JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CASIMIR RICHAUD

Démonstrations de quelques théorèmes concernant la résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 - Ny^2 = -1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 145-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__145_0>

DÉMONSTRATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES

CONCERNANT

LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $x^2 - Ny^2 = -1$

(Suite [*]);

PAR M. CASIMIR **RICHAUD**.

---

42. Recherchons les conclusions auxquelles on peut arriver sur la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1A_2\ldots A_{2s-1}B_1B_2\ldots B_{2t-1}PQy^2 = -1$$

lorsque les quantités $\left(\frac{PQ}{A_1}\right)$, $\left(\frac{PQ}{A_2}\right),\ldots,\left(\frac{PQ}{B_{2t-1}}\right)$ considérées (n° **41**) sont toutes négatives, et lorsque les facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2A_1A_2\ldots A_{2s-1}B_1B_2\ldots B_{2t-1}y^2 = -1$$

se partagent en deux groupes $A_1,\ldots, A_{2s-1}$ et $B_1,\ldots, B_{2t-1}$ composés chacun d'un nombre impair de termes satisfaisant aux conditions suivantes (a), dans lesquelles les signes supérieurs des seconds membres marchent ensemble, ainsi que les signes inférieurs

$$(a) \quad \begin{cases} \left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{A_2}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right) = \left(\frac{B_1}{Q}\right) = \left(\frac{B_2}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{A_1}{Q}\right) = \left(\frac{A_2}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{Q}\right) = \left(\frac{B_1}{P}\right) = \left(\frac{B_2}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right) = \mp 1. \end{cases}$$

Imaginons à cet effet que les équations de condition (α_2) relatives à l'équation (2) soient divisées en trois séries analogues à celles des théo-

---

[*] *Voir* au volume précédent, page 235.

rèmes (nos **36** et **38**), et représentées par les types suivants :

1re série...... (3_2) $A_d \ldots A_f B_g \ldots B_k h^2 - 2 A_g \ldots B_l PQH'^2 = \pm 1$,
2e série...... (4_2) $A_l \ldots A_k B_f \ldots B_\alpha P h^2 - 2 A_f \ldots B_d QH'^2 = \pm 1$,
3e série...... (5_2) $A_f \ldots A_t B_\alpha \ldots B_k PQ h^2 - 2 A_g \ldots A_\alpha B_g \ldots B_l H'^2 = \pm 1$.

On reconnaît de suite, en vertu des conditions (a), que toutes les relations de la deuxième série sont impossibles en valeurs entières de h et de H'. Le nombre total de facteurs premiers $8n + 5$ qui entrent dans les coefficients de h^2 et de H'^2 est en effet pair (n° **15**); les facteurs de de l'un des deux groupes, du groupe $A_1, \ldots, A_{2s-1}$ par exemple, entrent donc en nombre impair au coefficient de h^2, tandis que le même coefficient contient un nombre pair de facteurs premiers de l'autre groupe. Dans cette hypothèse, le coefficient de H'^2 contiendra au contraire un nombre pair de facteurs premiers du premier groupe $A_1, \ldots, A_{2s-1}$, et un nombre impair de facteurs premiers de l'autre groupe. Nous aurons par suite les relations

$$\left(\frac{A_l \ldots A_k}{Q}\right) = \left(\frac{A_l}{Q}\right); \quad \left(\frac{B_f \ldots B_\alpha}{Q}\right) = 1,$$

$$\left(\frac{2 A_f \ldots}{P}\right) = -1; \quad \left(\frac{\ldots B_d}{P}\right) = \left(\frac{B_d}{P}\right) = \left(\frac{A_l}{Q}\right)$$

en observant que $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right)$, ces relations fournissent les égalités

$$\left(\frac{A_l \ldots A_k B_f \ldots B_\alpha P}{Q}\right) = \left(\frac{A_l P}{Q}\right); \quad \left(\frac{2 A_f \ldots B_d Q}{P}\right) = -\left(\frac{A_l P}{Q}\right),$$

en vertu desquelles on reconnait que les équations de condition de la deuxième série représentées par le type (4_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H'.

Les équations de condition de la première série, dans lesquelles les facteurs premiers des deux groupes entrent en nombre impair au coefficient de h^2, sont aussi impossibles en valeurs entières de h et de H'. Dans cette hypothèse, les conditions (a) donnent en effet les relations

$$\left(\frac{A_d \ldots A_f}{P}\right) = \left(\frac{A_d}{P}\right); \quad \left(\frac{B_g \ldots B_k}{P}\right) = \left(\frac{B_g}{P}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{A_d\ldots A_f B_g\ldots B_k}{P}\right) = \left(\frac{A_d B_g}{P}\right) = -1;$$

égalité qui prouve, pour le cas considéré, l'impossibilité en valeurs entières des équations de condition représentées par le type (3_2). Cette conséquence est évidemment applicable à l'équation de condition particulière

$$(6_2)\qquad A_1\ldots A_{2s-1} B_1\ldots B_{2t-1} h^2 - 2PQH'^2 = \pm 1.$$

En ce qui concerne les équations de condition de la troisième série, l'impossibilité en valeurs entières se constaterait d'une manière analogue pour toutes celles qui contiendraient au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des deux groupes. Dans ces conditions en effet les facteurs des groupes $A_1,\ldots, A_{2s-1}$ et $B_1,\ldots, B_{2t-1}$ entreront en nombre pair au coefficient de H'^2. Nous aurons donc les relations

$$\left(\frac{A_g\ldots A_\alpha}{P}\right) = \left(\frac{B_g\ldots B_l}{P}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2A_g\ldots A_\alpha B_g\ldots B_l}{P}\right) = -1,$$

dont la dernière prouve, dans le cas particulier, l'impossibilité des équations de condition du type (5_2) en valeurs entières de h et de H'.

L'équation particulière de cette série

$$(7_2)\qquad PQh^2 - 2A_1\ldots A_{2s-1} B_1\ldots B_{2t-1} H'^2 = \pm 1$$

est dans le même cas, à cause de la relation $\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = -1$.

Ainsi, en résumé, *lorsqu'on aura à rechercher la possibilité de l'équation* (2) *en valeurs entières de x et de y, dans les conditions qui ont été définies, il suffira de se préoccuper des équations de condition des première et troisième séries qui contiendraient au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes* $A_1,\ldots, A_{2s-1}$ *et* $B,\ldots, B_{2t-1}$. On pourra même négliger l'équation particulière (7_2) qui contient au coefficient de H'^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des mêmes groupes.

En représentant par n et n' les nombres impairs de facteurs premiers qui entrent respectivement dans chacun des groupes $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$, on reconnaîtra de suite que le nombre total des équations de condition dont on aura encore à se préoccuper, sera représenté par

$$2(2^{n+n'-2}-1) = 2^{m-3}-2,$$

m désignant le nombre de facteurs premiers qui entrent dans le déterminant de l'équation (2).

En ce qui concerne ces dernières équations des première et troisième séries, leur impossibilité en valeurs entières ne pourra s'établir que dans les cas où l'on préciserait certaines conditions auxquelles devraient satisfaire les facteurs premiers qui entrent dans le déterminant de l'équation (1). Il est toutefois facile de reconnaître que, si l'équation (2) admet des valeurs entières pour certains assemblages de signe des quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right), \ldots$ provenant des facteurs premiers du déterminant de l'équation (1), la même équation (2) sera également possible en entiers pour les assemblages qu'on obtiendrait en changeant le signe des mêmes quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right), \ldots$. Les seules équations de condition qu'on aurait à considérer, d'après ce qui précède, contiendraient en effet aux coefficients de h^2 et de H'^2 un nombre pair de facteurs premiers du déterminant de l'équation (1). Il est évident dès lors que si ces équations (α_2) n'admettent pas de valeurs entières de h et de H' pour certains assemblages de signe des quantités précitées $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right), \ldots$, on arrivera à la même conséquence lorsque le signe de toutes ces quantités sera changé.

Cela posé, nous allons procéder à la recherche de conditions spéciales de possibilité de l'équation (2), en commençant par quelques cas particuliers.

43. Partons de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2AB y^2 = -1,$$

et, en supposant que les conditions

$$(a) \qquad \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = +1; \quad \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1,$$

dans lesquelles les signes des deuxièmes membres peuvent être permutés, soient remplies, recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver sur la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

qui contient quatre facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant.

Il ressort de ce qui a été établi (n° **42**) que les six équations de condition (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H'. Cette conséquence est en effet évidente pour les équations (α_2) qui contiennent C et D à des coefficients différents. De plus les deux équations de condition

$$(3_2) \qquad ABh^2 - 2CDH'^2 = \pm 1,$$

$$(4_2) \qquad CDh^2 - 2ABH'^2 = \pm 1$$

sont dans le même cas, puisque la première renferme au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de chacun des groupes A et B, et puisque la deuxième correspond à l'équation (7_2) considérée (n° **42**). On peut remarquer d'ailleurs que, pour $m = 4$, le nombre des équations de condition $2^{m-3} - 2$ est égal à zéro.

Par suite, en observant que les égalités (a) équivalent aux conditions

$$(a_1) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{CD}{A}\right) = \left(\frac{CD}{B}\right) = -1,$$

nous arrivons à la proposition suivante : *Si ces dernières conditions* (a_1) *sont satisfaites, l'équation* $x^2 - 2ABCDy^2 = -1$ *admet toujours des solutions entières.*

44. Le théorème précédent rapproché de ceux qui ont été démontrés (n^os^ **30** et **36**) permet de déterminer dès à présent tous les arrangements de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,... pour lesquels on peut affirmer que l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2\,\mathrm{ABCD}\,y^2 = -1,$$

qui contient quatre facteurs premiers $8n+5$ dans son déterminant, admet des solutions entières.

On a vu (n° **35**) que le nombre total de ces arrangements de signe est égal à $2^{\frac{4.3}{2}} = 64$. Or, si (n° **30**) $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)$ restant arbitraire, les cinq quantités analogues sont égales à $+1$, l'équation (1) admet toujours des solutions entières. Ainsi, comme la quantité $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)$ peut être successivement permutée avec les cinq quantités analogues, nous aurons six ou plutôt sept assemblages pour lesquels on pourra affirmer la possibilité de l'équation considérée en valeurs entières. Ces assemblages sont pour l'un les six quantités positives, et, pour les six suivants, cinq quantités positives jointes à une sixième négative. En général (n° **31**) si le déterminant renfermait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2, on aurait $\frac{m(m-1)}{2}+1$ assemblages de signe des quantités $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right), \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right), \ldots$ pour lesquels on pourrait affirmer que l'équation correspondante admet des solutions entières. Dans le cas de m pair, ce nombre d'assemblages pourrait même être doublé (n° **34**) par le changement de signe de toutes les quantités qui entrent dans chacun d'eux. Pour l'équation (1) on est donc déjà certain que quatorze assemblages assurent la possibilité en valeurs entières.

Pour déterminer l'ensemble de ceux qui sont dans ce cas, rappelons (n° **36**) que, quels que soient les signes de $\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\right)$ et de $\left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}\right)$, l'équation (1) est toujours possible en valeurs entières, lorsque

$$\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\right) = \pm 1,$$

ou, ce qui revient au même, lorsque

$$(a) \qquad \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{B}}\right) = 1;$$

mais, comme dans ces égalités (a) les facteurs premiers A, B, C, D peuvent être permutés, l'équation (1) sera aussi possible en entiers dans chacun des deux cas suivants :

$$(b) \qquad \left(\frac{AC}{B}\right) = \left(\frac{AC}{D}\right) = \left(\frac{BD}{A}\right) = \left(\frac{BD}{C}\right) = 1,$$

$$(c) \qquad \left(\frac{AD}{B}\right) = \left(\frac{AD}{C}\right) = \left(\frac{BC}{A}\right) = \left(\frac{BC}{D}\right) = 1.$$

Les égalités (a) comprennent huit assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ..., savoir

$$\left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = \pm 1 \begin{cases} \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \pm 1 & \text{(4 assemblages)}, \\ \left(\frac{A}{B}\right) = -\left(\frac{C}{D}\right) & \text{(4 assemblages)}. \end{cases}$$

De même, chacune des égalités (b) et (c) fournirait huit assemblages; mais les deux suivants

$$\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{B}{D}\right) = \pm 1,$$

qui dérivent de ces égalités (b) et (c), sont déjà compris dans ceux qui provenaient des égalités (a), de telle sorte que, en réalité, les conditions (a), (b) et (c) ne produisent que vingt assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ... pour lesquels on peut affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières.

Cela posé, rappelons aussi (n° **43**) que, quels que soient les signes de $\left(\frac{A}{B}\right)$ et de $\left(\frac{C}{D}\right)$, l'équation (1) est possible en nombres entiers, lorsque

$$(a_1) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right) = \left(\frac{AB}{D}\right) = \left(\frac{CD}{A}\right) = \left(\frac{CD}{B}\right) = -1,$$

et subsidiairement dans chacun des cas suivants,

$$(b_1) \qquad \left(\frac{AC}{B}\right) = \left(\frac{AC}{D}\right) = \left(\frac{BD}{A}\right) = \left(\frac{BD}{C}\right) = -1,$$

$$(c_1) \qquad \left(\frac{AD}{B}\right) = \left(\frac{AD}{C}\right) = \left(\frac{BC}{A}\right) = \left(\frac{BC}{D}\right) = -1.$$

Ces trois séries d'égalités produiraient comme ci-dessus vingt-quatre assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$, ..., pour lesquels on pourra affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières. Mais on constaterait facilement d'une part que ces vingt-quatre assemblages se réduisent à dix-huit réellement distincts entre eux, et d'autre part que, parmi ces dix-huit derniers, six rentrent dans ceux qui provenaient des conditions (a), (b), (c). Les douze assemblages à éliminer sont :

1° Les quatre provenant de (a_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{B}\right)=\left(\frac{C}{D}\right)=\pm 1$,

2° Les quatre provenant de (b_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=\pm 1$,

3° Les quatre provenant de (c_1) pour lesquels $\left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=\pm 1$.

Ainsi en résumé les égalités (a), (b), (c) et (a_1), (b_1), (c_1) fournissent trente-deux assemblages de signe distincts entre eux, pour lesquels la méthode suivie permet d'affirmer que l'équation (1) admet des solutions entières.

Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation* $x^2 - 2\mathrm{ABCD}y^2 = -1$, *dans laquelle* A, B, C, D *représentent des facteurs premiers* $8n+5$, *admet toujours des solutions entières dans chacun des cas suivants :*

$$1^\circ \text{ Si } \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{CD}{A}\right)=\left(\frac{CD}{B}\right),$$

$$2^\circ \text{ Si } \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{BD}{A}\right)=\left(\frac{BD}{C}\right),$$

$$3^\circ \text{ Si } \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{BC}{A}\right)=\left(\frac{BC}{D}\right).$$

45. *Remarque.* — Les équations de condition inscrites (n° **30**) permettraient de constater *à posteriori* que l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2\mathrm{ABCD}y^2 = -1$$

admet des solutions entières dans chacun des trois cas qui viennent d'être spécifiés. Mais, sans nous arrêter à ce détail, nous allons établir que ces trois séries d'égalités comprennent bien tous les cas pour lesquels la méthode suivie permet d'affirmer que l'équation (1) admet des valeurs entières.

On sait en effet (n° **41**) que, dans chacun des deux cas

$$(m) \qquad \left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=1, \quad \left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=-1;$$

$$(n) \qquad \left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{B}{C}\right)=-1, \quad \left(\frac{A}{D}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=+1,$$

qui sont compris l'un et l'autre dans les égalités

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{2CD}{A}\right)=\left(\frac{2CD}{B}\right)=1,$$

on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières.

On sait aussi (n° **39**) qu'il en est de même dans les cas

$$(p) \qquad \left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=1, \quad \left(\frac{B}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=-1;$$

$$(q) \qquad \left(\frac{A}{C}\right)=\left(\frac{A}{D}\right)=-1, \quad \left(\frac{B}{C}\right)=\left(\frac{B}{D}\right)=1$$

qui sont compris tous deux dans les égalités

$$(\alpha_1) \qquad \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{2CD}{A}\right)=\left(\frac{2CD}{B}\right)=-1.$$

Or, il est évident que, dans les égalités (α) et (α_1), les facteurs premiers A, B, C, D peuvent être permutés. Par suite, en vertu de la méthode suivie, on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières dans chacun des trois cas suivants :

$$1^\circ \qquad \text{Si } \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{2CD}{A}\right)=\left(\frac{2CD}{B}\right);$$

$$2^\circ \qquad \text{Si } \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{2BD}{A}\right)=\left(\frac{2BD}{C}\right);$$

$$3^\circ \qquad \text{Si } \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{2BC}{A}\right)=\left(\frac{2BC}{D}\right).$$

On constaterait, comme ci-dessus (nº **44**), que ces égalités correspondent à trente-deux assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right), \left(\frac{A}{C}\right), \dots$, de telle sorte que, sur un nombre total de soixante-quatre assemblages, l'équation (1) admet toujours des valeurs entières pour trente-deux d'entre eux, tandis que, par la méthode suivie, on n'arrive à aucune conclusion précise pour les trente-deux autres. On se rappelle (nº **29**) qu'un partage analogue par moitié a été déterminé pour l'équation

$$x^2 - 2\,\mathrm{ABC}\,y^2 = -1.$$

Les conditions inscrites dans l'énoncé du théorème (nº **44**) comprennent donc tous les cas pour lesquels la méthode permet d'affirmer la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières. Ces conditions peuvent être remplacées par les suivantes qui, conformément à ce qui sera ultérieurement démontré, sont susceptibles d'être étendues aux équations analogues dans lesquelles le déterminant contiendrait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2. L'équation (1) admet en effet des solutions entières dans chacun des sept cas suivants :

	Nombre d'assemblages de signe pour	
	m quelconque.	$m = 4$.
1° Si les quantités $\left(\frac{A}{B}\right), \dots$ sont toutes positives.	1	1
2° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = -1$, les quantités analogues étant toutes positives.	$\frac{m(m-1)}{2}$	6
3° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives. . . .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}$	12
4° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = -1$, les autres quantités étant positives	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.4}$	3
5° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = -1$ ou si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = -1$, les autres quantités étant positives. .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.4}$	6
6° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = -1$, les autres quantités étant positives . .	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$	1
7° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{C}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives.	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.4}$	3
Total pour $m = 4$		32

De même on peut substituer aux conditions (α), (β) et (γ) inscrites ci-dessus, relativement aux trente-deux assemblages pour lesquels la méthode ne permet pas d'affirmer que l'équation (1) admet des solutions entières, les conditions suivantes qui sont aussi applicables à une équation qui contiendrait m facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant. On ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation (1) en valeurs entières dans chacun des quatre cas suivants :

	Nombre d'assemblages de signe pour	
	m quelconque.	$m = 4$.
1° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1$, les quantités analogues étant toutes positives...	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2}$	12
2° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = -1$, les autres quantités étant positives......	$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$	4
3° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = -1$, les autres quantités étant positives......	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$	4
4° Si $\left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1$, les autres quantités étant positives.	$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}$	12
Total pour $m = 4$........................		32

46. D'après la forme des conditions relatives à la possibilité en valeurs entières de l'équation $x^2 - 2ABCDy^2 = -1$, inscrites (n° **44**), on voit que si cette équation est possible pour certains assemblages de signe des six quantités $\left(\frac{A}{B}\right)$, $\left(\frac{A}{C}\right)$,..., elle admettra aussi des solutions entières pour les assemblages qu'on obtiendrait en changeant le signe des six quantités précitées. Cette propriété n'est pas particulière à l'équation considérée; elle s'étend à toutes les équations analogues qui renferment un nombre pair de facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ combinés avec le facteur 2 dans leur déterminant. Les équations de condition relatives à ces équations contiennent en effet (n^{os} **15** et **31**) un nombre pair de facteurs premier à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2, ce qui suffit pour conduire à la proposition énoncée.

47. Après cette digression sur l'équation

$$x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

considérons encore un cas particulier de l'équation générale examinée (n^o **42**). En partant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCDy^2 = -1,$$

recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver pour la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2ABCDEFy^2 = -1,$$

en supposant remplies les conditions suivantes

$$(a) \quad \left(\frac{A}{E}\right) = \left(\frac{B}{E}\right) = \left(\frac{C}{E}\right) = \left(\frac{D}{F}\right) = 1, \quad \left(\frac{A}{F}\right) = \left(\frac{B}{F}\right) = \left(\frac{C}{F}\right) = \left(\frac{D}{E}\right) = -1$$

dans lesquelles les signes des seconds membres peuvent être permutés.

L'équation (2) renfermant six facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant, le nombre total des équations de condition (α_2) sera égal à $2^{6-1} - 2 = 30$ (n^o **31**). Mais il suffira (n^o **42**) de se préoccuper de $2^{6-3} - 2 = 6$ équations, savoir :

$$(\alpha_2) \quad \left\{\begin{aligned} &ABh^2 - 2CDEFH'^2 = \pm 1,\\ &ACh^2 - 2BDEFH'^2 = \pm 1,\\ &BCh^2 - 2ADEFH'^2 = \pm 1,\\ &ABEFh^2 - 2CDH'^2 = \pm 1,\\ &ACEFh^2 - 2BDH'^2 = \pm 1,\\ &BCEFh^2 - 2ADH'^2 = \pm 1. \end{aligned}\right.$$

Or, si nous bornant à considérer les quatre facteurs premiers du déterminant de l'équation (1), nous joignons aux conditions (a) l'une quelconque des conditions suivantes :

$$(a_1) \qquad \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1,$$

$$(a_2) \qquad \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = \left(\frac{C}{A}\right) = -1,$$

$$(a_3) \qquad \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = -1,$$

$$(a_4) \qquad \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{C}\right) = \left(\frac{A}{D}\right) = \left(\frac{B}{C}\right) = -1$$

[les quantités analogues complémentaires $\left(\frac{B}{D}\right)\cdots$ étant positives dans chacun des quatre cas], conditions en vertu desquelles (n° **45**) on ne peut pas affirmer la possibilité de cette équation (1) en valeurs entières, il sera facile de reconnaître que les équations (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H'.

Nous aurons en effet les six relations

$$\left(\frac{2\,\mathrm{CDEF}}{\mathrm{B}}\right) = \left(\frac{2\,\mathrm{BDEF}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{2\,\mathrm{ADEF}}{\mathrm{B}}\right) = \left(\frac{\mathrm{ABEF}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{ACEF}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{BCEF}}{\mathrm{D}}\right) = -1,$$

d'après lesquelles les première, deuxième,..., sixième équations de condition (α_2) ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H', dans le cas où les égalités (a) sont satisfaites, soit en même temps que les conditions (a_1), soit avec les conditions (a_2).

On arrivera à la même conséquence lorsque les conditions (a) seront ajoutées soit aux égalités (a_3), soit aux égalités (a_4). Les égalités (a_3) peuvent en effet se mettre sous la forme

$$(a_3) \qquad \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}\right) = 1, \text{ les quantités analogues étant négatives,}$$

d'où, en tenant compte des permutations qu'on peut faire subir aux facteurs premiers A, B, C, D, il résulte que ces égalités (a_3) dérivent des égalités (a_2) par le changement de signe des six quantités qui entrent dans l'une de ces égalités (a_2). Les égalités (a_4) dérivent d'une manière analogue des conditions (a_1). Dès lors on peut affirmer (n° **42**) que les équations de condition (α_2) sont impossibles en valeurs entières de h et de H', lorsque les conditions (a) seront réunies soit aux égalités (a_3), soit aux égalités (a_4).

Pour compléter ce qui précède, il reste à établir que, si les conditions (a) sont satisfaites en même temps que l'une des trois égalités

$$1^\circ \qquad \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{B}}\right),$$

$$2^\circ \qquad \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{B}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{D}}\right) = \left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{C}}\right),$$

$$3^\circ \qquad \left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{B}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{D}}\right),$$

qui expriment (n° **44**) que l'équation (1) admet toujours des solutions entières, on ne pourra arriver à aucune conclusion précise sur la possibilité de l'équation (2) en valeurs de même nature.

La démonstration étant la même dans les divers cas, bornons-nous à en considérer un seul, celui des égalités

$$\left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{CD}{A}\right)=\left(\frac{CD}{B}\right)=1;$$

nous aurons dans cette hypothèse

$$\left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{2CDEF}{A}\right)=\left(\frac{2CDEF}{B}\right)=1,$$

égalités qui prouvent que la première des équations de condition (α_2) peut admettre des valeurs entières, ou, en d'autres termes, que l'équation (2) peut être impossible en valeurs de même nature.

Ces résultats nous conduisent à la proposition suivante, dans laquelle les facteurs premiers A, B, C et D qui entrent dans les égalités (a) peuvent être permutés deux à deux, et dans laquelle aussi un ou deux facteurs premiers de l'équation (1) peuvent être permutés soit avec E ou F, soit avec E et F.

Théorème. — *L'équation $x^2-2\,\mathrm{ABCDEF}\,y^2=-1$ qui contient six facteurs premiers $8n+5$ dans son déterminant admet toujours des solutions entières lorsque les conditions*

$$(a)\qquad \left(\frac{A}{E}\right)=\left(\frac{B}{E}\right)=\left(\frac{C}{E}\right)=\left(\frac{D}{F}\right)=\pm1;\quad \left(\frac{A}{F}\right)=\left(\frac{B}{F}\right)=\left(\frac{C}{F}\right)=\left(\frac{D}{E}\right)=\mp1,$$

dans lesquelles les signes supérieurs des seconds membres marchent ensemble ainsi que les signes inférieurs, sont satisfaites, et lorsque de plus l'une des conditions suivantes (α), (β) *ou* (γ) *se trouve également satisfaite*

$$(\alpha)\qquad \left(\frac{AB}{C}\right)=\left(\frac{AB}{D}\right)=\left(\frac{2CD}{A}\right)=\left(\frac{2CD}{B}\right),$$

$$(\beta)\qquad \left(\frac{AC}{B}\right)=\left(\frac{AC}{D}\right)=\left(\frac{2BD}{A}\right)=\left(\frac{2BD}{C}\right),$$

$$(\gamma)\qquad \left(\frac{AD}{B}\right)=\left(\frac{AD}{C}\right)=\left(\frac{2BC}{A}\right)=\left(\frac{2BC}{D}\right).$$

48. *Remarque.* — Il résulte aussi de la discussion précédente que,

dans l'hypothèse où les égalités (a) sont vérifiées, on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2\,\mathrm{ABCDEF}\,y^2 = -1,$$

lorsque les conditions inscrites dans le théorème (nº **44**) sont satisfaites, ou, en d'autres termes, lorsque l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2\,\mathrm{ABCD}\,y^2 = -1$$

admet forcément des solutions entières.

On peut remarquer encore que les conditions (a) du théorème (nº **47**) peuvent être remplacées par les suivantes

$$\left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{F}}\right) = \left(\frac{2\,\mathrm{EF}}{\mathrm{A}}\right) = \left(\frac{2\,\mathrm{EF}}{\mathrm{B}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{E}}\right) = \left(\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{F}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{C}}\right) = \left(\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{D}}\right) = -1,$$

en vertu desquelles l'équation $x^2 - 2\mathrm{CDEF}\,y^2 = -1$ admet toujours des solutions entières, tandis qu'on ne peut rien affirmer sur la possibilité de l'équation $x^2 - 2\,\mathrm{ABEF}\,y^2 = -1$ en valeurs de même nature.

Le théorème (nº **47**) peut d'ailleurs être généralisé de la manière suivante :

49. Théorème. — *L'équation*

$$(2) \qquad x^2 - 2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{2s-1}\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{A}_{2t-1}\mathrm{PQ}\,y^2 = -1$$

considérée (nº **42**) *admet toujours des solutions entières, lorsque les conditions*

$$(a) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{P}}\right) = \left(\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{P}}\right) = \ldots = \left(\frac{\mathrm{A}_{2s-1}}{\mathrm{P}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{Q}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{Q}}\right) = \ldots = \left(\frac{\mathrm{B}_{2t-1}}{\mathrm{Q}}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{Q}}\right) = \left(\frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{Q}}\right) = \ldots = \left(\frac{\mathrm{A}_{2s-1}}{\mathrm{Q}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{P}}\right) = \left(\frac{\mathrm{B}_2}{\mathrm{P}}\right) = \ldots = \left(\frac{\mathrm{B}_{2t-1}}{\mathrm{P}}\right) = \mp 1, \end{cases}$$

sont satisfaites, et lorsque de plus les facteurs premiers $8n + 5$ *qui entrent dans le déterminant de l'équation*

$$(1) \qquad x^2 - 2\,\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\ldots\mathrm{A}_{2s-1}\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\ldots\mathrm{B}_{2t-1}\,y^2 = -1$$

satisfont à l'une quelconque des quatre conditions suivantes (b_1), (b_2),

$(b_3), (b_4)$

$$(b_1)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_2}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{B_1}\right)=\left(\frac{B_1}{B_2}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-3}}{B_{2t-2}}\right)=\pm 1,$$

$$(b_2)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_2}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2s-1}}{B_1}\right)=\ldots=\left(\frac{B_{2t-3}}{B_{2t-2}}\right)=\left(\frac{B_{2t-2}}{A_1}\right)=\pm 1,$$

$$(b_3)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_1}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_1}{B_1}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)=\pm 1,$$

$$(b_4)\quad \left(\frac{A_1}{A_2}\right)=\left(\frac{A_1}{A_3}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{A_{2s-1}}\right)=\ldots=\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)=\left(\frac{A_f}{A_g}\right)=\pm 1,$$

le signe des quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_k}{B_l}\right),\ldots$ *étant contraire à celui des deuxièmes membres des égalités* (b_1), (b_2), (b_3), (b_4).

1° *Cas des égalités* (b_1). — On sait (n° **42**) qu'il suffit de se préoccuper des équations de condition des première et troisième séries qui contiennent au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes $A_1 \ldots A_{2s-1}$ et $B_1 \ldots B_{2t-1}$.

Cela posé, il est facile de constater en premier lieu que toutes les équations de condition de la troisième série, dans lesquelles le produit PQ des deux facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ P et Q entre au coefficient de h^2, sont impossibles en valeurs entières de h et de H'.

Suivant la place occupée par le facteur premier B_{2t-1}, le seul qui n'entre pas dans les égalités (b_1), ces équations de condition se ramènent en effet aux deux types suivants :

$$A_\alpha \ldots B_{2t-1} PQ h^2 - 2A_\beta \ldots B_\gamma H'^2 = \pm 1,$$
$$A_\delta \ldots B_\lambda PQ h^2 - 2A_\alpha \ldots B_{2t-1} H'^2 = \pm 1,$$

et comme, en vertu des égalités (b_1), on a

$$\left(\frac{2A_\beta \ldots B_\gamma}{B_{2t-1}}\right) = -1, \quad \left(\frac{A_\alpha \ldots B_\lambda PQ}{B_{2t-1}}\right) = -1,$$

ces équations ne peuvent pas admettre de valeurs entières pour h et H'.

Il suffit donc de considérer les équations de condition de la première série, dans lesquelles le produit PQ entre au coefficient de H'^2.

Parmi ces équations, toutes celles qui contiennent A_1 et A_2 à des coefficients différents sont impossibles en valeurs entières de h et de H'. Elles se ramènent en effet aux deux types

$$(5_2)\qquad A_1\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(6_2)\qquad A_2\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma h^2 - 2A_1\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

et l'impossibilité dont il vient d'être parlé est prouvée par les relations

$$\left(\frac{2A_2\ldots A_6 B_\alpha\ldots B_\delta PQ}{A_1}\right) = -1,\quad \left(\frac{A_2\ldots A_\alpha B_6\ldots B_\gamma}{A_1}\right) = -1.$$

On reconnaîtra d'une manière analogue : 1° que les équations qui contiendraient A_1 et A_2, sans A_3, au même coefficient, seraient aussi impossibles en valeurs entières ; 2° que celles qui contiendraient au même coefficient le produit $A_1 A_2 A_3$, sans le facteur premier A_4, seraient dans le même cas ; et ainsi de suite jusqu'aux équations dans lesquelles tous les facteurs du groupe $A_1\ldots A_{2s-1}$ entreraient au coefficient de H'^2, puisque (n° **42**) on n'a pas à se préoccuper de celles qui contiendraient tous les facteurs de ce groupe au coefficient de h^2.

Il ne reste donc plus à examiner que les équations de condition qui ne contiennent aucun facteur du groupe $A_1, A_2\ldots$ au coefficient de h^2. Celles qui contiennent B_1 audit coefficient de h^2 et qui sont représentées par le type

$$(7_2)\qquad B_1\ldots B_\alpha h^2 - 2A_1 A_2\ldots A_{2s-1} B_6\ldots B_\gamma PQH'^2 = \pm 1$$

sont impossibles en valeurs entières de h et de H' à cause de la relation $\left(\frac{B_1\ldots B_\alpha}{A_{2s-1}}\right) = -1$. Il suffit donc de se préoccuper des équations qui contiennent B_1 au coefficient de H'^2.

En ce qui concerne ces dernières équations, on constatera comme ci-dessus : 1° que celles qui contiennent B_2 au coefficient de h^2 sont impossibles en valeurs entières de h et de H' ; 2° que celles qui contiennent le produit $B_1 B_2$ sans le facteur B_3 au coefficient de H'^2 sont dans le même cas ; et ainsi de suite jusqu'à l'équation

$$B_{2t-2} B_{2t-1} h^2 - 2A_1 A_2\ldots A_{2s-1} B_1 B_2\ldots B_{2t-3} PQH'^2 = \pm 1.$$

Or cette dernière est également impossible en valeurs entières de h et de H′, à cause de la relation $\left(\frac{B_{2t-2}B_{2t-1}}{B_{2t-3}}\right) = -1$. Le premier cas du théorème est donc démontré.

2° *Cas des égalités* (b_2). — Les égalités (b_2) ne diffèrent des égalités (b_1) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_{2t-2}}{A_1}\right)$. Par cela même, en vertu de la démonstration précédente, on n'a pas à considérer les équations de condition de la troisième série, ni celles de la première série qui contiennent A_1 et B_{2t-2} au même coefficient. Il suffit donc d'examiner les deux types suivants :

$$(8_2) \qquad A_1\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_\gamma\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(9_2) \qquad A_\alpha\ldots A_\beta B_\beta\ldots B_{2t-2}h^2 - 2A_1\ldots A_\gamma B_\alpha\ldots B_\gamma PQH'^2 = \pm 1.$$

En considérant d'abord l'équation (8_2), on reconnaît, d'après l'égalité $\left(\frac{2A_\gamma\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQ}{A_1}\right) = -1$, qu'elle n'admet pas de valeurs entières pour h et H′, pourvu que A_2 entre au coefficient de h^2.

Si A_2 entre au contraire au coefficient de H'^2, cette même équation (8_2) se divise en deux autres suivant la place occupée par A_3,

$$(8_3) \qquad A_1A_3\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$A_1\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_3\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1.$$

La dernière de ces équations est impossible en valeurs entières de h et de H′, en vertu de la relation $\left(\frac{A_1\ldots A_\alpha A_\beta\ldots B_\gamma}{A_2}\right) = -1$. L'équation (8_3) se divisera de même en deux autres suivant la place occupée par A_4, et ainsi de suite, de telle sorte que, en négligeant successivement les équations dont l'impossibilité en valeurs entières de h et de H′ serait constatée comme ci-dessus, on passera par une série d'équations telles que

$$(8_4) \qquad A_1A_3\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(8_5) \qquad A_1A_3A_5\ldots A_\alpha B_\beta\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

. . . . ;

$$(8_n)\qquad A_1A_3\ldots A_{2s-1}B_6\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_{2s-2}B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$(8_{n+1})\qquad A_1A_3\ldots A_{2s-1}B_2\ldots B_\gamma h^2 - 2A_2A_4\ldots A_{2s-2}B_\alpha\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(8_p)\quad A_1A_3\ldots A_{2s-1}B_2B_4\ldots B_{2t-4}h^2 - 2A_2A_4\ldots A_{2s-2}B_1B_3\ldots B_{2t-2}PQH'^2 = \pm 1.$$

En examinant successivement ces équations, on reconnaîtra que l'équation (8_4) n'admettra pas de valeurs entières lorsque A_5 entrera au coefficient de H'^2, et ainsi de suite jusqu'à l'équation (8_n), laquelle (n° **42**) ne pourra admettre de valeurs entières que dans le cas de s pair. Mais, dans ce cas de s pair, on passera à l'équation (8_{n+1}) en tenant compte de la place occupée par B_1, et ainsi de suite jusqu'à l'équation (8_p), qui ne peut pas admettre de valeurs entières en vertu de la relation $\left(\frac{A_1 . A_3 \ldots B_{2t-4}}{B_{2t-3}}\right) = -1$. La place occupée par le facteur B_{2t-1} dans l'équation (8_p) n'est pas indiquée; mais on reconnaît facilement, au moyen des égalités (b_2), que cette place n'influe pas sur la conséquence qui vient d'être signalée.

Un raisonnement similaire est applicable aux équations représentées par le type (9_2). Les équations successives que l'on aurait à considérer seraient

$$(9_3)\qquad A_2A_\alpha\ldots A_6B_6\ldots B_{2t-2}h^2 - 2A_1\ldots A_\gamma B_\alpha\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(9_n)\qquad A_2A_4\ldots A_{2s-2}B_6\ldots B_{2t-2}h^2 - 2A_1A_3\ldots A_{2s-1}\ldots\ldots B_\delta PQH'^2 = \pm 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(9_p)\quad \left\{\begin{aligned} &A_2A_4\ldots A_{2s-2}B_1B_3\ldots B_{2t-3}B_{2t-2}h^2 \\ &\qquad - 2A_1A_3\ldots A_{2s-1}B_2B_4\ldots B_{2t-4}PQH'^2 = \pm 1.\end{aligned}\right.$$

Le théorème est donc démontré pour le cas des égalités (b_2).

3° *Cas des égalités* (b_3). — Les équations de condition de chacune des première et troisième séries se divisent en deux types suivant la place occupée par A_1 :

$$1^{\text{re}}\text{ série.}\quad \left\{\begin{aligned} &A_1\ldots A_\alpha B_\gamma\ldots B_\delta h^2 - 2A_6\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_6 PQH'^2 = \pm 1,\\ &A_\alpha\ldots A_6 B_\gamma\ldots B_\delta h^2 - 2A_1\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_6 PQH'^2 = \pm 1,\end{aligned}\right.$$

$$3^{\text{e}}\text{ série.}\quad \left\{\begin{aligned} &A_1\ldots A_\alpha B_\gamma\ldots B_\delta PQh^2 - 2A_6\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_6 H'^2 = \pm 1,\\ &A_\alpha\ldots A_6 B_\gamma\ldots B_\delta PQh^2 - 2A_1\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_6 H'^2 = \pm 1.\end{aligned}\right.$$

Or, d'après les égalités (b_3), nous avons les relations

$$\left(\frac{A_1\ldots A_\alpha B_\gamma\ldots B_\delta}{A_\varepsilon}\right)=-1,\qquad \left(\frac{2A_1\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_\varepsilon PQ}{A_\varepsilon}\right)=-1,$$
$$\left(\frac{2A_\varepsilon\ldots A_\delta B_\alpha\ldots B_\varepsilon}{A_1}\right)=-1,\qquad \left(\frac{A_\alpha\ldots A_\delta B_\gamma\ldots B_\delta PQ}{A_1}\right)=-1,$$

qui prouvent l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' des équations de condition représentées par les quatre types inscrits ci-dessus. Le théorème est donc démontré dans ce troisième cas.

4° *Cas des égalités* (b_4). — Il résulte de la démonstration du cas précédent que les équations de condition de la troisième série sont aussi impossibles en valeurs entières de h et de H' dans le cas des égalités (b_4). Il est clair en effet que les deux relations en vertu desquelles cette impossibilité a été établie ci-dessus ne cesseront pas d'être exactes lorsqu'on ajoutera aux égalités (b_3) l'égalité supplémentaire $\left(\frac{A_f}{A_g}\right)=\pm 1$, ou plutôt lorsqu'on changera le signe de cette dernière quantité. Il suffit donc d'examiner les équations de condition de la première série. Suivant la place occupée par A_f et A_g, ces équations sont représentées par le type suivant :

$$A_f\ldots B_\alpha h^2-2A_g\ldots B_\varepsilon PQH'^2=\pm 1,$$

lequel, en vertu de la relation $\left(\frac{A_f\ldots B_\alpha}{A_g}\right)=-1$ dérivant des égalités (b_4), ne peut pas admettre de valeurs entières pour h et H'. On constate d'ailleurs que, en raison de la symétrie, il est inutile de considérer le type

$$A_g\ldots B_\alpha h^2-2A_f\ldots B_\varepsilon PQH'^2=\pm 1.$$

Le théorème est donc démontré.

50. Les facteurs premiers $8n+5$ qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(2)\qquad x^2-2A_{2s}A_{2s-1}\ldots A_{2t+1}A_{2t}B_{2t-1}\ldots B_2B_1PQy^2=-1$$

satisfaisant aux conditions

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{A_{2s}}{P}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{P}\right)=\left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{B_2}{Q}\right)=\left(\frac{B_1}{Q}\right)=\pm 1,\\ &\left(\frac{A_{2s}}{Q}\right)=\left(\frac{A t_{s-1}}{Q}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{Q}\right)=\left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right)=\ldots=\left(\frac{B_2}{P}\right)=\left(\frac{B_1}{P}\right)=\mp 1,\end{aligned}\right.$$

considérées ci-dessus, recherchons les conclusions auxquelles on pourra arriver sur la possibilité en valeurs entières de cette équation (2), lorsque les égalités (b_1) ou (b_2)... inscrites (n° **49**) seront remplacées par l'une des deux suivantes :

$$(b_5)\quad \left(\frac{A_{2s}}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{A_{2s-2}}\right)=\ldots=\left(\frac{A_{2t}}{B_{2t-1}}\right)=\ldots=\left(\frac{B_3}{B_2}\right)=\left(\frac{B_2}{B_1}\right),$$

$$(b_6)\quad \left(\frac{A_{2s}}{A_{2s-1}}\right)=\left(\frac{A_{2s-1}}{A_{2s-2}}\right)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\left(\frac{B_3}{B_2}\right)=\left(\frac{B_2}{B_1}\right)=\left(\frac{B_1}{A_{2s}}\right)$$

[le signe des quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_{2s}}{A_k}\right)\cdots$ étant contraire au signe des seconds membres des égalités (b_5) ou (b_6)].

1° *Cas des égalités* (b_5). — Les égalités (b_5) ne différant des conditions (b_1) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$, il suffira, dans la présente recherche, de considérer les équations de condition dans lesquelles B_2 et B_1 n'entrent pas au même coefficient.

Les équations de condition de la première série se ramènent, par suite, aux deux types :

$$A_\alpha\ldots B_2 h^2 - 2A_6\ldots B_1 PQ H'^2 = \pm 1,$$
$$A_\alpha\ldots B_1 h^2 - 2A_6\ldots B_2 PQ H'^2 = \pm 1.$$

Or, en vertu des relations (b_5), nous avons les égalités

$$\left(\frac{A_\alpha\ldots B_2}{B_1}\right)=-1\quad\left(\frac{2A_6\ldots B_2 PQ}{B_1}\right)=-1,$$

qui prouvent l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' des équations représentées par ces types.

Les équations de la troisième série se ramènent aussi à deux formes générales :

$$(5_2)\qquad A_\alpha\ldots B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_1\,H'^2 = \pm 1,$$
$$(6_2)\qquad A_\alpha\ldots B_1\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_2\,H'^2 = \pm 1.$$

Considérons d'abord le type (5_2); suivant la place occupée par le facteur premier B_3, ces équations se décomposent en deux autres types :

$$(5_3)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_\alpha\ldots B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_1\,H'^2 = \pm 1,\\ A_\alpha\ldots B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_3\,B_1\,H'^2 = \pm 1.\end{array}\right.$$

Or, la dernière de ces équations est impossible en valeurs entières de h et de H' en vertu de la relation $\left(\dfrac{2A_\beta\ldots B_3B_1}{B_2}\right) = -1$.

En ayant égard à la place occupée par les divers facteurs premiers du déterminant, on passera ainsi par les équations successives :

$$\begin{array}{ll}
(5_4) & A_\alpha\ldots\ldots\ldots B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots\ldots B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1,\\
(5_5) & A_\alpha\ldots\ldots\ldots B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1,\\
(5_6) & A_\alpha\ldots\ldots B_6\,B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1,\\
(5_7) & A_\alpha\ldots B_7\,B_6\,B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1,\\
(5_8) & A_\alpha\ldots B_7\,B_6\,B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_\beta\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1,\\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

En remarquant que les facteurs premiers placés à gauche de B_1 dans le déterminant de l'équation (1) se divisent entre les coefficients de h^2 et de H'^2, de telle sorte que ceux de rang $4n$ ou $4n+1$ se placent au coefficient de H'^2, tandis que ceux de rang $4n+2$ ou $4n+3$ entrent au coefficient de h^2, nous arriverons finalement à l'une des deux équations :

$$(5_\alpha)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{2s-1}\,A_{2s-2}\ldots B_7\,B_6\,B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_{2s}\,A_{2s-3}\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1\\ \qquad\qquad\text{pour } 2s = 4n,\end{array}\right.$$

$$(5_\beta)\qquad \left\{\begin{array}{l} A_{2s}\,B_{2s-3}\ldots B_7\,B_6\,B_3\,B_2\,PQh^2 - 2A_{2s-1}\,A_{2s-2}\ldots B_5\,B_4\,B_1\,H'^2 = \pm 1\\ \qquad\qquad\text{pour } 2s = 4n+2.\end{array}\right.$$

Avant d'examiner ces deux équations, occupons-nous de la discussion des équations représentées par le type (6_2). En suivant la marche tracée ci-dessus, on passera successivement par les équations

$$(6_3) \qquad A_\alpha \ldots\ldots B_1 PQh^2 - 2A_6 \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_4) \qquad A_\alpha \ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_6 \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_5) \qquad A_\alpha \ldots B_5 B_4 B_1 PQh^2 - 2A_6 \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$(6_6) \qquad A_\alpha \ldots B_5 B_4 B_1 PQh^2 - 2A_6 \ldots B_6 B_3 B_2 H'^2 = \pm 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(6_\alpha) \quad \begin{cases} A_{2s} A_{2s-3} \ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_{2s-1} A_{2s-2} \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1 \\ \text{pour } 2s = 4n, \end{cases}$$

$$(6_6) \quad \begin{cases} A_{2s-1} A_{2s-2} \ldots B_4 B_1 PQh^2 - 2A_{2s} A_{2s-3} \ldots B_3 B_2 H'^2 = \pm 1 \\ \text{pour } 2s = 4n + 2. \end{cases}$$

Cela posé, en considérant d'abord les équations (5_6) et (6_6) relatives au cas de $2s = 4n + 2$, on peut remarquer que ces équations, qui se déduisent l'une de l'autre par la permutation des coefficients de h^2 et de $2H'^2$, contiennent un nombre impair de facteurs premiers $8n + 5$ à chacun de ces coefficients. Jusqu'au facteur A_{2s-2}, qui est de rang $4n$, l'ensemble des facteurs premiers du déterminant de l'équation (1) se partage, en effet, en un nombre entier de groupes contenant chacun quatre facteurs consécutifs de rang $4n' + 1$, $4n' + 2$, $4n' + 3$, $4n''$. Or, pour chacun de ces groupes, deux facteurs entrent au coefficient de H'^2 des équations (5_6) et (6_6), tandis que les deux autres entrent au coefficient de h^2. Dès lors, comme dans les mêmes équations A_{2s} et A_{2s-1} entrent à des coefficients différents, il en résulte qu'elles renferment l'une et l'autre un nombre impair de facteurs premiers $8n + 5$ à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2. Par cela même (nos **15** et **31**), ces équations (5_6) et (6_6) sont impossibles en valeurs entières de h et de H', ou, en d'autres termes, dans les conditions où l'on s'est placé, l'équation (2) admet des solutions entières, pourvu que $2s$ soit de la forme $4n + 2$.

Dans le cas où $2s = 4n$, les équations (5_α) et (6_α), que l'on a à considérer, se déduisent aussi l'une de l'autre par la permutation des coefficients de h^2 et de $2H'^2$, et contiennent un nombre pair de facteurs premiers $8n+5$ à chacun des coefficients de h^2 et de H'^2. Par suite, comme les facteurs de chacun des groupes $A_{2s}\ldots$ et $B_{2t-1}\ldots$ entrent en nombre impair dans le déterminant, si le coefficient de h^2 de l'une d'elles contient un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes précités, le même coefficient, dans l'autre équation, contiendra un nombre impair de facteurs de chacun des mêmes groupes. Dès lors (n° **42**), l'une des équations (5_α) ou (6_α) est toujours impossible en valeurs entières de h et de H'. Mais la méthode ne permet pas d'affirmer l'impossibilité de l'autre équation. Admettons, en effet, que l'équation (6_α) contienne au coefficient de h^2 un nombre pair de facteurs premiers de chacun des groupes considérés, nous aurons, en vertu des égalités (b_5), les relations

$$\left(\frac{A_{2s}A_{2s-3}\ldots B_5 B_4 B_1 PQ}{B_3}\right) = 1 \quad \left(\frac{2A_{2s-1}A_{2s-2}\ldots B_6 B_3 B_2}{B_4}\right) = 1,$$

qui auraient leurs analogues pour tous les facteurs premiers des deux coefficients.

Ainsi, en résumé, *lorsque les égalités* (a) *et* (b_5) *sont satisfaites, l'équation* (2) *admet toujours des solutions entières si le nombre* $2s$ *de facteurs premiers* $8n+5$ *qui entrent dans le déterminant de l'équation* (1), *à laquelle elle se rattache, est de la forme* $4n+2$. *On ne peut rien affirmer sur la possibilité de la même équation en valeurs entières, lorsque* $2s = 4n$.

2° *Cas des égalités* (b_6). — Ces égalités ne diffèrent des égalités (b_5) que par le changement de signe de l'expression $\left(\frac{B_1}{A_{2s}}\right)$. Dès lors, comme dans les équations (5_α) et (6_α) considérées ci-dessus pour l'hypothèse $2s = 4n$, les facteurs premiers A_{2s} et B_1 entrent aux mêmes coefficients, il en résulte que lorsque les égalités (a) et (b_6) sont satisfaites et lorsque $2s = 4n$, la méthode ne permet pas d'affirmer la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières.

Dans l'hypothèse $2s = 4n+2$, il suffira, d'après le cas précédent, de considérer les équations de condition qui ne contiendront pas B_1

et A_{2s} au même coefficient. Ces équations se divisent en quatre types :

$$1^{re}\text{ série.}\quad\begin{cases}(7_2)\quad A_\alpha \ldots B_1 h^2 - 2A_{2s}\ldots B_\alpha PQ H'^2 = \pm 1,\\ (8_2)\quad A_{2s}\ldots B_\alpha h^2 - 2A_\alpha \ldots B_1 PQ H'^2 = \pm 1,\end{cases}$$

$$3^e\text{ série.}\quad\begin{cases}(9_2)\quad A_\alpha \ldots B_1 PQ h^2 - 2A_{2s}\ldots B_\alpha H'^2 = \pm 1,\\ (10_2)\quad A_{2s}\ldots B_\alpha PQ h^2 - 2A_\alpha \ldots B_1 H'^2 = \pm 1.\end{cases}$$

Par des considérations analogues aux précédentes, les types (7_2) et (8_2) de la première série se ramènent finalement aux équations

$$(7_\alpha)\quad A_{2s-1}A_{2s-3}\ldots B_7 B_5 B_3 B_1 h^2 - 2A_{2s}A_{2s-4}\ldots B_8 B_6 B_4 B_2 PQ H'^2 = \pm 1,$$

$$(8_\alpha)\quad A_{2s}A_{2s-2}\ldots B_8 B_6 B_4 B_2 h^2 - 2A_{2s-1}A_{2s-3}\ldots B_5 B_3 B_1 PQ H'^2 = \pm 1.$$

Or, comme $2s = 4n+2$, on constate facilement que ces équations (7_α) et (8_α) renferment un nombre impair de facteurs premiers $8n+5$ à chacun des coefficients. Elles sont donc impossibles en valeurs entières de h et de H' (nos **15** et **31**).

De même, en ayant égard à la place occupée dans les deux coefficients par les divers facteurs premiers du déterminant depuis B_1 jusqu'à A_{2s-2}, qui est de rang $4n$, les équations des types (9_2) et (10_2) se ramènent aux types

$$(9_\gamma)\quad\begin{cases}\ldots A_{2s-4}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ h^2\\ \qquad\qquad - 2A_{2s}\ldots A_{2s-2}\ldots B_8 B_7 B_4 B_3 H'^2 = \pm 1,\end{cases}$$

$$(10_\gamma)\quad\begin{cases}A_{2s}\ldots A_{2s-2}A_{2s-3}\ldots B_8 B_7 B_4 B_3 PQ h^2\\ \qquad\qquad - 2\ldots A_{2s-4}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 H'^2 = \pm 1.\end{cases}$$

Dans ces deux équations, le facteur premier A_{2s-1} est le seul dont la place ne soit pas encore assignée. Ainsi, comme le nombre de facteurs premiers du coefficient de h^2 doit être pair, le facteur A_{2s-1} devra entrer au coefficient de H'^2 de (9_γ) et au coefficient de h^2 de (10_γ). On obtiendra ainsi les équations finales

$$(9_\alpha)\quad A_{2s-4}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ h^2 - 2A_{2s}A_{2s-1}A_{2s-2}\ldots B_7 B_4 B_3 H'^2 = \pm 1,$$

$$(10_\alpha)\quad A_{2s}A_{2s-1}\ldots B_7 B_4 B_3 PQ h^2 - 2A_{2s-4}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 H'^2 = \pm 1,$$

qui sont impossibles en valeurs entières de h et de H' en vertu des égalités

$$\left(\frac{A_{2s-1}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1 PQ}{A_{2s-1}}\right) = -1 \quad \left(\frac{2A_{2s-1}\ldots B_6 B_5 B_2 B_1}{A_{2s-1}}\right) = -1.$$

Ainsi, en résumé, *lorsque les égalités* (a) *et* (b_6) *sont satisfaites, l'équation* (2) *admet toujours des solutions entières si* $2s = 4n + 2$, *tandis qu'on ne peut rien affirmer dans l'hypothèse* $2s = 4n$.

51. *Remarque*. — Dans les théorèmes précédents, les relations (a), dérivant des égalités $\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{A_2}\right) = \ldots = -1$, servent (n° **42**) à démontrer l'impossibilité en valeurs entières de h et de H' de toutes les équations de condition qui contiennent au coefficient de h^2 un nombre impair de facteurs premiers de l'un des deux groupes $A_1, A_2, \ldots$ et $B_1, B_2, \ldots$. Les relations (b_1) ou $(b_2), \ldots$, ou (b_6) servent ensuite à établir la même impossibilité pour les autres équations de condition. Or, comme les quantités $\left(\frac{A_\alpha}{A_6}\right)\cdots$ qui entrent d'une part dans les relations (a) et d'autre part dans les égalités (b_1) ou $(b_2), \ldots$ sont différentes, il en résulte que, dans les permutations diverses que l'on pourra faire subir aux facteurs premiers du déterminant dans le but de rechercher tous les assemblages de signes des quantités $\left(\frac{A_1}{A_2}\right)\cdots$ pour lesquels ces théorèmes permettent d'affirmer la possibilité des équations considérées en valeurs entières, on pourra, dans les égalités $(b_1), \ldots$, placer les facteurs premiers des deux groupes du déterminant dans un ordre quelconque, sans qu'il soit nécessaire que tous les facteurs d'un même groupe soient disposés les uns à la suite des autres.

Il n'est pas nécessaire, d'ailleurs, de rappeler (n° **42**) que dans ces théorèmes le nombre des facteurs premiers de chacun des deux groupes du déterminant doit toujours être impair.

52. La combinaison des théorèmes (n^{os} **38** et **49**) permet d'établir une série de propositions relatives aux équations considérées (n° **42**). Reprenons l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} PQ\, y^2 = -1,$$

qui admet toujours des solutions entières lorsque les égalités (a) du théorème (n° **49**) sont satisfaites, en même temps que l'une des conditions (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) du même théorème, et considérons l'équation

$$(3) \quad x^2 - 2A_1 A_2 \ldots A_{2s-1} B_1 B_2 \ldots B_{2t-1} B_{2t} B_{2t+1} PQ y^2 = -1,$$

qui dérive de l'équation (2) par l'introduction dans le déterminant de deux facteurs premiers B_{2t} et B_{2t+1} supposés l'un et l'autre de la forme $8n+5$, et se rattachant aux conditions précitées (a) de la manière suivante :

$$(a_1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A_1}{P}\right) = \left(\frac{A_2}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{P}\right) = \left(\frac{B_1}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{Q}\right) = \left(\frac{B_{2t}}{Q}\right) = \left(\frac{B_{2t+1}}{Q}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{A_1}{Q}\right) = \left(\frac{A_2}{Q}\right) = \ldots = \left(\frac{A_{2s-1}}{Q}\right) = \left(\frac{B_1}{P}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2t-1}}{P}\right) = \left(\frac{B_{2t}}{P}\right) = \left(\frac{B_{2t+1}}{P}\right) = \mp 1. \end{array} \right.$$

L'équation (3) admettra toujours des solutions entières (n° **38**) si, isolant les deux facteurs B_{2t} et B_{2t+1} de son déterminant, les autres facteurs premiers $A_1, A_2, \ldots, B_{2t-1}$, P, Q se partagent en deux groupes composés chacun d'un nombre pair de termes remplissant les conditions

$$(a_2) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{A_\alpha}{B_{2t}}\right) = \ldots = \left(\frac{B_\alpha}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{Q}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{A_\alpha}{B_{2t+1}}\right) = \ldots = \left(\frac{B_\alpha}{B_{2t+1}}\right) = \left(\frac{Q}{B_{2t+1}}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{A_\beta}{B_{2t}}\right) = \ldots = \left(\frac{B_\beta}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{P}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{A_\beta}{B_{2t+1}}\right) = \ldots = \left(\frac{B_\beta}{B_{2t+1}}\right) = \left(\frac{P}{B_{2t+1}}\right) = \pm 1. \end{array} \right.$$

Ainsi *l'équation* (3) *admet toujours des solutions entières lorsque les égalités* (a_1) *et* (a_2) *sont satisfaites, en même temps que l'une des conditions* (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) *du théorème* (n° **49**).

Il est utile de rappeler que, dans les égalités (a_1), le nombre des facteurs premiers de chaque groupe doit être impair, tandis que ce nombre doit être pair dans les égalités (a_2). De plus les quantités

$$\left(\frac{B_{2t}}{Q}\right) = \left(\frac{B_{2t+1}}{Q}\right) = \left(\frac{Q}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{Q}{B_{2t+1}}\right)$$

doivent avoir un signe contraire à celui des quantités

$$\left(\frac{B_{2t}}{P}\right) = \left(\frac{B_{2t+1}}{P}\right) = \left(\frac{P}{B_{2t}}\right) = \left(\frac{P}{B_{2t+1}}\right).$$

On reconnaîtrait aussi, d'après la marche suivie (nº **40**), que si les groupes des égalités (a_2) sont composés l'un et l'autre d'un nombre impair de termes, l'équation (3) ne pourrait pas admettre de solutions entières.

En introduisant dans le déterminant de l'équation (3) deux facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$, A_{2s} et A_{2s+1} se rattachant au premier groupe des conditions (a_1), ou bien deux facteurs B_{2t+2} et B_{2t+3} appartenant au deuxième groupe, et en établissant, relativement à ces deux nouveaux facteurs premiers, des conditions (a_3) analogues aux conditions (a_2), on obtiendrait une nouvelle équation (4), qui admettrait toujours des solutions entières, et ainsi de suite.

Les mêmes considérations sont évidemment applicables à la combinaison des théorèmes (nºˢ **38** et **50**).

53. Si les conditions (a) inscrites (nº **49**) sont satisfaites, et si en même temps les égalités (b_1), (b_2), (b_3) ou (b_4) considérées aussi (nº **49**) sont remplacées par l'une des conditions

$$(c_1)\qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2h-3}}{B_{2h-2}}\right),$$

$$(c_2)\qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{B_{2h-3}}{B_{2h-2}}\right) = \left(\frac{B_{2h-2}}{A_1}\right),$$

$$(c_3)\qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{A_1}{B_{2h-1}}\right),$$

$$(c_4)\qquad \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \left(\frac{A_1}{A_3}\right) = \ldots = \left(\frac{A_1}{B_{2h-1}}\right) = \left(\frac{A_f}{A_g}\right)$$

[le signe de toutes les quantités analogues complémentaires $\left(\frac{A_k}{B_l}\right)\ldots$ étant contraire à celui des seconds membres des égalités (c_1), (c_2), (c_3), (c_4)], conditions dans lesquelles h est $< t$, il existera dans le déterminant de l'équation

$$(2)\qquad x^2 - 2A_1\ldots A_{2s-1}B_1\ldots B_{2t-1}PQy^2 = -1$$

au moins deux facteurs B_{2t-2} et B_{2t-1} qui seront tels que les quantités $\left(\frac{A_1}{B_{2t-2}}\right)\cdots$ et $\left(\frac{A_1}{B_{2t-1}}\right)\cdots$, obtenues par les combinaisons deux à deux de ces facteurs premiers avec l'ensemble des autres, seront de même signe.

Par suite, l'équation de condition

$$(f) \qquad B_{2t-2}B_{2t-1}h^2 - 2A_1 \ldots B_{2t-3}PQH'^2 = \pm 1$$

pourra évidemment admettre des valeurs entières pour h et H'. Donc, dans l'une quelconque des hypothèses où l'on s'est placé, la méthode suivie ne permet pas d'affirmer la possibilité de l'équation (2) en valeurs entières.

Toutefois, comme les facteurs premiers des deux groupes $A_1 \ldots$ et $B_1 \ldots$ peuvent être placés dans un ordre quelconque dans le déterminant de l'équation (2), il pourrait arriver que les facteurs B_{2t-2} et B_{2t-1} considérés ci-dessus appartinssent à deux groupes différents, auquel cas (n° **42**) l'équation de condition (f) ne saurait admettre de valeurs entières pour h et H'. Représentons dans ce cas par A_α et B_6 les facteurs correspondant à B_{2t-2} et B_{2t-1}, et considérons l'équation de condition

$$(g) \qquad A_1 \ldots B_{2t-3}h^2 - 2A_\alpha B_6 PQH'^2 = \pm 1,$$

il est clair que cette équation ne pourra pas admettre de valeurs entières pour h et H', ce qui conduit aux conséquences déjà signalées ci-dessus.

54. Des considérations analogues à celles qui ont été sommairement développées (n° **52**) permettent d'établir des théorèmes relatifs à la possibilité en valeurs entières de l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2A_1 \ldots A_a A'_1 \ldots A'_{a'} B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} PQ y^2 = -1,$$

lorsque les facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$, qui entrent dans le déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2A_1 \ldots A_a A'_1 \ldots A'_{a'} B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} y^2 = -1,$$

se partagent en deux groupes composés d'un nombre pair de termes $A_1 \ldots A_a$, $A'_1 \ldots A'_{a'}$ et $B_1 \ldots B_b$, $B'_1 \ldots B'_{b'}$, pour lesquels on aurait, relativement aux deux facteurs premiers P et Q également de la forme

$8n + 5$, les conditions

$$(m)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{PQ}{A_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{PQ}{A_a}\right) = \left(\dfrac{PQ}{A'_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{PQ}{A'_{a'}}\right) = 1, \\ \left(\dfrac{PQ}{B_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{PQ}{B_b}\right) = \left(\dfrac{PQ}{B'_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{PQ}{B'_{b'}}\right) = -1. \end{cases}$$

Supposons en effet que les deux séries de nombres premiers $B_1 \ldots B_b$ et $B'_1 \ldots B'_{b'}$ dans lesquelles se subdivisent les facteurs du second groupe de l'équation (1) soient composées l'une et l'autre d'un nombre impair de termes satisfaisant, relativement aux facteurs P et Q, aux conditions (a) inscrites (n° **42**). Supposons de plus que les mêmes facteurs premiers satisfassent soit à l'une des conditions $(b_1), \ldots, (b_4)$ inscrites (n° **49**), soit aux conditions du théorème (n° **50**), l'équation

$$(3)\qquad x^2 - 2B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} PQ y^2 = -1$$

admettra toujours des solutions entières.

Cela posé, introduisons dans le déterminant de cette dernière équation deux facteurs premiers A_1 et A_2 du premier groupe de l'équation (1), il est certain (n° **38**) que la nouvelle équation

$$(4)\qquad x_2 - 2A_1 A_2 B_1 \ldots B_b B'_1 \ldots B'_{b'} PQ y^2 = -1$$

sera toujours soluble en nombres entiers, si, isolant les deux facteurs A_1 et A_2 de son déterminant, les autres facteurs premiers se partagent en deux séries composées l'une et l'autre d'un nombre pair de termes satisfaisant aux conditions

$$(d)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{B'_1}{A_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{P}{A_1}\right) = \left(\dfrac{Q}{A_1}\right) = \left(\dfrac{B'_1}{A_2}\right) = \ldots = \left(\dfrac{P}{A_2}\right) = \left(\dfrac{Q}{A_2}\right) = \pm 1, \\ \left(\dfrac{B_\alpha}{A_1}\right) = \ldots = \left(\dfrac{B'_\beta}{A_1}\right) = \left(\dfrac{B_\alpha}{A_2}\right) = \ldots = \left(\dfrac{B'_\beta}{A_2}\right) = \pm 1. \end{cases}$$

Partant de l'équation (4), on introduira dans son déterminant deux nouveaux facteurs premiers du premier groupe de facteurs de l'équation (2), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les facteurs de ce groupe.

Il est utile de remarquer en terminant que, dans les égalités (d)

et dans celles qui suivront, les conditions

$$\left(\frac{PQ}{A_1}\right) = \left(\frac{PQ}{A_2}\right) = \left(\frac{PQ}{A_3}\right) = \ldots = 1$$

dérivant des égalités (m) devront toujours être satisfaites.

55. Pour fixer les idées, considérons l'équation

$$(2) \qquad x^2 - 2ABCDEFy^2 = -1$$

qui contient six facteurs premiers $\equiv 5 \pmod{8}$ dans son déterminant, et supposons que les facteurs premiers du déterminant de l'équation

$$(1) \qquad x^2 - 2ABCDy^2 = -1$$

se partagent en deux groupes composés d'un nombre pair de termes satisfaisant aux conditions

$$(m) \qquad \left(\frac{EF}{A}\right) = \left(\frac{EF}{B}\right) = 1, \quad \left(\frac{EF}{C}\right) = \left(\frac{EF}{D}\right) = -1,$$

l'équation

$$(3) \qquad x^2 - 2CDEFy^2 = -1$$

admettra toujours des solutions entières (n° **43**) si les égalités suivantes, dans lesquelles on peut changer le signe des seconds membres, sont remplies

$$(d) \qquad \left(\frac{C}{E}\right) = \left(\frac{D}{F}\right) = 1, \quad \left(\frac{C}{F}\right) = \left(\frac{D}{E}\right) = -1.$$

Cela étant, l'équation (2) sera toujours soluble en entiers (n° **38**) si, aux égalités précédentes (d), on ajoute l'une quelconque des conditions nouvelles (e) ou (f)

$$(e) \qquad \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{E}{A}\right) = \left(\frac{F}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = \left(\frac{E}{B}\right) = \left(\frac{F}{B}\right),$$

$$(f) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{D}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right) = \left(\frac{D}{B}\right) = \pm 1, \\ \left(\frac{E}{A}\right) = \left(\frac{F}{A}\right) = \left(\frac{E}{B}\right) = \left(\frac{F}{B}\right) = \pm 1. \end{array} \right.$$

Par suite, en observant : 1° que les égalités (d) peuvent être remplacées par les conditions

$$(d') \qquad \left(\frac{\text{CD}}{\text{E}}\right) = \left(\frac{\text{CD}}{\text{F}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{C}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{D}}\right) = -1;$$

2° que les égalités (e) et (f) sont équivalentes aux conditions

$$(e') \qquad \left(\frac{\text{AB}}{\text{C}}\right) = \left(\frac{\text{AB}}{\text{D}}\right) = \left(\frac{\text{CD}}{\text{A}}\right) = \left(\frac{\text{CD}}{\text{B}}\right) = 1,$$

$$(e'') \qquad \left(\frac{\text{AB}}{\text{E}}\right) = \left(\frac{\text{AB}}{\text{F}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{A}}\right) = \left(\frac{\text{EF}}{\text{B}}\right) = 1.$$

nous arrivons à la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation* $x^2 - 2\,\text{ABCDEF}y^2 = -1$, *qui contient six facteurs premiers* $\equiv 5$ (mod. 8) *dans son déterminant, admet toujours des solutions entières, lorsque les conditions suivantes sont remplies :*

1° Si l'équation $x^2 - 2\,\text{CDEF}y^2 = -1$ admet des solutions entières en vertu des égalités (d');

2° Si les équations $x^2 - 2\,\text{ABCD}y^2 = -1$ et $x^2 - 2\,\text{ABEF}y^2 = -1$ admettent des solutions de même nature en vertu des égalités (e') et (e'').

(*La suite prochainement.*)