JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Sur la déformation des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 11 (1866), p. 105-109.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1866_2_11__105_0>

SUR

LA DÉFORMATION DES SURFACES;

PAR M. CAMILLE JORDAN,

Ingénieur des Mines, Docteur ès sciences.

Un des problèmes les plus connus de la Géométrie, est le suivant :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et inextensibles puissent être appliquées l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature.

On peut se proposer un problème analogue, en supposant au contraire que les surfaces considérées soient extensibles à volonté. La question ainsi simplifiée rentre dans la géométrie de situation, et nous allons la résoudre en démontrant le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour que deux surfaces ou portions de surfaces flexibles et extensibles à volonté soient applicables l'une sur l'autre sans déchirure ni duplicature, il faut et il suffit :*

1° *Que le nombre des contours séparés qui limitent respectivement ces deux portions de surfaces soit le même. (Si les surfaces considérées sont fermées, ce nombre est nul.)*

2° *Que le nombre maximum des contours fermés ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement nulle part, que l'on peut tracer sur chacune des deux surfaces sans la partager en deux régions séparées, soit le même de part et d'autre.*

1° On voit aisément que les conditions ci-dessus sont nécessaires. Soit en effet S une surface quelconque; soient m le nombre des contours qui la limitent, n le nombre des contours fermés ne se traversant pas mutuellement, qu'on peut tracer sans la diviser en régions séparées. Déformons S d'une manière quelconque par flexion et extension : il est clair que si deux lignes quelconques tracées sur S ne se coupent pas, leurs transformées ne se couperont pas. Cela posé, les m contours limites auront pour transformés m nouveaux contours qui formeront la limite de la surface transformée S′, et les n contours fermés intérieurs $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ auront pour transformés n contours fermés intérieurs à S′, $C', C'_1, \ldots, C'_{n-1}$. Ces nouveaux contours ne se traverseront pas eux-mêmes ni mutuellement. D'autre part, ils ne partagent pas S′ en deux régions distinctes, car $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ ne partageant pas S en deux régions, on peut joindre ensemble deux points quelconques de S par une ligne L qui ne traverse aucun de ces contours. La transformée de L, L′, qui joint les points correspondants de S′, ne traversera aucun des contours $C', C'_1, \ldots, C'_{n-1}$; on peut donc sans traverser ces contours, joindre ensemble deux points quelconques de S′.

Soient maintenant m' le nombre des contours qui limitent S′; n' le nombre maximum des contours intérieurs (ne se traversant nulle part) qu'on peut y tracer sans la partager en deux régions. On voit par ce qui précède, que m' est au moins égal à m et n' à n. Mais réciproquement, on peut passer de S′ à S par une déformation convenable; donc m et n sont au moins égaux à m' et n'. Donc $m = m'$, $n = n'$.

2° Il reste à prouver que ces conditions sont suffisantes. Nous nous appuierons pour cela sur le principe suivant qu'on peut regarder comme évident, et prendre au besoin pour définition :

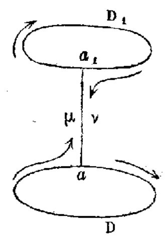
Deux surfaces S, S′ *sont applicables l'une sur l'autre si l'on peut les décomposer en éléments infiniment petits, de telle sorte qu'à des éléments quelconques contigus de* S *correspondent des éléments contigus de* S′ [*].

Soit maintenant S une surface limitée par m contours $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, et telle, qu'on puisse y tracer n contours fermés $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$ qui ne se traversent pas, sans la partager en deux régions distinctes. On peut

[*] Les diverses nappes de la surface considérée pourraient se réunir en certains points singuliers, comme par exemple au sommet d'un cône, ou se couper mutuellement suivant des lignes singulières. Pour éviter toute difficulté de ce genre, nous conviendrons de ne tenir aucun compte de ces liaisons accidentelles, et de ne pas considérer comme contigus deux points même très-rapprochés, pris sur des nappes différentes.

décomposer S en éléments, de la manière suivante : Supposons cette surface coupée suivant les contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$, on obtiendra ainsi une nouvelle surface T encore d'une seule pièce, mais que tout contour fermé K partage en deux régions distinctes; car si cela n'avait pas lieu, on pourrait tracer simultanément sur la surface S les $n+1$ contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$, K sans la diviser en régions distinctes, ce qui est contraire à notre hypothèse. La surface T est d'ailleurs limitée par $m+2n$ contours, à savoir $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$ et les deux bords des sections faites le long de chacun des n contours $C, C_1, \ldots, C_{n-1}$. Soient D, D_1 deux quelconques de ces $m+2n$ contours (*fig.* 1); la surface T

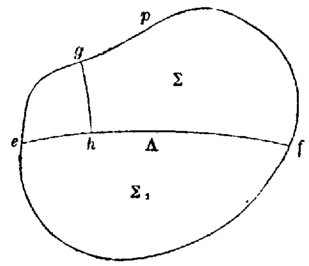
Fig. 1.



étant d'une seule pièce, on pourra y tracer une transversale L joignant un point quelconque a de D à un point quelconque a_1 de D_1, et qui ne se coupe pas elle-même. En coupant la surface T suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_1 encore d'une seule pièce; car si μ et ν sont deux points voisins situés de part et d'autre de la transversale, on pourra passer de l'un à l'autre en suivant la transversale, puis le contour D, puis l'autre côté de la transversale. Cette surface T_1 est limitée par les mêmes contours que T, sauf que le système des deux contours distincts D, D_1 est remplacé par un contour unique, formé de D, D_1 et des deux bords de la section faite suivant la transversale. (Ce contour est indiqué par les flèches sur la *fig.* 1.) Ainsi le nombre des contours qui limitent T_1 n'est plus que $m+2n-1$. Soient b, b_1, deux points pris arbitrairement sur deux de ces contours, on peut les joindre ensemble par une transversale L_1 et en coupant T_1 suivant cette transversale, on aura une nouvelle surface T_2 limitée par $m+2n-2$ contours. Poursuivant ainsi, on arrivera à une surface U, limitée par un seul contour; d'ailleurs tout contour fermé tracé sur U est par là même tracé sur T. Il divise donc T, et par suite U, en deux régions distinctes.

Soient maintenant e, f deux points quelconques pris sur le contour de U : on peut les joindre par une transversale Λ (*fig.* 2). Cette trans-

Fig. 2.



versale partage U en deux régions distinctes, car le contour fermé $fepf$ étant tracé sur U, ne coupe aucun des contours D, D_1,... qui limitent T. Il partage donc conjointement avec ces derniers contours la surface T en deux régions distinctes. Si donc μ et ν sont deux points infiniment voisins, situés de part et d'autre de la transversale, on ne pourra passer de l'un à l'autre sans traverser ou ef, ou epf, ou quelqu'un des contours D, D_1,..., mais ces derniers contours, ainsi que epf, font partie du contour unique qui limite U. On ne peut donc passer de μ à ν sans traverser ou le contour de U ou la transversale : donc celle-ci divise U en deux régions, Σ et Σ_1.

Soient g, h deux points pris arbitrairement sur le contour de l'une de ces régions, Σ par exemple (*fig.* 2), on peut les joindre par une nouvelle transversale tracée sur Σ, laquelle divisera nécessairement Σ en deux régions distinctes. En effet, la transversale ghe partage, comme nous venons de le voir, la surface U en deux régions distinctes, de telle sorte qu'on ne puisse passer d'un côté à l'autre de cette transversale sans la traverser ou sans sortir de U. Pour passer d'un côté de gh à l'autre, il faut donc, ou sortir de U et *a fortiori* de Σ, ou traverser eh, ce qui fait encore sortir de Σ, ou enfin traverser gh; donc gh coupe Σ en deux régions distinctes. Chacune de ces deux régions sera partagée de même en deux autres par une nouvelle transversale, etc. En multipliant indéfiniment les transversales, on arrivera à décomposer la surface considérée en éléments infiniment petits.

Soit maintenant S' une autre surface limitée par m contours A', $A'_1, \ldots, A'_{m-1}$, et telle, qu'on puisse y tracer n contours fermés C', $C'_1, \ldots, C'_{n-1}$, ne se traversant ni eux-mêmes ni mutuellement, sans la partager en régions distinctes. Coupons S' suivant les contours C', $C'_1, \ldots, C'_{n-1}$. La nouvelle surface T' ainsi obtenue sera limitée comme l'était T par $m + 2n$ contours, à savoir A', $A'_1, \ldots, A'_{m-1}$, et les deux bords des sections faites suivant les contours C', $C'_1, \ldots, C'_{n-1}$. Soient par exemple Γ' et Δ' les deux bords de la fente faite suivant C'; chaque point de S' situé sur C' peut être considéré comme résultant de la jonction de deux points de la surface T', situés, l'un sur Γ', l'autre sur Δ'. De la même manière, chaque point de S situé sur C pouvait être considéré comme résultant de la jonction de deux points situés sur les contours Γ et Δ, qui tous deux limitent la surface T.

Cela posé, faisons correspondre respectivement les contours A', $A'_1, \ldots, A'_{m-1}$, Γ', $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_{n-1}$ aux contours A, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, Γ, $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{n-1}$, de telle sorte que deux points consécutifs pris sur A, par exemple, aient respectivement pour correspondants deux points consécutifs pris sur A'. Faisons encore correspondre Δ', $\Delta'_1, \ldots, \Delta'_{n-1}$ à Δ, $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$, de telle sorte que les points correspondants de Δ et de Δ', par exemple, soient ceux qui se confondent avec des points correspondants de Γ et de Γ'.

A la transversale L, qui joint ensemble les points a, a_1, faisons correspondre une transversale L' joignant les points correspondants a', a'_1, chaque point de L' pouvant d'ailleurs correspondre à un point quelconque de L, avec cette seule restriction, que les points correspondants se suivent respectivement dans le même ordre sur chacune de ces deux lignes. De même à la transversale L_1, qui joint ensemble b, b_1, faisons correspondre une transversale L'_1 joignant ensemble les points correspondants b', b'_1. A la transversale Λ qui joint e à f, faisons correspondre une transversale Λ' qui joigne e' à f', etc.

Le réseau de transversales ainsi tracé sur S' décompose cette surface en éléments respectivement correspondants à ceux de S, et il est clair, d'après notre mode de procéder, qu'à des éléments contigus de S correspondent des éléments contigus de S'.

Le théorème est donc démontré.

Chalon-sur-Saône, février 1866.