JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les deux formes $x^2+2y^2+2yz+2z^2+6t^2$, $x^2+2y^2+3z^2+3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 131-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__131_0>

SUR LES DEUX FORMES

$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2;$

Par M. J. LIOUVILLE.

Les deux formes indiquées

$$x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2$$

et

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

sont aussi du nombre de celles qu'il est bon de considérer à la fois pour représenter un même entier n. En effet, quoiqu'il soit très-difficile peut-être d'obtenir une expression simple et générale de chacun des nombres séparés

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2)$$

et

$$\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2)$$

de représentations qu'elles fournissent pour cet entier, on a cependant tout de suite la valeur de la somme suivante

$$\begin{gathered}4\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 2yz + 2z^2 + 6t^2)\\ + 6\mathrm{N}(n = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3t^2).\end{gathered}$$

Je me suis assuré par une démonstration facile que la valeur dont il s'agit est égale à celle de cette autre somme

$$\mathrm{N}(3n = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2) + 9\mathrm{N}[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)]$$

dont les deux termes sont connus d'après ce que j'ai donné dans le cahier de juillet 1861 au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2.$$

On remarquera que

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)] = 0$$

quand n n'est pas divisible par 3, tandis que pour n divisible par 3, ou pour $n = 3q$, l'on a

$$N[n = 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2)] = N(q = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2).$$

Je laisse au lecteur à trouver la formule explicite qui résulte naturellement des considérations précédentes.