JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Des contours tracés sur les surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e^ série, tome 11 (1866), p. 110-130.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__110_0>

DES
CONTOURS TRACÉS SUR LES SURFACES;

PAR M. CAMILLE JORDAN,
Ingénieur des Mines.

Deux contours fermés quelconques, tracés sur une surface donnée, seront dits *réductibles* l'un à l'autre, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation progressive.

Deux contours quelconques tracés sur un plan sont toujours réductibles l'un à l'autre; mais il n'en est pas de même sur toute surface : ainsi, par exemple, il est clair que dans un tore un méridien et un parallèle forment deux contours irréductibles.

Nous nous proposons ici de déterminer dans quel cas deux contours, tracés sur une surface donnée, sont réductibles l'un à l'autre.

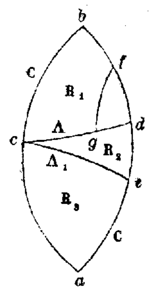
I.

La surface considérée peut avoir diverses nappes qui pourraient se réunir en certains points singuliers, comme au sommet d'un cône, ou se couper mutuellement suivant des lignes singulières. Nous conviendrons de ne tenir aucun compte de ces liaisons accidentelles, et de ne pas considérer comme contigus sur la surface deux points infiniment voisins, mais pris sur deux nappes différentes.

LEMME I. — *Soit* R *une région de la surface, laquelle soit complétement limitée par un contour fermé* C *qui ne se traverse lui-même nulle part. Supposons en outre que toute transversale tracée sur* R *entre deux points quelconques de* C *divise* R *en deux parties séparées : a et b étant deux points pris arbitrairement sur* C, *les deux portions acb, adb dans lesquelles ils partagent ce contour sont réductibles l'une à l'autre par une déformation qui laisse les points a et b invariables.*

Soient en effet c un point arbitraire choisi sur la portion acb du contour C (*fig.* 3); d et e deux points arbitraires pris sur l'autre moitié

Fig. 3.



du contour. Traçons sur R, de c à d, une transversale A qui ne se coupe pas elle-même. Elle partage R en deux régions distinctes que nous désignerons par R_1 et par ρ. Chacune de ces deux régions est d'ailleurs partagée elle-même par toute transversale en deux régions séparées. Soit en effet fg par exemple une transversale tracée sur R_1. La transversale fgd partage par hypothèse R en deux régions distinctes; on ne pourra donc passer d'un côté à l'autre de fg sur R sans traverser ou gd, ce qui fait sortir de R_1, ou fg : donc fg partage R_1 en deux régions séparées.

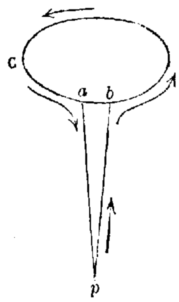
Cela posé, supposons pour fixer les idées que le point e soit dans la région ρ (*fig.* 3). Traçons dans cette région une transversale A_1 entre les points c et e, elle partage ρ en deux régions R_2 et R_3; R se trouve ainsi partagé en trois régions, R_1, R_2, R_3.

Si le lemme est vrai pour chacune de ces régions partielles, il le sera pour R. En effet, ac sera réductible par hypothèse à aec, et cb à cdb : acb sera donc réductible à $aecdb$, ou, comme ecd est réductible à ed, acb le sera à adb.

Pour démontrer la proposition pour l'une des régions partielles telle que R_1, on la décomposera de même en trois autres, et l'on continuera ainsi jusqu'à ce qu'on arrive à des régions infiniment petites. Mais pour ces dernières, le théorème devient intuitif, la nappe à laquelle appartient la région considérée se confondant avec son plan tangent (ou plus généralement avec une nappe de cône tangente).

Lemme II. — *Soient* C *un contour quelconque; p un point arbitraire de la surface; a et b deux points infiniment voisins pris sur* C; *ap, bp deux lignes infiniment voisines menées de ces points à p, de manière à ne se traverser ni elles-mêmes ni mutuellement; ab est réductible à apb, et par suite le contour* C *est réductible au contour indiqué par les flèches* (*fig.* 4).

Fig. 4.



En effet, la chose serait évidente si la surface considérée était plane, ou, ce qui revient au même, développable; mais la surface se confond dans la zone infiniment étroite *apb* avec la surface développable qui lui est circonscrite suivant *ap*. (Nous supposons pour simplifier que cette ligne a été tracée de manière à éviter les points singuliers.) Le lemme est donc démontré.

Les points *a* et *b* étant infiniment voisins l'un de l'autre, le contour substitué à C en vertu du lemme précédent est formé de C et d'une ligne *ap*, qui se trouve parcourue deux fois de suite en sens différents. Nous dirons que cette ligne est *adjointe* au contour *c* par la déformation ci-dessus.

Deux contours qui ne diffèrent l'un de l'autre que par une ligne arbitraire décrite deux fois de suite en sens contraires sont donc réductibles l'un à l'autre.

Soient S la surface considérée, m le nombre des contours distincts A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ qui forment sa limite (m pouvant se réduire à zéro, si la surface est fermée). Soit de plus n le nombre maximum des contours fermés distincts ne se traversant pas eux-mêmes ni mutuellement, que l'on peut tracer sur la surface sans la partager en deux régions séparées.

Imaginons la surface S coupée suivant chacun de ces contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$. La nouvelle surface T ainsi obtenue est d'une seule pièce; tout contour fermé la partage en deux régions distinctes; enfin elle est limitée par $m + 2n$ contours, à savoir $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, et les deux bords $C', C'', C'_1, C''_1, \ldots$ des sections faites respectivement suivant $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ (p. 107).

Soient D, D' deux quelconques de ces $m + 2n$ contours; a, a' deux points pris respectivement sur D et D', on peut les joindre par une transversale située sur T et qui ne se coupe pas elle-même. En coupant T suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_1 d'une seule pièce et limitée par les mêmes contours que T, excepté qu'à la place des deux contours distincts D, D' on aura un contour unique K formé de D, D' et de la transversale, décrite deux fois en sens contraire (p. 107). Supposons maintenant que l'on choisisse pour D et D' les deux bords C' et C'' de la section faite suivant C, et pour a, a' les deux points qui correspondent à un même point de C : la transversale devient alors un contour fermé Γ qui coupe en a le contour C et ne traverse nulle part ailleurs les contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$. Le contour K sera alors formé du contour C, du contour Γ, du contour C décrit en sens inverse du primitif, puis du contour Γ décrit en sens inverse du primitif.

On voit qu'un contour C étant donné, il y a lieu de distinguer l'un de l'autre les deux sens dans lesquels il peut être décrit. Nous conviendrons de désigner par C le contour décrit dans un certain sens choisi à volonté, et par C^{-1} le même contour décrit en sens inverse. On aura alors entre le contour K et les quatre contours composants $C, \Gamma, C^{-1}, \Gamma^{-1}$ la relation symbolique $K = C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}$.

La surface T_1 étant encore tout d'une pièce, soit a_1 un point situé sur le contour C_1, on voit comme tout à l'heure qu'on peut déterminer un contour Γ_1 ne se traversant pas lui-même, traversant C_1 en a_1 et ne traversant nulle autre part les contours qui limitent T_1. En coupant T_1 suivant Γ_1 on aurait une autre surface T_2 encore tout d'une pièce.

Poursuivant ainsi, on voit qu'*on peut déterminer une suite de n contours nouveaux* $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$, *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Chaque contour* $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ *ne se coupe lui-même nulle part et ne coupe non plus nulle part ceux de la même suite.*

2° *Il traverse en un seul point le contour correspondant de la suite* C, $C_1, \ldots$, *et ne traverse nulle part les autres contours de cette suite.*

Ces conditions étant remplies, le système des contours

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \quad A, \ldots, A_{m-1}$$

sera insuffisant, comme nous l'avons vu, pour partager la surface en deux régions distinctes.

Soient respectivement $a, a_1, \ldots, a_{n-1}$ *les points d'intersection de* C *et* Γ, *de* C_1 *et* $\Gamma_1, \ldots$ *de* C_{n-1} *et* Γ_{n-1}; $a', \ldots, a'_{m-1}$ *des points arbitraires pris respectivement sur* $A, \ldots, A_{m-1}$; *p un point quelconque de la surface, on pourra joindre ce point aux précédents par une série de lignes* pa, $pa_1, \ldots, pa_{n-1}, pa', \ldots, pa'_{m-1}$, *qui ne se traversent ni elles-mêmes ni mutuellement en aucun point, et qui ne traversent non plus nulle part les contours*

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \quad A, \ldots, A_{m-1}.$$

En effet, soit T' la surface obtenue en coupant S suivant les contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$. Cette surface étant encore d'une seule pièce, on pourra y tracer une ligne pa joignant le point intérieur p au point a situé sur le contour. Coupons maintenant T' suivant pa : la nouvelle surface obtenue T'' sera encore d'une seule pièce; car soient α, β deux points voisins situés de part et d'autre de pa, on pourra passer de α à β sans sortir de T'', en suivant la ligne pa jusqu'en a, décrivant ensuite le contour $C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}$, puis l'autre côté de la ligne ap jusqu'en β.

On pourra maintenant joindre p au point a_1 par une ligne pa_1 ne se traversant pas elle-même, et tracée sur T'' de telle sorte qu'elle ne traverse ni pa ni les contours $C, C_1, \ldots, \Gamma, \Gamma_1, \ldots$, et l'on continuera le raisonnement qui précède jusqu'à ce qu'on ait tracé toutes les lignes $pa, pa_1, \ldots, pa', \ldots$, de manière à satisfaire aux conditions énoncées.

Nous donnerons le nom de *contours élémentaires* à ceux qui s'obtiennent en adjoignant à l'un des contours

$$\begin{matrix} C, C_1, \ldots, C_{n-1}, \\ \Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}, \end{matrix} \quad A, \ldots, A_{m-1},$$

celle des lignes pa, $pa_1, \ldots, pa_{n-1}$, $pa', \ldots, pa'_{m-1}$ qui y aboutit. Ainsi $pa.\mathrm{C}.ap$, par exemple, sera le contour élémentaire correspondant à C. Nous le désignerons par la notation [C].

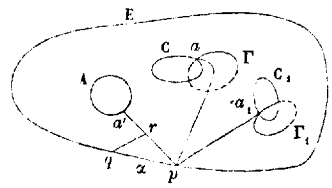
Lemme III. — *Tout contour* E *passant par p qui ne se traverse pas lui-même et ne traverse nulle part les contours élémentaires, est réductible de deux manières différentes à un système de contours élémentaires.*

1° Et d'abord, le contour E partage S en deux régions distinctes. En effet, ce contour étant fermé, partage T en deux régions distinctes ρ et ρ'. Soient C', C'' les deux contours limites de T qui correspondent au contour unique C; si ces deux contours n'appartenaient pas à la même région, la transversale Γ qui joint un point de C' à un point de C'' passerait de l'une des régions sur l'autre, et par suite traverserait E, contrairement à l'hypothèse. Donc C' et C'' appartiennent à la même région. De même pour C'_1 et $C''_1, \ldots$. Cela posé, passons de la surface T à la surface S en rejoignant les parties qui ont été séparées. Les parties que l'on rejoint appartenant toujours à une même région, les deux régions resteront encore séparées : donc E divise S en deux régions séparées, comme nous l'avons annoncé.

2° Soit ρ l'une de ces régions : supposons pour fixer les idées qu'elle contienne dans son intérieur les contours A, C, $C_1 \ldots$ et non les contours A_1, $C_2, \ldots$; elle contiendra en entier les contours élémentaires [A], [C], $[C_1], \ldots$, puisqu'elle en contient une partie, et que par hypothèse, aucun de ces contours ne traverse la limite E; elle contiendra de même les contours $[\Gamma]$, $[\Gamma_1], \ldots$ qui ont une partie commune avec les précédentes, et que E ne coupe pas. Par les mêmes raisons, les contours $[A_1]$, $[C_2]$, $[\Gamma_2], \ldots$ seront entièrement situés sur l'autre région.

3° Soit maintenant $p\alpha$ la tangente au contour E au point p (*fig.* 5). Supposons, pour fixer les idées, qu'un observateur partant d'un point α situé sur cette ligne dans le voisinage de p et se mettant à tourner autour de ce point dans le sens direct,

FIG. 5.



par exemple, rencontre les lignes pa', pa, pa_1, etc., dans l'ordre où elles sont écrites. Les contours

$$[A], \quad pa.C\Gamma C^{-1}\Gamma^{-1}.ap, \quad pa_1.C_1\Gamma_1 C_1^{-1}\Gamma_1^{-1}.a_1 p, \ldots$$

forment par leur réunion un contour fermé F qui repasse plusieurs fois au point p, mais qui ne se traverse évidemment lui-même nulle part.

Le contour E est réductible au contour F. En effet, considérons le contour total qui résulte de la réunion des deux contours E et F^{-1}; il ne se traverse lui-même nulle part, et limite complétement une région de la surface (car il ne traverse aucun contour élémentaire). En outre toute transversale qr menée dans cette région (*fig.* 5) la partage en deux portions séparées. En effet, le contour fermé $pqrp$, joint aux contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ qu'il ne traverse pas, doit par hypothèse partager S en deux régions distinctes, σ et σ_1. Soient d'ailleurs μ et ν deux points très-voisins situés de part et d'autre de qr. On ne pourra passer de μ à ν sur la surface S sans traverser le contour $pqrp$ ou l'un des contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$; or μ est situé sur la région ρ, on ne peut donc aller de ce point à C_2 sans traverser E; d'autre part, si l'on traverse C, $C_1, \ldots$, on traverse par cela même F, dont $C, C_1, \ldots$ font partie; enfin pq fait partie de E et rp de F. On ne peut donc passer de μ à ν sans traverser E, F ou qr, ce qui démontre notre proposition.

Il résulte de là (lemme I) que la partie E du contour est réductible à la portion F, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Dans le cas où la région ρ ne contiendrait aucun des contours élémentaires, le raisonnement précédent appliqué au contour E montre que toute transversale coupe ρ en deux régions distinctes; donc (lemme I) si l'on partage E en deux portions quelconques, elles seront réductibles l'une à l'autre; E se trouvera alors réduit à une simple ligne, décrite deux fois de suite en sens opposés, ou, en supprimant cette ligne, ce qui est permis (lemme II), à un simple point.

4° Chacun des contours partiels qui composent F est un contour élémentaire tel que [A] ou un contour tel que $pa.\mathrm{C}\Gamma\mathrm{C}^{-1}\Gamma^{-1}.ap$ qui peut être réduit à un système de contours élémentaires par l'adjonction répétée de la ligne ap. En effet, le contour ci-dessus est réductible au suivant :

$$pa.\mathrm{C}.ap.pa.\Gamma.ap.pa.\mathrm{C}^{-1}.ap.pa.\Gamma^{-1}.ap = [\mathrm{C}][\Gamma][\mathrm{C}]^{-1}[\Gamma]^{-1}.$$

Il est donc démontré que le contour E peut être réduit à un certain système formé avec les contours élémentaires que renferme la région ρ. On pourrait même le réduire à un système des contours élémentaires que renferme l'autre région ρ'.

Le lemme est donc démontré.

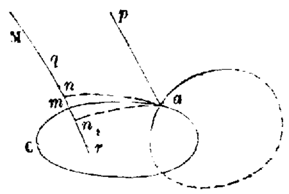
Pour éviter toute ambiguïté dans l'expression du contour E, nous choisirons le système réduit relatif à celle des deux régions qui ne contient pas l'un des contours élémentaires choisi arbitrairement, [C] par exemple.

Nous allons démontrer maintenant qu'*un contour quelconque* M *peut être réduit à un système de contours tels que* E, *joints à des contours élémentaires*.

1° On peut admettre que tous les points où le contour proposé coupe les contours élémentaires sont situés sur les lignes $pa', \ldots, pa, pa_1, \ldots$ En effet, supposons que M coupe C, par exemple, en un point m autre que a (*fig.* 6).

Soient n, n_1 deux points de M infiniment voisins et contenant m entre eux deux. Soient am la portion du contour C comprise entre a et m; an, an_1 deux lignes infiniment voisines de am et ne traversant pas cette ligne. On pourra réduire nn_1 à nan_1 (lemme II); et par suite $M = ...qmr...$ se réduit à $...qnan_1r...$, qui, au lieu de couper C en m,

Fig. 6.



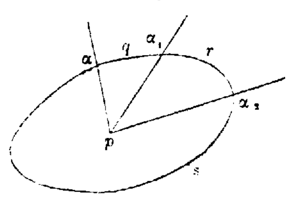
le coupe en a, point situé sur la ligne pa. D'ailleurs na, n_1a étant infiniment voisins de C ne traversent nulle part les autres contours élémentaires. Ainsi les autres intersections du contour proposé avec les contours élémentaires n'auront pas varié par cette déformation. A la limite, les points n, n_1 se confondent avec m, le nouveau contour auquel on a réduit le proposé sera le suivant :

$$...qmamr....$$

2° Le contour ainsi transformé peut être réduit comme il suit à un système de contours partiels passant par p et coupant chacun en deux points au plus les contours élémentaires.

Soient α, α_1, α_2,... les points d'intersection du contour avec les contours élémentaires. Ces points étant situés sur les lignes pa, pa',..., adjoignons au contour proposé $...qrs...$ (*fig.* 7) les tronçons de ces

Fig. 7.



lignes compris respectivement entre les points α, α_1, α_2,... et p. Le nouveau contour obtenu sera évidemment la somme des suivants :

$$..., p\alpha q\alpha_1 p, \quad p\alpha_1 r\alpha_2 p, ...$$

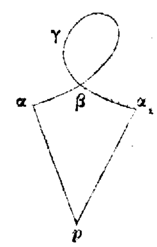
Chacun de ces contours partiels passe par p, et comme les lignes $p\alpha$,

$p\alpha_1, \ldots$ font partie de certains contours élémentaires et ne coupent pas les autres, le contour partiel $p\alpha q\alpha_1 p$ ne pourra couper aucun contour élémentaire, si ce n'est aux deux points α, α_1. De même pour les autres contours partiels.

Remarque. — Cette réduction n'a pas lieu si le contour proposé M ne coupe aucun contour élémentaire. Mais soit alors k un point quelconque du contour; on peut le joindre à p par une ligne qui ne traverse aucun contour élémentaire, et cette ligne kp étant adjointe à M donnera un contour réduit N qui passe par p et ne traverse aucun contour élémentaire.

3° Soit $N = p\alpha\alpha_1 p$ un des contours partiels ci-dessus déterminés. Les lignes $p\alpha$, $p\alpha_1$ ne se traversent pas et ne sont traversées nulle part par $\alpha\alpha_1$, par construction; mais il se peut que la ligne $\alpha\alpha_1$ se coupe elle-même. Dans ce cas, le contour $p\alpha\alpha_1 p$ peut être réduit à un système de contours plus simples. Imaginons en effet un observateur parcourant le contour dans le sens $p\alpha\alpha_1 p$. Soit β le premier point où cet observateur traverse le chemin qu'il a déjà parcouru (*fig.* 8). En

Fig. 8.



adjoignant au contour la ligne $\beta\alpha p$, on le réduit évidemment aux deux suivants :

$$p\alpha\beta\gamma\beta\alpha p = N' \quad \text{et} \quad p\alpha\beta\alpha_1 p = N''.$$

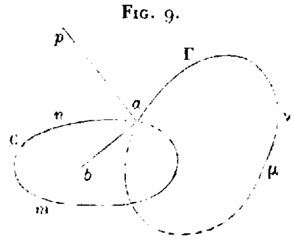
On doit remarquer que chacun de ces deux contours est formé exclusivement de portions empruntées à N; comme N, il ne coupera donc nulle part les contours élémentaires, sauf peut-être aux points α, α_1; d'ailleurs le contour N' ne se coupe lui-même nulle part, par construction; quant au contour N'', il ne peut se couper lui-même que là où N se coupe lui-même, d'ailleurs il ne se coupe pas en β où N se coupe. Le nombre des intersections de N'' avec lui-même est donc inférieur au moins d'une unité à celui des intersections de N avec lui-même.

Si N'' se coupe lui-même, on pourra le décomposer de la même manière que N, et continuant ainsi, on arrive à un système de contours réduits qui ne se traversent eux-mêmes nulle part. Tous ces contours ont un premier tronçon commun $p\alpha$ sur la ligne pa; le dernier de ces contours passe en outre au point α_1, et a pour dernier tronçon $\alpha_1 p$; tous les autres reviennent au point α, et ont pour dernier tronçon αp. Ces contours étant d'ailleurs exclusivement formés de portions empruntées à N, ne traversent les contours élémentaires nulle part, si ce n'est peut-être en α et α_1; d'ailleurs à partir de ces points, ils suivent sans les traverser les lignes pa, pa_1 : ils ne traversent donc nulle part les contours élémentaires, si α ou α_1 ne se confondent pas avec a ou a_1. Mais si α se confond avec a_1 chacun des contours réduits considérés pourra traverser en ce point ou C, ou Γ, ou ces deux contours à la fois. De même, si α_1 se confond avec a_1, le contour réduit qui y passe pourra traverser en ce point l'un ou l'autre des contours C_1, Γ_1, ou tous les deux. Nous allons voir que dans tous les cas chacun des contours réduits résulte de la combinaison de contours élémentaires avec un autre contour de l'espèce considérée au lemme III.

Soit en général $L = p\alpha b\alpha_1 p$ un contour qui ne se traverse pas lui-même, et dont les premier et dernier tronçons $p\alpha$, $\alpha_1 p$ appartiennent à des lignes de la série $pa, pa_1, \ldots, pa', \ldots$ (nous n'excluons pas le cas où α_1 se confondrait avec α), tandis que le tronçon intermédiaire $\alpha b \alpha_1$ ne traverse nulle part les contours élémentaires.

Supposons pour fixer les idées que le point α se confondant

Fig. 9.

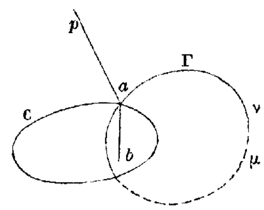


avec a (*fig.* 9), la ligne pab traverse en ce point le contour C, sans traverser Γ. Adjoignons à pab la ligne $a\mu\nu ap$; la ligne pab se trouve ainsi transformée en $pa\mu\nu ap.pa\nu\mu ab$ et se trouve ainsi réduite à deux autres, dont la première n'est autre que le contour élémentaire $[\Gamma]^{-1}$, tandis que l'autre ne traverse plus ni C ni Γ au point a. D'ailleurs cette dernière ligne ne se traverse pas elle-même, et ne traverse ni $b\alpha_1 p$ ni aucun contour élémentaire; car les portions ajoutées à pab qu'elle contient, ne sont autres que le contour Γ, lequel ne traverse ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire, sauf en a.

On voit de même que si pab traversait Γ en a sans traverser C, on pourrait réduire cette ligne au contour élémentaire $[C]^{-1}$, joint à une autre ligne $pamnab$, laquelle ne traverse plus ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire.

Supposons enfin que pab traverse C et Γ en a (*fig.* 10). Adjoignons

Fig. 10.



à cette ligne la ligne $a\mu\nu ap$; elle se réduit au système des deux suivantes, $pa\mu\nu ap$ et $pa\nu\mu ab$, dont la première est le contour élémentaire $[\Gamma]^{-1}$, tandis que l'autre ne traverse plus C, mais traverse encore Γ. Cette dernière pourra être décomposée en deux autres : 1° le contour élémentaire $[C]^{-1}$; 2° une nouvelle ligne qui ne traverse plus ni $b\alpha_1 p$ ni aucun contour élémentaire.

Ainsi, dans tous les cas, la ligne $p\alpha b$ peut être réduite à une autre ligne de la forme suivante, $[\Gamma]^x [C]^y.R$, R étant une ligne menée de p à b et qui ne traverse ni $b\alpha_1 p$, ni aucun contour élémentaire, et qui ne se coupe pas elle-même, et x, y étant chacun égal suivant le cas à zéro ou à -1. (Le symbole $[\Gamma]^x$ exprimant en général que le contour $[\Gamma]$ est décrit x fois de suite dans le sens direct, le symbole $[\Gamma]^0$ exprimera que l'on ne décrit pas ce contour.)

On voit de la même manière que $p\alpha_1 b$ se réduit dans tous les cas à une ligne de la forme $[\Gamma_1]^{x_1}[C_1]^{y_1}R_1$, R_1 ne se coupant pas lui-même, et ne coupant en outre ni R ni les contours élémentaires, et par suite $b\alpha_1 p$ se réduit à la ligne $R_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1}$. Le contour $p\alpha b\alpha_1 p$ se réduit donc au suivant :

$$[\Gamma]^x[C]^y . RR_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1},$$

lequel est composé de contours élémentaires et du contour RR_1^{-1}; ce dernier satisfaisant d'ailleurs à toutes les conditions du lemme III, sera réductible à un simple point, ou à un système de contours élémentaires.

Tout contour pouvant être réduit à un système de contours tel que Γ, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Tout contour est réductible à un simple point ou à un système de contours élémentaires.*

II.

Il nous reste à chercher dans quel cas deux systèmes de contours élémentaires sont réductibles l'un à l'autre.

Considérons un contour fermé ne se traversant pas lui-même, ne traversant aucun contour élémentaire, et tracé de telle sorte que l'une des deux régions qu'il détermine dans la surface contienne les contours C et Γ, tous les autres contours $A, \ldots, C_1, \Gamma_1, \ldots$ faisant partie de l'autre région. Nous avons vu que le contour donné est réductible d'une part à $[C][\Gamma][C]^{-1}[\Gamma]^{-1} = \Delta$, d'autre part à un système formé des contours $[A], \ldots, [C_1], [\Gamma_1], \ldots$; ainsi le contour Δ et son inverse Δ^{-1} sont réductibles à des systèmes formés des contours $[A], \ldots, [C_1], [\Gamma_1], \ldots$.

Soient maintenant S et S′ deux systèmes à comparer entre eux. Si S ou S′ contient l'un des contours Δ, Δ^{-1}, on le remplacera par le contour dérivé de $[A], \ldots, [C_1], [\Gamma_1], \ldots$ auquel il se réduit. Les opérations de ce genre étant exécutées, S et S′ se trouveront respectivement ramenés à deux nouveaux contours S_1 et S'_1 également formés de contours élémentaires.

Cela posé, nous allons démontrer que S_1 *et* S'_1 *sont irréductibles l'un à l'autre s'ils ne sont pas formés des mêmes contours élémentaires décrits dans le même ordre, en un mot, s'ils ne sont pas identiques.* Pour établir cette proposition, nous remarquerons en premier lieu que si l'on applique à S_1 et à S'_1 la méthode de réduction indiquée plus haut, on verra que chacun de ces contours est déjà réduit. En effet, soit pour fixer les idées $S_1 = [C][A][C_1]\ldots$. Le contour $[C]$ coupe au point a le contour élémentaire $[\Gamma]$; $[A]$ ne coupe aucun contour élémentaire; $[C_1]$ coupe $[\Gamma_1]$ au point a_1. Les points d'intersection successifs de S_1 avec les contours élémentaires sont donc a, a_1,... Adjoignons au contour en ces points les lignes ap, a_1p,... suivant la méthode indiquée plus haut, puis décomposons S_1 en contours partiels. Celui de ces contours qui passe par a et a_1 est le suivant :

$$pap[A]pa_1C_1.a_1p;$$

il ne se traverse pas lui-même, et la méthode indiquée le réduit aux deux suivants :

$$R = pap[A].pa_1C_1^{-1}C_1a_1p \quad \text{et} \quad [C_1].$$

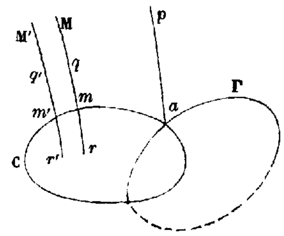
Le premier de ces deux contours est formé du contour A joint à des lignes pa et pa_1C_1 qui sont parcourues deux fois de suite en sens contraires, et se réduit évidemment au contour $[A]$. Le contour partiel proposé se réduit donc à $[A][C_1]$: de même pour les autres. Donc le contour $S_1 = [C][A][C_1]\ldots$ est déjà réduit.

Nous allons établir en second lieu que la méthode de réduction donnée plus haut étant appliquée à deux contours quelconques réductibles l'un à l'autre donnera toujours le même contour réduit. En prouvant ce second point, nous aurons démontré notre proposition; car les contours S_1 et S'_1 étant tous deux réduits et différents, ne pourront être réductibles l'un à l'autre. D'ailleurs il suffira d'établir ce second point pour deux contours infiniment voisins l'un de l'autre, puisque deux contours étant réductibles l'un à l'autre, on pourra toujours, par définition, passer de l'un à l'autre par une suite de contours dont chacun sera infiniment voisin du précédent.

Soient donc M, M' deux contours infiniment voisins (*fig.* 11); appliquons-leur simultanément la méthode de réduction :

1° Si le contour M coupe l'un des contours $\dfrac{C,\ C_1,\ldots,}{\Gamma,\ \Gamma_1,\ldots,}$ C, par exemple, en un point m autre que a, on le transforme par l'adjonction de la

Fig. 11.

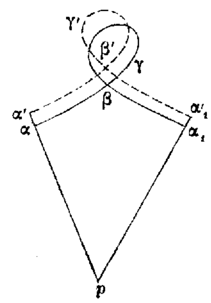


ligne ma en un contour $\ldots qmamr \ldots = M_1$ qui traverse C en a au lieu de le traverser en m : M' traversera en général C en un point m' infiniment voisin de m (nous examinerons tout à l'heure les cas d'exception), et l'adjonction de la ligne $m'a$ transformera $M' = \ldots q'm'r' \ldots$ en un contour $\ldots q'm'am'r' \ldots = M'_1$, qui traverse C en a, et qui sera partout infiniment voisin du contour M_1.

2° Soient α, α_1 deux points d'intersection successifs du contour M_1 avec les contours élémentaires; on peut admettre, d'après ce qui précède, que ces points sont situés respectivement sur les lignes pa, pa_1 : on pourra décomposer M_1 en contours partiels tels que $p\alpha\alpha_1 p$. Le contour M'_1, infiniment voisin de M_1, coupera en général les mêmes contours élémentaires en des points α', α'_1 infiniment voisins de α, α_1, et situés respectivement sur les mêmes lignes pa, pa_1, et la portion du contour M_1 comprise entre α et α_1 ne traversant nulle part les contours élémentaires, la portion de M'_1 comprise entre α' et α'_1, laquelle est infiniment voisine de la précédente, ne coupera en général nulle part les contours élémentaires. (Nous reviendrons tout à l'heure sur les cas d'exception.) Si donc on décompose M'_1 en contours partiels suivant la méthode indiquée, $p\alpha'\alpha'_1 p = N'$, infiniment voisin de $p\alpha\alpha_1 p = N$ sera l'un de ces contours.

3° Si le contour N se coupe lui-même en un point β (*fig.* 12), le contour voisin N' se coupe en général lui-même en un point β' infiniment voisin de β (nous reviendrons tout à l'heure sur les cas d'exception.) Le contour N étant alors décomposé dans les deux suivants, $p\alpha\beta\gamma\beta\alpha p$ et $p\alpha\beta\alpha_1 p$, la même méthode appliquée à N' le décomposera en deux contours $p\alpha'\beta'\gamma'\beta'\alpha'p$ et $p\alpha'\beta'\alpha'_1 p$ infiniment voisins de ceux-là. Poursuivant cette réduction, de manière à décomposer N et N′ en contours partiels qui ne se traversent nulle part, on voit que chaque

FIG. 12.



contour partiel de N′ sera infiniment voisin du contour correspondant de N. D'ailleurs (sauf les cas d'exception sur lesquels nous reviendrons tout à l'heure), si N traverse en α ou en α_1 quelque contour élémentaire, N′ traversera le même contour, et réciproquement. Si donc on réduit N à

$$[\Gamma]^x[C]^y.\,RR_1^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1}$$

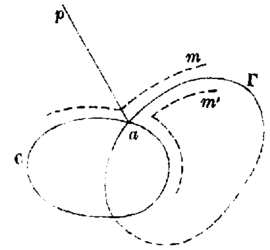
par la méthode indiquée, la même méthode réduira N′ à

$$[\Gamma]^x[C]^y.\,R'R_1'^{-1}[C_1]^{-y_1}[\Gamma_1]^{-x_1},$$

$R'R_1'^{-1}$ étant un contour infiniment voisin de RR_1^{-1}, et qui, comme ce dernier, ne se traverse pas lui-même et ne traverse aucun contour élémentaire.

Notre démonstration sera achevée si nous démontrons que RR_1^{-1} et $R'R_1'^{-1}$ se réduisent nécessairement à un même système de contours élémentaires. En effet, soient ρ, ρ_1 et ρ', ρ'_1 les régions que ces contours déterminent respectivement dans la surface. Les deux régions correspondantes ρ et ρ' renferment les mêmes contours $A,\ldots,\begin{matrix}C,\ldots,\\ \Gamma,\ldots,\end{matrix}$; car si cela n'avait pas lieu, ces contours n'étant pas coupés par RR_1^{-1} ni par $R'R_1'^{-1}$, quelques-uns d'entre eux au moins seraient compris entre deux. Cela est évidemment impossible pour A; car la surface étant limitée à ce contour, on ne peut y tracer aucune ligne de l'autre côté de celle-là. Quant aux contours C et Γ (*fig.* 13), soient m, m' deux

Fig. 13.

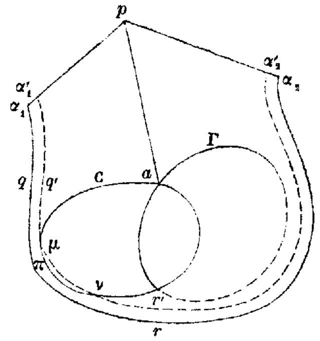


points infiniment voisins pris respectivement sur RR_1^{-1} et $R'R_1'^{-1}$, et supposés situés de part et d'autre de Γ, par exemple. Les deux contours ci-dessus étant infiniment voisins l'un de l'autre, seraient infiniment voisins du contour intermédiaire Γ. Cela peut bien se faire jusqu'en a; mais à partir de ce point, les deux contours considérés ne pouvant couper C comme le fait Γ, s'éloigneraient nécessairement de Γ et par suite l'un de l'autre, résultat inadmissible. Il est donc prouvé que les régions ρ et ρ' d'une part, ρ_1 et ρ'_1 d'autre part, contiennent les mêmes contours élémentaires. Si donc ρ est celle des régions ρ, ρ_1 qui ne contient pas C et que l'on réduise RR_1^{-1} à un système formé des contours élémentaires qui limitent la région ρ, la même méthode, appliquée à $R'R_1'^{-1}$ le réduira au même système de contours.

Notre démonstration est donc terminée. Mais nous avons admis que si l'un des deux contours considérés M, M' se coupe lui-même, ou coupe un des contours élémentaires en un point quelconque, l'autre se coupera lui-même ou coupera le même contour élémentaire en un point infiniment voisin de celui-là. Cette hypothèse, vraie en général, souffre quelques cas d'exception que nous devons examiner.

Supposons en premier lieu qu'une portion qr du contour M ne traversant pas les contours élémentaires, la portion correspondante $q'r'$ de M' traverse C, par exemple (*fig.* 14). Si l'on déforme progressivement M pour le changer en M', qr en se déformant deviendra tangent à C avant de le couper, comme le fait $q'r'$: $q'r'$ coupe donc nécessairement C en deux points très voisins, μ et ν. Soit $p\alpha_1 qr\alpha_2 p$ le contour partiel de M dont qr fait partie, la portion correspondante de M' for-

FIG. 14.



mera les trois contours partiels

$$p\alpha'_1 q' \mu a p, \quad pa\mu\nu\pi\mu a p, \quad pa\mu\pi\nu\alpha'_2 p.$$

Le second de ces contours se décompose lui-même ainsi, d'après la méthode indiquée,

$$pa\mu\nu\pi\mu a p = [\Gamma]^{-1}.pa.\Gamma.a\mu\nu\pi\mu\, a.\Gamma^{-1}\, ap[\Gamma],$$

et a pour réduite un simple point; car le contour $pa.\Gamma.a\mu\nu\pi\mu a.\Gamma^{-1}ap$ formé des deux lignes infiniment rapprochées $pa.\Gamma.a\mu\nu$ et $a\mu\pi\nu\Gamma^{-1}ap$ et ne traversant aucun contour élémentaire se réduit à un simple point. Cette réduction faite, il reste les deux contours $[\Gamma]^{-1}$ et $[\Gamma]$ qui se détruisent.

Le contour $p\alpha'_1 q' \mu\nu r' \alpha'_2 p$ a donc même réduite que

$$p'\alpha'_1 q' \mu a p.pa\mu\pi\nu r' \alpha'_2 p,$$

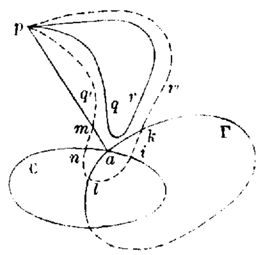
ou, en supprimant la ligne $pa\mu$ qui est décrite deux fois de suite en sens contraire, même réduite que

$$p'\alpha'_1 q' \mu\pi\nu r' \alpha'_2 p.$$

Ce dernier contour, infiniment voisin de M et ne traversant plus C, aura même réduite. Donc M et M' ont même réduite.

Supposons maintenant que la portion qr de M ne coupe pas les contours $[C]$ et $[\Gamma]$ (*fig.* 15), mais soit très-voisine de a et que $q'r'$ passe

Fig. 15.



de l'autre côté de ce point. Les deux contours C, Γ et la ligne pa forment en ce point cinq angles pak, kai, ial, lan, nap, et qr est situé dans un de ces angles. Admettons, pour fixer les idées, que ce soit dans l'angle pak; $q'r'$ coupera successivement pa, C et Γ aux points m, n, l, i, k. Si l'on décompose maintenant M et M' en contours partiels, on aura dans l'expression de M', au lieu du contour partiel unique $pqrp$, les six contours partiels

$$pq'mp, \quad pmnap, \quad panlap, \quad paliap, \quad paikap, \quad pakr'p.$$

Or, il est aisé de voir que chacun de ces contours partiels, sauf le premier et le dernier, se réduit à un point. Prenons par exemple le contour $panlap$. Il se réduit par la méthode indiquée plus haut à

$$[\Gamma]^{-1}.pa.\Gamma.anla.\Gamma^{-1}.ap[\Gamma];$$

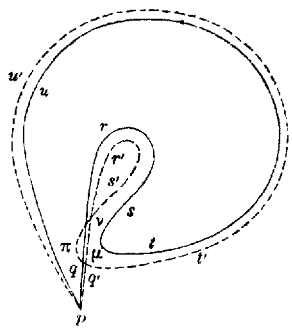
mais $pa.\Gamma.anla.\Gamma^{-1}.ap$, formé des deux lignes infiniment voisines $pa.\Gamma.anl$ et $la.\Gamma^{-1}.ap$ qui ne coupent aucun contour élémentaire, se réduit à un simple point; d'autre part, $[\Gamma]^{-1}$ et $[\Gamma]$ se détruisent : $panlap$ se réduit donc à un simple point.

Le contour M' a donc même réduite que $pq'mp.pmakr'p$, ou, en supprimant la ligne mp, même réduite que $pq'makr'p$; mais ce dernier contour, infiniment voisin de $pqrp$, et qui ne traverse plus les contours élémentaires, a la même réduite que $pqrp$.

En dernier lieu, supposons que deux portions du contour M, qr

et st (*fig.* 16) ne se traversant pas mutuellement, les portions correspondantes de M′, $q'r'$, $s't'$ se traversent. Lorsqu'on déformera M pour

Fig. 16.



obtenir M′, qr et st deviendront tangents l'un à l'autre, avant de prendre les positions $q'r'$, $s't'$, où ils se coupent : $q'r'$ et $s't'$ se couperont donc nécessairement en deux points voisins μ et ν. Cela posé, décomposons M par la méthode indiquée en contours partiels qui ne se traversent pas eux-mêmes. Si qr et st n'appartiennent pas au même contour partiel, on pourra décomposer M′ en contours partiels correspondants à ceux de M, et $q'r'$, $s't'$ appartiendront respectivement à deux contours partiels différents qui se couperont à la vérité en μ et ν; mais cette circonstance est indifférente. Il n'en est pas de même si qr et st appartiennent à un même contour partiel $pqrstup$. En effet, la portion correspondante de M′, $pq'r's't'u'p$, traitée par la méthode indiquée, ne se réduit plus à un seul contour partiel, mais au système des trois suivants :

$$pq'r's'\nu p, \quad pq'\nu\pi\mu p, \quad p\mu u'p.$$

Or le contour $pq'\nu\pi\mu p$, formé des deux lignes infiniment voisines $pq'\nu$ et $\nu\pi\mu p$ qui ne se coupent pas mutuellement, se réduit à un simple point. La réduite de M′ est donc la même que celle de

$$pq'r's'\nu p \,.\, p\mu u'p,$$

ou, en supprimant la ligne $p\mu$, la même que celle de $pq'r's'\nu\mu u'p$. Mais ce dernier contour ne se traverse plus lui-même, et il est infiniment voisin de M : il a donc même réduite.

Notre démonstration est ainsi terminée, et nous pouvons conclure en énonçant le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Deux systèmes de contours élémentaires sont irréductibles, si après avoir remplacé dans l'expression de chacun d'eux les contours composés* $[\Gamma][C][\Gamma]^{-1}[C]^{-1} = \Delta$ *et* $[C][\Gamma][C]^{-1}[\Gamma]^{-1} = \Delta^{-1}$, *partout où ils se présentent, par leur expression en fonction des autres contours élémentaires, et supprimé tous les contours décrits deux fois de suite en sens contraire, ils ne sont pas formés des mêmes contours élémentaires décrits dans le même ordre.*

Remarque. — Si tout contour intérieur à la surface considérée la partageait en deux régions distinctes, il n'existerait aucun contour tel que $[C]$ ou $[\Gamma]$, et pour comparer deux systèmes de contours élémentaires, on éliminerait de leur expression les contours

$$[A] = \Delta \quad \text{et} \quad [A]^{-1} = \Delta^{-1}.$$

Enfin si de plus la surface était fermée, tout contour tracé sur elle se réduirait à un point.

Chalon-sur-Saône, janvier 1866.