JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 9-13.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__9_0>

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, est liée intimement à la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

qui a été l'objet de l'article précédent. Le rapprochement deviendra plus sensible si l'on remplace la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2$$

par la forme équivalente

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 5t^2$$

et si l'on observe que les deux formes binaires

$$x^2 + 5y^2,\ 2x^2 + 2xy + 3y^2,$$

distinctes entre elles, il est vrai, appartiennent néanmoins au même déterminant -5. Aussi la solution de la question qui consiste à chercher une expression simple du nombre

$$N(n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2$$

est entièrement subordonnée à celle de la question analogue pour la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2.$$

C'est ce que nous allons expliquer en détail. Nous ferons, comme dans l'article précédent,

$$n = 2^\alpha 5^\beta m,$$

m étant impair et premier à 5.

2. Soit d'abord $\alpha > 0$, de façon qu'il s'agisse d'un entier pair.

Tout dépend alors d'une proposition bien facile à établir, à savoir que la valeur de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

est égale à celle de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 5^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Or on a vu que cette dernière valeur s'exprime par

$$2\,(5^{\beta+1} - 3)\,\zeta_1(m).$$

Telle est donc aussi l'expression de

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2).$$

Je n'ai pas besoin de rappeler que

$$\zeta_1(m)$$

désigne la somme des diviseurs de m.

Le cas d'un nombre pair est donc résolu par la formule

$$\mathrm{N}\,(2^\alpha 5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 2\,(5^{\beta+1} - 3)\,\zeta_1(m)$$

qui ne laisse rien à désirer. L'exposant α est supposé > 0, mais l'exposant β est indifféremment nul ou positif. Quand on a $\beta = 0$, la formule devient

$$N(2^\alpha m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 4\zeta_1(m).$$

Par exemple, on a

$$N(2 = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 4;$$

et en effet l'entier 2 est susceptible de quatre représentations sous la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2.$$

On les obtient en prenant $y = 0$ et $t = 0$, avec $x = 0$, $z = 1$, ou bien avec $x = 0$, $z = -1$, ou encore avec $x = 1$, $z = 0$, ou enfin avec $x = -1$, $z = 0$. Mais je ne veux pas insister sur ces vérifications numériques.

3. Soit maintenant $\alpha = 0$, en sorte qu'il s'agisse d'un entier impair

$$5^\beta m.$$

Posons généralement

$$N(5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = f(\beta),$$

partant

$$N(m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = f(0).$$

Nous aurons, entre

$$f(\beta)$$

et

$$f(0),$$

précisément la même relation que nous avons trouvée, entre

$$F(\beta)$$

et

$$F(0),$$

dans l'article précédent, où nous supposions

$$F(\beta) = N(3^\beta m = x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2).$$

Ainsi on a

$$f(\beta) = \frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\beta\left[f(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

ce qui permet d'exprimer simplement la valeur de

$$N(5^\beta m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2)$$

quand on connaît celle de

$$N(m = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2).$$

Il est clair, par exemple, que

$$N(1 = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2) = 0.$$

Ayant donc $f(0) = 0$ pour $m = 1$, on en conclut la valeur correspondante de $f(\beta)$, qui est

$$\frac{2}{3}(5^{\beta+1} - 3) - \frac{4}{3}(-1)^\beta;$$

telle est donc la valeur de

$$N(5^\beta = 2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2),$$

quel que soit l'exposant β.

Mais je trouve en outre une relation curieuse entre $f(0)$ et $F(0)$, ou plutôt entre $f(\beta)$ et $F(\beta)$. Il est aisé en effet de prouver que l'on a

$$F(0) + 2f(0) = 4\zeta_1(m)$$

et généralement

$$F(\beta) + 2f(\beta) = 2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m);$$

c'est-à-dire qu'en ajoutant au nombre des représentations de l'entier impair $5^{\beta} m$, par la forme

$$x^2 + y^2 + 5z^2 + 5t^2,$$

le double du nombre des représentations de ce même entier, par la forme

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 + 2z^2 + 2zt + 3t^2,$$

on obtient toujours pour total

$$2(5^{\beta+1} - 3)\zeta_1(m).$$

Les deux formes citées se prêtent en quelque sorte un appui mutuel pour aboutir à un résultat simple.