on en ait une pour l'équation (4).

Prenant

$$r'' = s'' = 1, \quad y' = \frac{n}{2},$$

il en résultera

$$r' = \frac{1}{3},\quad p = n^2,\quad q = \frac{n^2+8}{9},\quad r = n^4 . \frac{n^2+8}{3} - (n^2-1)\left(\frac{n^2+8}{9}\right)^3,$$

$$s = n^6 - n^2(n^2-1)\frac{(n^2+8)^2}{27}:$$

ces valeurs de r et de s sont toutes les deux négatives lorsque n est plus grand que 16, de $n = 3$ à $n = 7$, r est positif et s négatif, mais dans les deux cas on a $s < (n-1)r$, abstraction faite des signes, et à cause de cela dans le premier membre de l'équation (3) quelques cubes seront positifs, d'autres négatifs. De $n = 8$ jusqu'à $n = 16$ sera s négatif, r positif, mais en valeur absolue sera $s > (n-1)r$, par conséquent x sera négatif et tous les cubes indiqués seront aussi négatifs; d'où il résulte qu'un simple changement de signes suffira pour rendre positifs tous les termes du premier membre de l'équation (3).

4° On peut trouver d'autres formules plus commodes pour déduire d'une solution de l'équation (4) une nouvelle solution.

Soit une solution

$$s = f,\quad r = g,\quad 2y = h,$$

et retenant la même valeur de s, supposons

$$r = g + z,\quad 2y = h + pz:$$

en substituant, en ôtant les termes qui disparaissent à cause de l'équation (4), et en divisant ensuite par z, nous aurons

$$mnf(2g+z) = 3h^2p + 3hp^2z + p^3z^2,$$

où $m = n^2 - 1$; posant ensuite

$$p = \frac{2mnfg}{3h^2},$$

nous aurons

$$z = \frac{mnf - 3hp^2}{p^3},$$

et par conséquent une solution de l'équation (4) sera aussi

$$s = f, \quad r = g + \frac{mnf - 3hp^2}{p^3}, \quad 2y = \frac{mnf - 2hp^2}{p^2}.$$

Posant la valeur de p, posant pour h^3 la valeur

$$h^3 = nf(f + mg^2),$$

qui résulte de l'équation (4), et faisant

$$(6)\ f' = 8m^2fg^3, \quad g' = 27f^4 + 18mf^2g^2 - m^2g^4, \quad h' = 2mgh(9f^2 + mg^2),$$

on trouvera

$$s = \frac{f'}{8m^2g^3}, \quad r = \frac{g'}{8m^2g^3}, \quad 2y = \frac{h'}{8m^2g^3};$$

il est clair par conséquent que l'équation (4) sera satisfaite aussi par les valeurs $s = f'$, $r = g'$, $2y = h'$ qui sont données par les formules (6), et qui seront entières si f, g, h sont entiers.

Prenant $f = g = 1$, $h = n$, les formules (6) donneront

$$f' = 8m^2, \quad g' = 27 + 18m - m^2, \quad h' = 2mn(m + 9):$$

la valeur de g' sera positive par $n = 3$ et $n = 4$, négative par $n > 4$, et par conséquent au moyen de $n > 4$ on changera g' en $-g'$, mais depuis $n = 3$ jusqu'à $n = 11$ on aura en valeur absolue $f' > (n - 1)g'$, de sorte qu'il en résultera des solutions de l'équation (3) avec des valeurs entières et positives de r, x et y. Par exemple, pour $n = 6$ on a

$$f' = 8.35^2, \quad g' = 8.71,$$

et en ôtant le facteur commun 8, il en résulte

$$x = \frac{25^2 - 5.71}{2} = 435, \quad r = 71.$$

On peut faire aussi

$$a = \frac{mg^2}{f^2}, \quad a' = \frac{mg'^2}{f'^2},$$

d'où

$$(7) \qquad a' = \frac{1}{64a^3}(27 + 18a - a^2)^2;$$

et s'il résultera $a' < 1$, il sera

$$f'^2 > mg'^2 > (n-1)^2 g'^2,$$

et par conséquent

$$f' > (n-1)g',$$

de sorte que l'on pourra avoir encore une solution de l'équation (3) en nombres entiers et positifs. Pareillement on pourra calculer d'autres quantités a'', a''',..., qui dépendent de a', a'',..., comme a' dépend de a, et lorsqu'on arrive à une de ces quantités qui soit < 1, on aura une solution de la même équation (3) en nombres entiers et positifs.

5° On doit remarquer aussi que même pour des valeurs de n aussi grandes que l'on voudra, on peut satisfaire à l'équation (3) avec x et y entiers positifs, en supposant $r = 1$: il suffit de prendre pour n un cube qui ne soit pas divisible par 3. Cela résulte des formules à l'aide desquelles M. Camille Pagliani, cadet dans le corps royal des Pionniers de Modène, résolut le problème de *trouver mille cubes entiers consécutifs dont la somme soit un cube* [*]. Car, en changeant n en n^3 et en faisant

$$x = \frac{(n^2-1)^2 - 3(n^3+1)}{6},$$

on trouve

$$(x+1)^3 + (x+2)^3 + \ldots + (x+n^3)^3 = \left(nx + \frac{n^3(n+1)}{2}\right)^3,$$

et l'on voit d'une part que le numérateur de la valeur de x est toujours un nombre pair, d'autre part qu'il est aussi divisible par 3, lorsque n ne l'est pas, attendu qu'alors $n^2 - 1$ est divisible par 3; par conséquent, dans ce cas, x sera toujours un nombre entier. Si l'on prend n divi-

[*] Voir *Annales de Mathématiques*, par Gergonne, t. XX, p. 382-384.

sible par 3, $3x$ sera un nombre entier, et en multipliant l'équation précédente par 3^3, on aura égale à un cube la somme des cubes de n^3 nombres entiers formant une progression arithmétique dont la raison sera 3.

6° Si l'on demande que la somme des termes d'une progression arithmétique élevés au cube ne soit pas un cube, mais un carré, on aura, au lieu de l'équation (3), la suivante :

$$(8) \qquad x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

qui pourra être ramenée à la forme

$$(9) \qquad ns[s^2 + (n^2-1)r^2] = 8y^2.$$

Faisant $2y = nst$, nous tirerons de celle-ci

$$s^2 + (n^2-1)r^2 = 2nst^2,$$

d'où

$$s = nt^2 \pm \sqrt{n^2t^4 - (n^2-1)r^2}:$$

ensuite nous poserons

$$n^2t^4 - (n^2-1)r^2 = (nt^2 - rp)^2,$$

et nous obtiendrons

$$(10) \qquad r = \frac{2npt^2}{n^2-1+p^2},$$

à laquelle correspondront deux valeurs de s,

$$(11) \qquad s = \frac{2n(n^2-1)t^2}{n^2-1+p^2}, \quad s = \frac{2np^2t^2}{n^2-1+p^2}.$$

En assignant des valeurs rationnelles, telles que l'on veut, à p et t, on aura donc des valeurs rationnelles par r, s et y, et ainsi les formules (10) et (11) donneront la solution générale de l'équation (9) en nombres rationnels.

Les deux valeurs (11) peuvent être réduites à une seule, parce que la seconde devient identique à la première si l'on y change p en $\frac{n^2-1}{p}$, ce qui ne change pas l'expression de r. De la première de ces valeurs (11), on déduit

$$(12) \qquad x = \frac{n(n-1)(n+1-p)t^2}{n^2-1+p^2};$$

voilà donc la formule qui, jointe à la formule (10), donnera la solution générale de l'équation (8) en nombres rationnels.

Si nous prenons

$$t = 1, \quad p = n - 1,$$

nous trouvons

$$r = 1, \quad x = 1,$$

solution qui est très-connue. Prenant

$$p = \frac{n^2-1}{n},$$

on aura

$$r = \frac{2n^2t^2}{2n^2-1}, \quad x = \frac{n^2t^2}{2n^2-1},$$

par conséquent il viendra

$$x = 1, \quad r = 2,$$

si l'on pose

$$(13) \qquad 2n^2 - 1 = n^2t^2,$$

c'est-à-dire $2n^2 - 1$ carré, ce qui correspond aussi à une solution connue. Les valeurs de n qui satisfont à l'équation (13) sont comprises dans la formule

$$(14) \qquad n = \frac{(\sqrt{2}+1)^i + (\sqrt{2}-1)^i}{2\sqrt{2}},$$

où i indique un nombre impair positif.

7° Les anciens arithméticiens ont observé que les nombres $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$, $s = 6$ vérifient simultanément les trois équations

$$(15) \qquad xy = 2s, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = s^3:$$

on peut démontrer que, parmi les nombres entiers, ce sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

Car la solution la plus générale de la deuxième des équations (15) en nombres entiers est

$$x = m(a^2 - b^2), \quad y = 2mab, \quad z = m(a^2 + b^2),$$

si m, a, b sont des nombres entiers, dont les derniers a et b peuvent être supposés premiers entre eux; par conséquent la première des équations (15) donnera

$$s = m^2 ab(a^2 - b^2),$$

et en substituant le tout dans la troisième on aura

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^3 ab^3 (a^2 - b^2)^3.$$

Il suit de cette équation que $\frac{2a^4}{b^2}$ doit être un nombre entier, et en supposant b premier à a, sera b^2 diviseur de 2, et par conséquent $b = 1$. Donc

$$2(a^4 + 3 + 4a) = m^3 a(a^2 - 1)^3,$$

c'est-à-dire, en divisant par $a + 1$,

$$2(a-1)^2 + 4 = m^3 a(a^2 - 1)(a-1)^2;$$

et par conséquent 4 divisible par $(a-1)^2$, 2 divisible par $a - 1$, et ainsi, $a - 1 = 2$, ou bien $a - 1 = 1$, ce qui donne $a = 3$, ou bien $a = 2$. La dernière équation par $a = 3$ deviendrait

$$12 = m^3 . 3 . 8 . 4, \quad \text{c'est-à-dire} \quad 1 = 8m^3,$$

ce qui est absurde avec m entier : il reste donc seulement $a = 2$ qui donne $1 = m^3$, $m = 1$, et par conséquent les valeurs déjà indiquées de x, y, z, s.

Au lieu de la troisième des équations (15), on pourrait proposer la suivante plus générale

$$x^3 + y^3 + z^3 = s^n t, \tag{16}$$

dans laquelle t est une nouvelle inconnue et n un exposant donné entier et > 1. En procédant comme auparavant, on trouvera une équation

$$2(a^4 + 3b^4 + 4ab^3) = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, b^n (a^2 - b^2)^n\, t,$$

de laquelle on déduira $\frac{2a^4}{b}$ entier, et par conséquent $b = 1$, si l'on veut que t aussi soit entier. On aura ensuite

$$2(a-1)^2 + 4 = m^{2n-3}\, a^{n-2}\, (a-1)^n (a+1)^{n-2}\, t,$$

et pour cela $\frac{4}{(a-1)}$ et $\frac{2}{a-1}$ entiers, d'où $a = 2$ ou bien $a = 3$. Prenant $a = 3$, on trouve

$$12 = m^{2n-3} \,.\, 3^{n-3} \,.\, 4^{n-3}\, t,$$

ce qui, pour $n > 2$, donne l'égalité

$$\frac{1}{2^n} = m^{2n-3} \,.\, 3^{n-3} \,.\, 4^{n-3}\, t,$$

absurde avec m et t entiers; et pour $n = 2$ donne $3 = mt$, et par conséquent

$$m = 1 \quad \text{et} \quad t = 3,$$

ou bien

$$m = 3 \quad \text{et} \quad t = 1.$$

Prenant $a = 2$, on a

$$6 = m^{2n-3} \,.\, 2^{n-2} \,.\, 3^{n-2}\, t,$$

ce qui est absurde lorsque $n > 3$, donne $m = t = 1$ si $n = 3$, et $mt = 6$ si $n = 2$, de sorte que l'on a alors pour m et t les valeurs 2, 3; 1, 6.