JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F. WOEPCKE

Passages relatifs à des sommations de séries de cubes extraits de deux manuscrits arabes inédits du British Museum de Londres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 83-116.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__83_0>

PASSAGES RELATIFS
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES
EXTRAITS
DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS
DU *BRITISH MUSEUM* DE LONDRES,

Cotés nos CCCCXVII et CCCCXIX des manuscrits orientaux
(nos 7469 et 7470 des manuscrits additionnels);

PAR M. F. WOEPCKE,
Membre de la Société Orientale allemande, et du Conseil de la Société Asiatique de Paris,
et Membre correspondant de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*.

Manuscrit coté CCCCXVII *des manuscrits orientaux du* British Museum (**7469** *des manuscrits additionnels*).

Volume in-4 de 210 feuillets en papier. Le premier et le dernier de ces 210 feuillets, qui sont des feuillets de garde, et les trois feuillets qui précèdent le dernier feuillet de garde ne sont pas numérotés. Les 205 autres feuillets sont numérotés au crayon avec les numéros 1 à 204, à l'exception du trentième feuillet du volume, qui paraît avoir été sauté par inadvertance.

Les quatre feuillets qui précèdent le dernier feuillet de garde sont en blanc, ou occupés par des notes détachées.

Tout le reste du manuscrit est occupé par le commentaire de Chihâb Eddîn Aboûl Abbâs Ahmed Ben Radjab, connu sous le nom d'Ibn Almadjdî, le châféïte, sur le *Talkhîs* ou « Exposé des opérations du calcul » d'Ibn Albannâ. La copie est datée du 17 Rabîa' second de l'an 840 de l'hégire, ou 29 octobre 1436 de J.-C.; et l'achèvement du commentaire du 6 Dzoûl-hidjdjah de l'an 834 de l'hégire, ou 15 août 1431 de J.-C.

Le commentateur Ahmed Ibn Almadjdî mourut en 850 de l'hégire (29 mars 1446 à 18 mars 1447 de J.-C.), et est mentionné dans le Dictionnaire bibliographique de Hadji Khalfa comme auteur de plusieurs ouvrages concernant l'astronomie et le calcul astronomique. Voir l'édition de Fluegel, t. I, p. 248, n° 475; t. II, p. 581, n° 3990; t. III, p. 223, n° 5111 et p. 528, n° 6773; t. V, p. 205, n° 10694. Comparer Wœpcke, sur l'introduction de l'arithmétique indienne en Occident, p. 66, lig. 22 et suiv.; et Bibl. Bodleianae codd. mss. orientall. catalogi partis secondæ vol. I, confecit A. Nicoll, Oxonii, 1821; in-folio, p. 284, n° CCLXXXVI, 1°.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 83 à 110 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus.

Au nom de Dieu clément et miséricordieux. O Dieu bénis notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons, et répands sur eux ton salut. F. 1, v°.

Le pauvre qui a besoin de la miséricorde de son Seigneur, qui confesse son insuffisance dans l'accomplissement de ses devoirs et ses péchés, qui espère le pardon de Dieu qui ressuscite et qui crée, Ahmed le châféïte Ibn Almadjdî dit :

Louange à Dieu qui a réuni [1] les savants dans les habitations [2] de la dignité seigneuriale, et qui a fait tomber [3] sur eux, dans la distribution [4] des qualités excellentes [5], le lot [6] de la bonne fortune ; qui a soulevé [7] de leurs cœurs le rideau [8], et qui les a comblés de bienfaits innombrables [9] ; qui leur a fait connaître les essences des noms [10] et les qualités inhérentes et inséparables [11], de sorte qu'ils ont découvert les choses inconnues [12], et qu'ils ont appris la signification des mots.

Je loue Dieu parce qu'il a revêtu [13] les savants des robes d'honneur

---

[1] Cette préface, écrite en prose rimée, est remplie de jeux de mots dans le goût arabe, l'auteur ayant eu soin d'employer des mots qui ont en même temps des significations techniques dans l'arithmétique pratique ou dans d'autres parties des sciences mathématiques. Ainsi le mot traduit ici par « réunir » signifie en même temps, comme terme technique « additionner ».

[2] Ce mot signifie en même temps les « places » ou « rangs » de chiffres dans la numération, et en astronomie les « mansions » de la lune.

[3] Le mot traduit ici par « faire tomber » signifie aussi « multiplier ».

[4] Ce mot signifie en même temps « division ».

[5] Le mot traduit par « qualités excellentes » signifie en même temps « excès », et de là « différence ».

[6] Ce mot signifie en même temps « flèche » et « sinus verse », et en outre dans les calculs relatifs à des sociétés de commerçants, etc., « portions ».

[7] Le mot qui signifie « soulever » est souvent aussi employé en arithmétique pratique pour désigner le « montant » qui « résulte » d'une opération.

[8] « Le soulèvement du rideau » est en même temps le titre d'un célèbre traité d'Ibn Albannâ sur l'arithmétique pratique.

[9] Textuellement : ce qui n'est pas dans le « calcul ».

[10] Ces mots contiennent une allusion évidente aux termes techniques qui désignent les quantités irrationnelles appelées « de deux noms » et « de plusieurs noms ».

[11] Allusion à la quantité « continue » et « discrète ».

[12] Allusion à la détermination des valeurs des inconnues en algèbre.

[13] Le verbe traduit par « revêtir », textuellement « jeter sur », est, sans la préposition « sur », le terme technique qui désigne « la soustraction ».

de la perfection, et les a ornés des colliers [1] de la gloire. Je le remercie de les avoir préservés des deux (espèces d') erreurs [2] dans l'action d'effacer [3] et dans l'action d'écrire, de sorte que les plateaux [4] de leurs balances [5] ont penché en leur faveur.

Je témoigne qu'il n'y a pas d'autre Dieu que Dieu seul, et qu'il n'a point de compagnon, Lui qui est un, unique, simple [6], éternel, inaccessible au nombre, qui n'a point d'épouse [7] ni de fils.

Je témoigne que notre seigneur Mohammed est son serviteur et son prophète, son élu et son ami, l'imâm des imâms auquel Dieu a inspiré les paroles de la sagesse, le possesseur de la noble origine [8] et de la destinée [9] élevée et sublime, de la place [10] qui est l'objet des louanges, et du réservoir [11] du nectar céleste célébré par toutes les langues: qui est initié au vaste ensemble et aux détails [12] de la science, et qui juge avec pénétration de l'excellence des offrandes [13], de sorte qu'il confère les grâces, petites et grandes; qui a été transporté dans

---

[1] Ce mot signifie aussi les « nœuds » des nombres, c'est-à-dire les neuf unités, les neuf dizaines (10, 20, 30, etc.), les neuf centaines, et ainsi de suite.

[2] Allusion au « calcul des deux erreurs », c'est-à-dire à la règle des deux fausses positions.

[3] Allusion à une certaine manière de calculer sur le sable dans laquelle on efface successivement avec le doigt les chiffres que l'on vient d'écrire, pour les remplacer par d'autres, jusqu'à ce qu'on arrive au résultat.

[4] Allusion à un autre nom de la règle des deux fausses positions.

[5] Le mot qui signifie « balance » est aussi le terme technique employé pour désigner la « preuve », par exemple la preuve par neuf, par sept, etc.

[6] Ce mot signifie en même temps « impair ».

[7] Ce mot signifie en même temps « pair ».

[8] Le mot traduit par « origine » signifie, comme terme technique, le « rapport » de deux quantités.

[9] Ce mot signifie en même temps la « division ».

[10] Ce mot signifie en même temps le « dénominateur » d'une fraction.

[11] Ce mot désigne en même temps une certaine partie de la constellation de la Grande Ourse.

[12] Textuellement : au « beaucoup » et au « peu ».

[13] Dans cette phrase le texte du manuscrit paraît être altéré. Le mot traduit par « offrandes » sert à désigner en arithmétique des calculs « d'approximation » et en général des « procédés expéditifs ».

l'apogée de la noblesse aux cercles du plus haut des paradis célestes; dans la main duquel les pierres muettes [1] ont loué Dieu, et qui est l'être pur chargé de la défense de la foi. Puisse Dieu répandre sur lui, sur sa famille et sur ses compagnons toutes les bénédictions possibles, le salut, la noblesse, l'honneur et la grandeur.

Pour en venir au fait. Attendu qu'aucun blâme [2] ne s'attache à la science du calcul, et qu'elle n'est resserrée par aucune barrière [3], j'ai choisi, dans cette science, comme objet d'une étude particulière, l'ouvrage intitulé « l'Exposé fait avec choix » (*Talkhîs*), ouvrage complet en fait de théorie, composé par le chaïkh, l'imâm, Aboûl Abbas Ahmed Ibn Albannâ, puisse Dieu couvrir ses péchés de sa miséricorde et le faire demeurer au milieu de son paradis. Cependant j'ai remarqué que cet ouvrage contient des opérations privées de leur partie la plus instructive, en tant qu'elles ne sont pas accompagnées, dans les chapitres qui en traitent (d'un exemple ou d'un problème) correspondant; et qu'il contient des théories subtiles dont il est impossible d'exposer d'une manière satisfaisante les significations, quand même on y apporterait un soin extrême dans quelques feuillets d'un mince volume, quoique certainement remplis d'une science abondante, si ce n'est que l'auteur n'y a point entrepris l'explication de ces belles opérations. Au contraire, il les a laissées destituées de démonstrations, de sorte que nous ne savons pas si la justesse de ce que l'auteur avance est nécessaire ou accidentelle, et si, en nous conformant à ce qu'il expose, nous pouvons arriver à ce que nous désirons savoir en dehors de cela.

Par conséquent j'ai jugé convenable d'écrire sur cet ouvrage un com-

---

[1] Le mot traduit par « muettes » désigne en même temps les quantités « irrationnelles », et, parmi les nombres entiers, les nombres « premiers », eu égard à leur propriété de ne pas se laisser décomposer en facteurs. Comparer le *Liber Abbaci* de Léonard de Pise, édition du prince don Balthazar Boncompagni, Rome, 1857; in-4, p. 31, le tableau placé sur la marge de la page. Le mot « hasam » y est la reproduction, un peu modifiée, du mot arabe qui signifie « muet ».

[2] Littéralement : « poussière ». Ce mot contient en même temps une allusion au calcul du *gobâr*, ou calcul de poussière.

[3] Le mot arabe traduit par « barrière » est *hiçâr* et paraît contenir une allusion à un célèbre traité d'arithmétique, antérieur à Ibn Albannâ et intitulé : « *Al-hiçârou'l-çaghîr* ».

mentaire qui contînt l'explication des principes sur lesquels il est fondé, l'exposé clair et exact de ses parties compliquées, et qui écartât l'obscurité qui cache [1] les objets qu'il a en vue; de réunir, au moyen de ce commentaire, ce qui se trouve dispersé dans l'ouvrage original, et de rassembler les joyaux précieux qu'il renferme; d'éclaircir enfin les méthodes de ses opérations et les démonstrations de ses problèmes.

J'ai donc essayé [2] mes forces en consignant dans cet ouvrage ce qui est dans les limites du possible, et c'est à l'épreuve [3] que l'on reconnaît la valeur du caillou ou qu'on le juge méprisable; j'ai dirigé [4] vers cet objet le cœur [5] de ma pensée en lui donnant du développement [6], et j'y ai mis ma confiance dans le changement [7].

Dieu a eu égard à ma contrition [8]; il m'a récompensé en me réconfortant [9], et il m'a aidé à composer, à écrire et à rédiger cet ouvrage.

---

[1] Littéralement : (qui contînt) « l'action d'écarter le manteau » *qachfou'l kinâ'*. Ces mots renferment peut-être une allusion à un traité du célèbre Nacôr Eddin Althôuci, intitulé *Qachfou' l-kinâ'* et relatif à un sujet appartenant à la trigonométrie sphérique. *Voir* Hadji Khalfa, édition de Fluegel, t. V, p. 212 et 213, n° 10738. Comparer *ibidem* n° 10742.

[2] Ce mot est employé quelquefois comme expression technique pour désigner l'action de « faire la preuve » d'une opération arithmétique.

[3] Ce mot sert en même temps comme terme technique pour désigner la « vérification » d'une opération arithmétique.

[4] Le mot traduit par « diriger » sert, comme terme technique, à désigner l'action de « transformer » une fraction donnée dans une autre dont le dénominateur est donné.

[5] Le mot traduit par « cœur » se change, par une légère modification des points-voyelles, dans le terme technique qui signifie « zéro ».

[6] Le mot traduit par « développement » signifie en même temps le « numérateur total » que l'on obtient en réduisant un nombre mixte, ou certaines autres espèces compliquées de fractions, en usage chez les Arabes, à une fraction ordinaire.

[7] C'est-à-dire : au milieu des vicissitudes des choses humaines. Ce mot paraît contenir une allusion à un terme technique formé de la même racine et qui désigne la « transformation » des équations algébriques.

[8] Ce mot signifie, comme terme technique, « fraction ».

[9] Les deux mots traduits par « récompenser » et « réconforter » désignent en même temps les deux opérations algébriques de l' « opposition » et de la « restauration » dont la réunion forme le nom arabe de l'algèbre.

J'ai intitulé cet ouvrage « Le recueil de la moelle et le commentaire de l'exposé des opérations du calcul ».

Dans sa rédaction je me suis fait une loi de commencer (constamment) par mentionner littéralement les paroles de l'auteur, telles qu'il les a consignées dans sa composition. Ensuite je les ai fait suivre d'une explication au moyen d'exemples, et enfin j'ai placé en dernier lieu la démonstration et l'indication des causes, afin que (chaque théorie) soit complète et absolue dans son chapitre et présentée d'une manière claire et spéciale en faveur de ceux qui désirent s'en instruire. J'ai indiqué les paroles de l'auteur au moyen des mots « l'auteur dit telle chose » et au moyen de l'encre rouge, de manière à les distinguer du commentaire et de les mettre à part. Quelquefois aussi j'ai cité des passages de ce que l'auteur a exposé dans (l'ouvrage intitulé) « le Soulèvement du Rideau. » Dans ces cas je dirai « il a dit », de sorte qu'il n'y a lieu à aucune ambiguïté.

Fin du f. 1, v°. Cependant je n'ai pas violé la virginité de sa méthode | et je ne me suis pas frauduleusement approprié les choses admirables qui lui appartiennent [1], comme on abuse d'un homme simple, mais j'ai étudié ce que les anciens ont mentionné en fait des principes de cette branche de la science, et ce qu'ils ont expliqué.

... Il est connu que si l'on ajoute un nombre quelconque au nombre qui le suit, le résultat est le double du premier nombre plus un. Il est
F. 17, v°. connu aussi que l'unité est égale à trois fois un tiers | et que le double d'un nombre quelconque est égal à trois fois deux tiers de ce nombre. Par conséquent la somme d'un nombre quelconque et de celui qui le suit est égale à trois fois deux tiers de ce nombre plus un tiers de l'unité [2]. Donc, si nous multiplions le double de la somme [3] par le dénominateur des deux nombres, on a multiplié par le triple de ce qu'il fallait. Il est connu aussi, que si l'on multiplie le double d'un nombre par le triple d'un autre nombre, le résultat est égal a six fois

---

[1] Ces mots signifient en même temps : je n'ai rien dérobé à mon hôte.

[2] $$a + (a+1) = 3\left(\frac{2a}{3} + \frac{1}{3}\right).$$

[3] C'est-à-dire
$$2(1+2+3+\ldots+n) \quad \text{ou} \quad n(n+1).$$

le résultat de la multiplication de l'un des deux nombres par l'autre.

L'auteur dit : *et l'élévation au cube (se fait) par l'élévation au carré de la somme* [1]. C'est-à-dire que la somme des cubes des nombres suivant leur ordre résulte de la multiplication de la somme des côtés par elle-même. F. 17, v°, lig. 3.

La raison de cela, c'est que, si un nombre quelconque est partagé en deux parties, la somme du produit de la multiplication du nombre par l'une de ses deux parties, plus le rectangle des deux parties et le carré de l'autre partie est égale au carré de ce nombre [2].

En effet, le principe de la multiplication d'un nombre par un autre nombre consiste en ce que nous multiplions le tout de l'un des deux

---

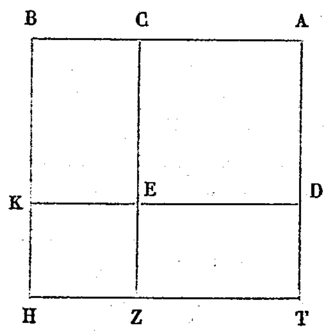
[1] C'est-à-dire

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [1 + 2 + 3 + \ldots + n]^2.$$

[2] $$(a + b)a + ab + b^2 = (a + b)^2.$$

On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose évidemment destinée à remplacer l'alinéa suivant, et dont voici la traduction.

J'ai trouvé dans un autre exemplaire, portant l'écriture de l'auteur, une autre explication, à savoir la suivante. *Exemple :* Soit le nombre AB divisé en deux parties au



point C, et soit la surface AH le carré de AB. Menons du point C une droite parallèlement à AT, ce sera la droite CZ, et prenons sur AT un segment équivalent à AC, à savoir AD ; enfin menons la droite DE parallèlement à AB. Alors puisque la surface AK résulte de la multiplication de AB par AD, c'est-à-dire par AC ; puisque la surface DZ résulte de la multiplication de DE, c'est-à-dire de AC, par EZ, c'est-à-dire par EK, c'est-à-dire par CB ; et puisque la surface EH résulte de la multiplication de EZ par lui-même, c'est-à-dire de BC par lui-même ; il s'ensuit ce que nous nous étions proposé de démontrer. Cela étant établi, nous disons.

nombres par le tout de l'autre. Donc, si l'on divise l'un des deux nombres, ou tous les deux, dans un nombre quelconque de parties, il est nécessaire de multiplier chaque partie de l'un des deux nombres par toutes les parties de l'autre, et d'additionner les résultats. C'est par là aussi que l'on reconnaît la raison de la multiplication suivant les rangs (des chiffres des nombres), parce que chacun des deux nombres multipliés l'un par l'autre peut être décomposé dans ses rangs [1], ainsi que vous le lirez certainement, si Dieu le Très-Haut le permet, dans le chapitre de la multiplication.

Cela étant établi, nous disons que, si un nombre quelconque est divisé en deux parties de quelque manière que ce soit, son carré est égal aux deux carrés de ses deux parties et à leur rectangle pris deux fois.

Soit donc le nombre A divisé en deux parties d'une manière quelconque, et que ce soient B, C. Je dis que le carré de A est égal à la somme des deux carrés de B et C et de leur rectangle pris deux fois.

En effet, A étant divisé en B et C il faut que nous multipliions chacune de ces deux parties par chacune des deux parties de A. Donc posez-les deux fois sur deux rangs, comme il suit :

$$\begin{matrix} B & C \\ B & C \end{matrix}$$

Nous multiplions B par B, et ensuite par C; puis C par B, et ensuite par C, et nous additionnons les quatre résultats. Mais le produit de B par B est le carré de B; et pareillement C fois C est le carré de C; et le produit de B fois C et de C fois B est le rectangle B fois C pris deux fois. Par conséquent le carré de A est égal à la somme des carrés de ses deux parties et de leur rectangle pris deux fois.

Il est, par là, évident que le produit de A tout entier par B est égal au carré de B plus le rectangle de B fois C, et que le produit de A tout entier par C est égal au carré de C plus le rectangle de C fois B.

Donc, si l'on multiplie un nombre par l'une de ses deux parties, et

---

[1] Par exemple

$$3856 = 3000 + 800 + 50 + 6.$$

si l'on joint au résultat le carré de la partie qui n'a pas servi à la multiplication et le rectangle des deux parties, cela est égal au carré du nombre.

Cela étant établi, nous disons qu'il est connu que le cube d'un nombre est le résultat de la multiplication du nombre par son carré. Donc étant donnés des nombres suivant leur ordre et dont le premier soit l'unité, si nous désirons trouver la somme de leurs cubes, vous multiplierez chacun de ces nombres par son carré et vous additionnerez les résultats. Il résultera la quantité cherchée [1].

Mais le carré d'un nombre quelconque est la somme de son triangle et du triangle du nombre précédent [2], ainsi que nous expliquerons cela certainement ci-après. Et le triangle d'un nombre quelconque est égal à la somme de ce nombre plus le triangle du nombre précédent [3], ainsi qu'il sera pareillement expliqué.

D'après cela, si nous désirons trouver la somme des cubes des nombres suivant leur ordre, et dont le premier soit, par exemple, l'unité, vous multiplierez chacun de ces nombres par son triangle du nombre précédent et vous additionnerez les résultats. Il résultera de la quantité cherchée [4].

Soient, par exemple, quatre nombres, dont le premier soit l'unité et le dernier quatre. Nous désirons trouver la somme de leurs cubes. Nous les posons donc dans une ligne, comme ci-après, et au-dessous

---

[1] $$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+(n-1)^3+n^3=1.1^2+2.2^2+3.3^3+4.4^2+\dots+(n-1).(n-1)^3+n.n^2.$$

[2] $$n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

[3] $$\frac{n(n+1)}{2}=n+\frac{(n-1)n}{2}.$$

[4] $$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+(n-1)^3+n^3=1.(0+1)+2.(1+3)+3(3+6)+4(6+10)+\dots+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right]+n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right].$$

leurs triangles dans une autre ligne, comme vous le voyez :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{array}$$

il faut alors que nous multipliions le quatre par le dix qui se trouve au-dessous, et par le six qui est au-dessous du nombre précédent. Puis vous multipliez le trois par le six, et ensuite par le trois ; et pareillement le deux par le trois et ensuite par le un. Puis le un par le un. Vous additionnerez les résultats et il résultera la somme des cubes de ces nombres.

Mais le résultat de l'addition de ces produits est précisément égal au résultat de la multiplication du triangle du plus grand de ces nombres par lui-même, c'est-à-dire de la somme de ces nombres par elle-même [1].

La raison de cela c'est que le triangle du plus grand de ces nombres, à savoir dix, se partage en deux parties, quatre et six, c'est-à-dire son
F. 18, r°. côté et le triangle précédent. Donc, si vous multipliez le dix | par le quatre et le quatre par le six cela revient à former le produit d'un nombre par une de ses deux parties et le rectangle des deux parties. Si donc on ajoute à cela le carré de l'autre partie, il résulte le carré de ce nombre. Mais l'autre partie, c'est six. Et il a été déjà démontré que le carré du six est égal au produit du six par l'une de ses deux parties plus le rectangle de ses deux parties et plus l'autre partie, c'est-à-dire égal au produit du six par le côté trois, plus le produit du côté trois par le triangle trois qui est le triangle précédent, et en joignant cela encore au carré de l'autre partie, à savoir de trois, parce que le six a été divisé en trois et trois. Mais le carré du trois est égal au produit du trois par le côté deux qui est l'une de ses deux parties, plus le rec-

---

[1] $$1.(0+1)+2.(1+3)+3.(3+6)+4.(6+10)+\ldots$$
$$+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right]+n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=[1+2+3+4+\ldots+(n-1)+n]^2.$$

tangle des deux parties, c'est-à-dire du côté deux multiplié par le triangle un, et plus le carré de l'un. Mais le carré de l'un c'est un.

Il est donc rendu évident, par là, que si l'on multiplie chacun de ces nombres par son triangle et par le triangle du nombre précédent, la somme des résultats est égale au produit de la somme de ces nombres par elle-même et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer [1].

---

[1] Cette démonstration d'Ibn Almadjdî s'exprime de la manière suivante en langage algébrique moderne :

$$\begin{aligned}
&1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=1.1^2+2.2^2+3.3^2+4.4^2+\ldots\\
&\quad+(n-1)(n-2)^2+n.n^2=1.(0+1)+2.(1+3)+3(3+6)+4(6+10)+\ldots\\
&\quad+(n-1)\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}\right]+n\left[\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right]\\
&=1^2+2[1+(2+1)]+3[3+(3+3)]+4[6+(4+6)]+\ldots\\
&\quad+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\}\\
&\quad+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\left[n+\frac{(n-1)n}{2}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
1^2+2[1+(2+1)]&=1^2+2.1+2.(2+1)=(2+1)^2=3^2,\\
3^2+3[3+(3+3)]&=3^2+3.3+3.(3+3)=(3+3)^2=6^2,\\
6^2+4[6+(4+6)]&=6^2+4.6+4.(4+6)=(4+6)^2=10^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+(n-1)\left\{\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]\right\}\\
&=\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+(n-1)\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2}+(n-1)\\
&+\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]=\left[(n-1)+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+n\left\{\frac{(n-1)n}{2}+\left[n+\frac{(n-1)n}{2}\right]\right\}\\
&=\left[\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+n\cdot\frac{(n-1)n}{2}+n\cdot\left[n+\frac{(n-1)n}{2}=n+\frac{(n-1)n}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.
\end{aligned}$$

L'auteur dit: *Quant à l'addition des nombres impairs suivant l'ordre, elle consiste à élever au carré la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend joint à l'unité.*

Il a été dit précédemment, parmi les propriétés des nombres (naturels) rangés suivant leur ordre, que les unités du plus grand, c'est-à-dire de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, sont égales au nombre (des termes de la suite). Or, il en serait de même pour le plus grand des nombres impairs rangés suivant leur ordre, si les nombres pairs étaient intercalés parmi les impairs. Il est connu aussi que le nombre des nombres pairs qui tombent entre ces nombres impairs, est plus petit d'une unité que le nombre des impairs; et si de deux nombres quelconques l'un dépasse l'autre d'une unité, leur somme est le double du plus grand moins l'unité, ou le double du plus petit plus l'unité. D'après cela le (nombre) jusqu'auquel (la suite) des impairs s'étend, est le double du nombre de ces impairs moins l'unité.

Il a été déjà montré, dans la détermination de la somme de la proportion arithmétique, qu'il fallait additionner les deux termes extrêmes et multiplier cela par la moitié du nombre (des termes). Mais (le terme) le plus petit est (ici) l'unité. Lors donc qu'il est ajouté au plus grand, il résulte le double du nombre des nombres. Et il faut que nous multipliions par la moitié du nombre des nombres impairs, c'est-à-dire par un quart de la somme des deux termes extrêmes. Nous multiplierons donc la somme des deux termes extrêmes par son quart. Mais le produit d'un nombre par son quart est égal au produit de sa moitié par sa moitié, ainsi que nous expliquerons cela certainement.

L'auteur dit: *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

Il faut faire précéder ce problème de deux principes.

L'un d'eux c'est qu'il faut que vous sachiez que la somme des nom-

---

Donc

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
$$= [1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n]^2.$$

bres suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, s'appelle le triangle de ce nombre.

Soient pris, par exemple, les nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'au six, et soient (écrits) au-dessous leurs triangles depuis un jusqu'à vingt et un, et leurs carrés depuis un jusqu'à trente-six, ainsi que le montre la figure suivante :

1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	9	16	25	36

Il a été déjà expliqué, dans ce qui précède, que le carré d'un nombre quelconque est égal à son triangle plus le triangle du nombre précédent.

En vertu de cela [1] on peut dire que les triangles des nombres pris suivant leur ordre jusqu'à un nombre impair sont égaux aux carrés des nombres impairs suivant l'ordre pris jusqu'au même nombre impair; et que les triangles des nombres suivant l'ordre pris jusqu'à un nombre pair, sont égaux aux carrés des nombres pairs, suivant l'ordre pris jusqu'au même nombre pair. Et certainement l'explication de la signification du triangle se présentera lorsqu'il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c'est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de leur produit lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.

Pour effectuer l'objet que ce principe a en vue il y a deux méthodes.

---

[1] On trouve ici sur la marge du manuscrit une glose dont voici la traduction.

Dans un autre exemplaire (on lit :) En vertu de cela la somme des carrés des nombres impairs suivant leur ordre ou des nombres pairs suivant leur ordre est la somme des triangles des nombres suivant leur ordre pris jusqu'à ce nombre déterminé; car le carré de l'unité est égal à son triangle, parce qu'il n'est précédé de rien; et le carré du trois est égal à son triangle plus le triangle du nombre pair précédent; et pareillement le carré de deux est égal à son triangle plus le triangle du nombre impair précédent. Et ainsi de suite d'après le même ordre. Et certainement la signification du triangle sera expliquée lorsqu'il sera question des nombres figurés, si Dieu le Très-Haut le permet.

Le second (principe) c'est que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce

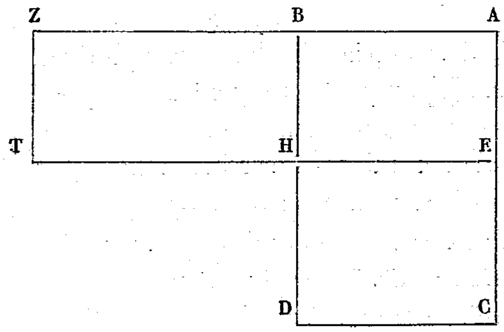
L'une consiste à diviser l'un des deux facteurs par un certain nombre, et à multiplier l'autre facteur par ce même nombre [1].

L'autre méthode consiste à retrancher de l'un des deux facteurs une quantité arbitraire, à prendre le rapport de la partie retranchée à la partie restante et à ajouter à l'autre facteur une quantité proportionnelle à ce rapport [2].

---

qui résulte de leur produit, lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une quantité quelconque, tandis que l'autre a été diminué proportionnellement.

Exemple. Soit le rectangle AD formé par le produit de AB fois AC, et soit ensuite



AC divisé au point E. Que l'on prolonge AB de BZ; et soit CE à EA comme BZ à AB, c'est-à-dire la partie retranchée à ce qui reste comme la partie ajoutée à la ligne à laquelle elle est ajoutée; enfin complétons le rectangle AT. Je dis que les deux rectangles AD, AT sont égaux. La raison de cela c'est que CE est à EA, c'est-à-dire DH à HB, comme BZ à AB, c'est-à-dire comme HT à HE. Or, le rectangle ED est formé du produit du premier par le quatrième (terme), qui sont DH, HE; et le rectangle BT est formé du produit du second par le troisième (terme) qui sont HB, HT. Par conséquent les deux rectangles ED, BT sont égaux, d'après ce qui a été dit précédemment. Ensuite ajoutons le rectangle AH comme partie commune à chacun des deux rectangles. Alors les deux rectangles AD, AT seront égaux. Et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

[1] $$a.b = \left(\frac{a}{m}\right).(b.m).$$

[2] Si l'on fait

$$\frac{m}{a-m} = \frac{n}{b},$$

on aura

$$a.b = (a-m)(b+n).$$

Exemple. Soit l'un des deux facteurs six et l'autre huit. Ce qui résulte de la multiplication de l'un par l'autre est quarante-huit. Or, si vous divisez le six, par exemple par deux, il résulte trois; et si vous multipliez le huit par le deux, il résulte seize. Alors ce qui résulte | F. 18, v°.
de (la multiplication) de trois par seize est quarante-huit.

Et si vous retranchez du six par exemple trois, le rapport de cela au reste, à savoir à trois, est celui de l'égalité; ajoutant par conséquent au huit son équivalent il résulte seize. Alors le résultat de la multiplication de trois par seize est quarante-huit, comme d'abord.

Et si vous retranchez du six deux, le rapport de cela au reste, à savoir au quatre, est la moitié; ajoutant donc au huit l'équivalent de sa moitié, il résulte douze. Alors le résultat de la multiplication de quatre par douze est pareillement quarante-huit.

La cause de cela, etc.

... Mais il a été déjà expliqué, dans le second principe, que tout rectangle formé de deux nombres est égal à ce qui résulte de (la multiplication de) ces deux nombres lorsque l'un d'eux a été augmenté d'une certaine quantité, tandis qu'elle a été retranchée de l'autre proportionnellement, non suivant sa grandeur absolue. Par conséquent un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend étant les deux côtés d'un rectangle, si l'on augmente le premier de deux fois sa propre valeur, de sorte que l'on obtient le troisième (nombre) | à F. 19, v°.
partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, exactement, et si l'on diminue l'autre suivant la même proportion, de sorte qu'il est réduit à un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, parce que le tiers est au tout comme le sixième à la moitié; alors on est ramené à trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre le second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier un sixième du (nombre) jusqu'auquel la suite s'étend. On multiplie donc le premier par le second, et ce qui résulte par le troisième.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication* F. 19, v°,
de la somme par son double moins un [1]. L'explication de ce problème lig. 3.

---

[1] C'est-à-dire $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (24 - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$.

est conforme à l'explication de l'addition des cubes des nombres pairs suivant leur ordre. Nous la différerons donc jusque-là; et par là sera expliqué ce qui vient d'être mentionné.

F. 19, v°, lig. 5. L'auteur dit : *Quant à l'addition des nombres pairs suivant l'ordre, elle consiste à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, constamment deux, et à multiplier la moitié de la somme par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend.*

Attendu que le nombre des nombres (naturels) suivant l'ordre est égal au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, mais que, entre les nombres pairs pris suivant l'ordre, manquent les impairs pris suivant l'ordre, dont le nombre est égal au nombre des pairs, parce que le premier des pairs est deux qui est précédé par l'unité; il s'ensuit que, dans les nombres pairs, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au double du nombre (des nombres). L'addition des deux termes extrêmes consiste donc à ajouter au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend deux, parce que c'est le premier des pairs. Par conséquent on multiplie deux plus (le nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, à savoir la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre des pairs, c'est-à-dire par un quart du double de ce nombre, ou par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Mais le produit des deux termes extrêmes par un quart du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est égal au produit de la moitié de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, en vertu de ce qui a été expliqué dans le second principe. Dieu seul connaît la vérité.

L'auteur dit : *Et l'élévation au carré (se fait) par la multiplication de deux tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, plus deux tiers de l'unité, par la somme (des nombres pairs simples); ou par la multiplication d'un sixième du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, par le rectangle compris sous les deux nombres qui l'avoisinent par après.*

L'auteur mentionne ici deux méthodes pour trouver (la somme) des carrés des nombres pairs. La seconde est celle qui a été donnée déjà précédemment pour trouver (la somme) des carrés des nombres impairs. En effet, il a été expliqué, à l'occasion du premier principe, que les carrés des nombres impairs ou des nombres pairs (additionnés) suivant leur ordre sont égaux aux triangles des nombres (naturels additionnés) suivant leur ordre jusqu'au même nombre impair ou (jusqu'au même nombre) pair; et que, si ces triangles sont divisés par la somme de leurs côtés, il résulte des (quotients) qui se dépassent mutuellement d'un tiers [1]. L'opération revient donc à ceci, que la quantité cherchée soit décomposée en trois côtés, à savoir la moitié (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), ainsi que tout cela a été expliqué à l'occasion des carrés des nombres impairs. Il n'y a, à cet égard, aucune différence entre la sommation des impairs et des pairs. Enfin le produit de la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, tout entier, par un sixième (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend. Or cela, c'est exactement la méthode pour l'addition des carrés des nombres impairs.

Quant à la première méthode, elle consiste à multiplier un tiers du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme, c'est-à-dire par la somme des nombres pairs pris suivant l'ordre. Il a été déjà expliqué, dans ce qui précède, que, si on multiplie les uns par les autres les trois côtés, à savoir la moitié du (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, le second (nombre) à partir de ce (nombre) et un tiers du troisième (nombre) à partir de ce (même nombre), il résulte la quantité cherchée ainsi qu'il a été dit. Mais le produit du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par un tiers du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, est égal au produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, tout entier, par un tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, en vertu de

---

[1] C'est-à-dire

$$\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)+n}-\frac{1+3+6+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}}{1+2+3+\ldots+(n-1)}=\frac{1}{3}.$$

ce que vous savez. Si ensuite ce qui résulte (est multiplié) par la moitié (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, il résulte la même chose que d'abord. Mais si vous multipliez le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, alors il faudra multiplier le résultat par un quart du nombre [1]. (Le produit qu'il s'agit (de former) est donc décomposé dans le produit du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, ce qui résulte (devant être multiplié) par un quart du nombre. Mais un quart du nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre est égal à la moitié du nombre des nombres pairs suivant leur ordre; car il manque au nombre (des nombres naturels) des nombres impairs en quantité égale à ces nombres pairs, ainsi qu'il a été dit. La quantité cherchée est donc un rectangle [2] (formé) de trois côtés dont l'un est le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, l'autre deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend, et le dernier la moitié du nombre des nombres pairs pris sui-
F. 20, r°. vant l'ordre. Or, par quelque de ces (trois côtés) | que vous commenciez, c'est permis. Multipliez donc, par exemple le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par la moitié du nombre des nombres pairs; et que ce qui résulte soit multiplié par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend [3]. Mais le troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend dépasse celui jusqu'auquel (la suite) s'étend constamment de deux. Lors donc que nous multiplions ce nombre par la moitié du nombre (des nombres pairs), c'est comme si nous avions additionné les deux termes extrêmes et que nous eussions multiplié la somme par la moitié du nombre (des nombres pairs).

---

[1] $$(2n+2)\cdot\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n}{2}=(2n+2)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)\cdot\frac{2n}{4}.$$

[2] *Sic.* On se serait attendu à ce que l'auteur dît : « un solide ».

[3] $$(2n+2)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)\cdot\frac{2n}{4}=(2n+2)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}(2n+1).$$

Mais il a été déjà expliqué que le résultat de la multiplication de la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des nombres) est la somme de ces nombres. D'après cela le résultat de la multiplication du troisième (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend par la moitié du nombre (des nombres) sera la somme des nombres pairs suivant l'ordre. On est donc ramené à la multiplication de cette somme par deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend [1]. Mais deux tiers du second (nombre) à partir de celui jusqu'auquel (la suite) s'étend sont deux tiers (du nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité, attendu que les nombres (naturels) suivant leur ordre se dépassent mutuellement d'une unité, et que, par conséquent, leurs parties se dépassent mutuellement des parties (correspondantes) de l'(unité), ce qui est évident. L'opération revient donc à la multiplication de deux tiers du nombre jusqu'auquel (la suite) s'étend plus deux tiers de l'unité par la somme (des nombres pairs simples) [2], ainsi qu'il a été mentionné. Dieu seul connaît la vérité.

L'auteur dit : *Et l'élévation au cube (se fait) par la multiplication de la somme (des nombres pairs simples) par son double* [3]. F. 20, r°. lig. 9.

Pour la démonstration de ce (théorème) établissons préalablement deux propositions.

L'une d'elles c'est que la somme des nombres (naturels) depuis l'unité, suivant leur ordre, est la moitié de la somme des nombres pairs pris à partir du deux suivant leur ordre, et égaux en nombre aux (nombres naturels) [4]. Soient, par exemple, quatre nombres (naturels) suivant l'ordre, dont le premier soit l'unité et le dernier quatre; leur somme sera dix. Et soient quatre autres nombres pairs, dont le premier soit deux et le dernier huit; leur somme sera vingt. Or, chacun

---

[1] $(2n+2)\cdot\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{3}(2n+1)=(2+4+6+\ldots+2n)\cdot\frac{2}{3}(2n+1).$

[2] $(2+4+6+\ldots+2n)\cdot\frac{2}{3}(2n+1)=\left[\frac{2}{3}(2n)+\frac{2}{3}\right]\cdot(2+4+6+\ldots+2n).$

[3] $2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3=2(2+4+6+\ldots+2n)^2.$

[4] $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}(2+4+6+\ldots+2n).$

des nombres pairs étant le double de celui qui lui correspond parmi les nombres (naturels, pris) suivant leur ordre, un des nombres (naturels) est au (nombre pair) correspondant comme la somme des uns à la somme des autres suivant l'ordre. Cela est évident, en vertu de ce qui a été établi précédemment.

La seconde (proposition), c'est que le cube d'un nombre quelconque est égal à huit fois le cube de la moitié de ce même nombre [1].

Exemple. Soit A un nombre donné [2]; qu'il soit divisé en deux parties égales, que l'une des deux parties soit B, et qu'il s'agisse d'élever A au carré, c'est-à-dire de le multiplier par lui-même. Or, par sa division, chacun des deux facteurs a été partagé en deux segments, et tous ces segments sont égaux entre eux et égaux à la quantité B. Par conséquent la multiplication de A tout entier par lui-même est égale à la multiplication de chaque segment de l'un des deux facteurs par les deux segments de l'autre, accompagnée de l'addition des quatre résultats qui sont tous des carrés égaux, et dont chacun est égal au carré de B. Mais ces quatre carrés forment le carré de A; d'où il suit que le carré d'un nombre quelconque est égal à quatre fois le carré de sa moitié. En même temps il est connu que le cube d'un nombre quelconque est ce qui résulte de la multiplication de ce nombre par son carré. Mais la multiplication de A tout entier par son carré tout entier, est égale à la multiplication de chacune de ses deux moitiés par les quatre parties de son carré; et de la multiplication d'une de ses moitiés par les quatre parties de son carré, dont chacune est égale au carré de B, il résulte quatre cubes; de sorte que l'ensemble de ces cubes est égal à huit fois le cube de la moitié de (A), et que chacun de ces cubes est égal au huitième du cube de ce nombre (A). Par conséquent le cube de la moitié d'un nombre quelconque est égal au huitième du

[1] $$a^3 = 8 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3.$$

[2] Dans ce qui suit le texte du manuscrit arabe présente un certain nombre d'erreurs, qui proviennent évidemment de ce que le copiste ne comprenait pas bien ce qu'il écrivait. Mais il est trop facile de reconnaître ces méprises et de les corriger, pour qu'il vaille la peine de les signaler et de les relever une à une.

cube de ce nombre. C'est ce que nous nous étions proposé d'établir préalablement.

D'après cela, si nous voulons additionner les cubes des nombres pairs suivant l'ordre, et dont le premier soit deux, et si nous considérons ces nombres pairs comme s'ils étaient des nombres (naturels) suivant l'ordre, et dont le premier soit l'unité; alors la somme des cubes de ces derniers sera un huitième (de la somme) des cubes qu'il s'agit de trouver. Mais il a été expliqué, dans ce qui précède sur la sommation des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, que, si l'on multiplie la somme de ces nombres par elle-même, il résulte la quantité cherchée. Donc vous multiplierez la somme des nombres (naturels) suivant leur ordre par elle-même et le résultat par huit, afin qu'il résulte la quantité (actuellement) cherchée. Mais le produit d'un nombre par lui-même et du résultat par huit est égal au produit du même nombre par son double et du résultat par quatre, ou égal au produit du double de ce même nombre par lui-même et du résultat | par deux. F. 20, v°. En même temps il a été déjà expliqué que la somme des nombres pairs à partir du deux suivant l'ordre est le double de la somme des nombres (naturels correspondants) à partir de l'unité suivant l'ordre. En outre le produit de la somme des nombres pairs par elle-même et du résultat par deux est égal au produit du même nombre par son double. Par conséquent le résultat de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double est la somme de leurs cubes, et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Ayant ainsi expliqué la raison de la sommation des cubes des nombres pairs, mentionnons maintenant l'explication de la raison de la sommation des cubes des nombres impairs.

Cela s'expliquera au moyen de ce qui précède, quand nous aurons établi encore deux autres principes, dont l'un est que le produit du plus grand de deux nombres différents quelconques par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme plus le produit du même par leur différence; et que le produit du plus petit par son double est égal au produit de ce (nombre) par leur somme moins son produit par leur différence [1]. Car il est évident que le plus grand des deux nom-

---

[1] $a.2a = a(a+b) + a(a-b)$, $b.2b = b(a+b) - b(a-b)$.

bres est exactement égal au plus petit plus leur différence, et que le plus petit des deux nombres est égal au plus grand moins leur différence. Il suit donc nécessairement que le double du plus grand est égal à leur somme plus leur différence, et que le double du plus petit est égal à leur somme moins leur différence.

Le second (principe) est que, si, dans (une suite) de nombres (naturels) quelconques (pris) suivant l'ordre à partir de l'unité, le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, la somme des nombres pairs compris dans (cette suite) dépasse la somme des nombres impairs y compris de la quantité du nombre des impairs; et si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, la somme des nombres pairs est inférieure à la somme des nombres impairs de la quantité des nombres des impairs.

En effet, si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, le nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres égaux dont l'un est le nombre des nombres pairs compris dans (la suite) et l'autre celui des nombres impairs y compris. Mais le premier des nombres pairs, à savoir deux, dépasse le premier des nombres impairs d'une unité; et pareillement le second (nombre pair), à savoir quatre, dépasse le second des nombres impairs d'une unité; et ainsi de suite jusqu'au dernier. La somme des nombres pairs dépasse donc la somme des nombres impairs d'une quantité égale à leur nombre. Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le nombre des nombres (naturels) suivant leur ordre se partage en deux nombres différents dont l'un, qui est le nombre des nombres impairs, dépasse l'autre d'une unité. Mais le premier des nombres impairs, à savoir l'unité, n'est précédé de rien; le second des nombres impairs dépasse le premier des nombres pairs de l'unité; et ainsi de suite jusqu'à ce que le dernier des nombres impairs, à savoir (le nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, dépasse le dernier des nombres pairs d'une unité. La somme des nombres impairs dépasse donc la somme des nombres pairs d'une quantité égale au nombre des nombres impairs.

Ceci étant établi, nous disons qu'il est évident que, si de la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre, pris à partir de l'unité, on retranche la somme des cubes des nombres pairs y compris, il reste la somme des cubes des nombres impairs y compris. Or, il a été déjà expliqué que la somme des cubes des nombres (naturels) suivant leur ordre résulte de l'élévation au carré de la somme de ces nombres [1]. Mais la somme de ces nombres est composée de deux sommes, c'est-à-dire de la somme des nombres pairs et de la somme des nombres impairs. Par conséquent son carré s'obtient par la multiplication de chacune des deux sommes par leur somme. Maintenant, si la somme des cubes des nombres pairs résultait de la multiplication de la somme des nombres pairs par la somme des deux sommes, la somme des cubes des nombres impairs résulterait nécessairement de la multiplication de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes. Mais il a été expliqué que la somme des cubes des nombres

---

[1] Pour faire mieux voir la suite et l'enchaînement des raisonnements qui forment la démonstration d'Ibn Almadjdî, désignons par S_n la somme d'une suite de nombres naturels, par S_i la somme et par ν_i le nombre des nombres impairs compris dans la suite, par S_p la somme des nombres pairs compris dans la suite, de sorte que $S_i + S_p = S_n$; désignons en outre par $S_{c,n}$ la somme des cubes des mêmes nombres naturels, par $S_{c,i}$ la somme des cubes des mêmes nombres impairs, et par $S_{c,p}$ la somme des cubes des mêmes nombres pairs, de sorte que $S_{c,i} + S_{c,p} = S_{c,n}$.

Cela posé, soit premièrement le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_p > S_i$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = (S_p + S_i)^2 = S_p(S_p + S_i) + S_i(S_p + S_i),$$
$$S_{c,p} = S_p \cdot 2S_p = S_p(S_p + S_i) + S_p(S_p - S_i);$$

donc

$$\begin{aligned} S_{c,i} &= S_{c,n} - S_{c,p} = S_i(S_p + S_i) - S_p(S_p - S_i) \\ &= S_i(S_p + S_i) - S_i(S_p - S_i) - (S_p - S_i)^2 \\ &= S_i \cdot 2S_i - (S_p - S_i)^2 = S_i \cdot 2S_i - \nu_i^2 = S_i \cdot 2S_i - S_i \\ &= S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

Secondement, soit le dernier terme de la suite un nombre pair, de sorte que $S_i > S_p$, l'on aura

$$S_{c,n} = S_n^2 = S_p(S_i + S_p) + S_i(S_i + S_p),$$
$$S_{c,p} = S_p \cdot 2S_p = S_p(S_i + S_p) - S_p(S_i - S_p),$$
$$\begin{aligned} S_{c,i} &= S_i(S_i + S_p) + S_p(S_i - S_p) = S_i \cdot 2S_i - S_i(S_i - S_p) + S_p(S_i - S_p) \\ &= S_i \cdot 2S_i - S_p(S_i - S_p) - (S_i - S_p)^2 + S_p(S_i - S_p) \\ &= S_i \cdot 2S_i - (S_i - S_p)^2 = S_i \cdot 2S_i - S_i = S_i(2S_i - 1). \end{aligned}$$

pairs résulte de la multiplication de la somme des nombres pairs par son double. En outre si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est pair, il est évident que le produit de la somme des nombres pairs, qui est le plus grand des deux nombres, par son double est égal à son produit par la somme des deux sommes plus son produit par leur différence. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins le produit de la somme des nombres pairs, par leur différence. En même temps il a été expliqué que le plus grand de deux nombres se divise dans le plus petit et la différence. Le produit de la différence par le plus grand est donc égal à son produit par le plus petit plus son produit par elle-même, c'est-à-dire plus son carré. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes moins son produit par leur différence et moins le carré de la différence. Mais il a été expliqué que le produit du plus petit de deux nombres par leur somme moins son produit par leur différence est exactement égal à son produit par son double. D'après cela la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double moins le carré de la différence. Mais il a déjà été expliqué que la différence est égale au nombre des nombres impairs; et il a été expliqué en même temps, dans ce qui précède, que la somme des nombres impairs résulte de l'élévation au carré de leur
F. 21, r°. nombre. | Il suit donc nécessairement que le carré de la différence est la somme des nombres impairs. Mais le produit de la somme des nombres impairs par son double, si l'on retranche ensuite du résultat la somme des nombres impairs, est exactement égal au produit de la somme des nombres impairs par son double moins un, attendu que le principe de la multiplication consiste à prendre l'un des deux nombres autant de fois qu'il est contenu d'unités dans l'autre.

Si le (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend est impair, le plus petit des deux nombres est la somme des nombres pairs et le plus grand la somme des nombres impairs, ainsi qu'il a été expliqué; et le produit du plus petit des deux nombres par son double est égal à son produit par la somme des deux nombres moins son produit par leur différence. Par suite de cela la somme des cubes des nombres impairs résulte alors du produit de la somme des nombres impairs par la somme des deux sommes plus le produit de la somme des nombres pairs par leur différence, ce qui est le produit du plus grand des deux nombres par leur somme plus le produit du plus petit par leur différence. Or, il a été déjà expliqué que le produit du plus grand de deux nombres par son double est égal à son produit par leur somme plus son produit par leur différence. Mais il a été déjà expliqué (en outre), que le produit du plus grand par la différence est égal au produit du plus petit par la différence plus le carré de la différence. D'après cela le produit du plus grand par son double est égal à son produit par leur somme plus le produit du plus petit par la différence et plus le carré de la différence. En même temps il a été expliqué que la somme des cubes des nombres impairs résulte du produit du plus grand par la somme plus le produit du plus petit par la différence. Il s'ensuit donc nécessairement que le produit de la somme des nombres impairs par son double dépasse la somme de leurs cubes du carré de la différence. Mais il a été expliqué que le carré de la différence est exactement égal à la somme des nombres impairs. Par conséquent il résulte du produit de la somme des nombres impairs par son double diminué constamment de l'unité, la somme de leurs cubes. Et c'est ce que nous nous étions proposé de démontrer.

Il a dit [1] : Lorsque le commencement se fait à partir (d'un nombre) différent de l'unité, vous déterminerez le nombre des nombres, ainsi qu'il a été exposé précédemment, puis la somme ou (le résultat de) l'addition à partir de l'unité jusqu'au (nombre) jusqu'auquel (la suite) s'étend, et ensuite à partir de l'unité jusqu'au nombre qui précède le commencement, et vous retrancherez le plus petit du plus grand. Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité. On opère d'après cette seconde manière dans la sommation des carrés et des cubes se suivant d'après l'ordre à partir (d'un nombre) différent de l'unité. Sachez-le donc. F. 21, r°, lig. 13.

---

[1] Ces mots indiquent que ce qui suit est extrait du « Soulèvement du Rideau » d'Ibn Albannâ, ainsi qu'Ibn Almadjdî en a prévenu le lecteur dans sa préface. *Voir* ci-dessus, p. 88, lig. 13 à 15.

Attendu que les méthodes produites et mentionnées (dans ce qui précède) pour l'addition des nombres (naturels) suivant leur ordre, et pareillement des nombres impairs et des nombres pairs, sont fondées sur la condition de commencer par l'unité dans les deux premiers cas, et par le deux dans le troisième, ainsi qu'il a été dit dans ce qui précède, elles ne s'appliquent pas aux cas où le commencement se fait à partir (d'un nombre) différent de celui exigé par ladite condition. A cause de cela on opère alors d'après la méthode ordinaire, à savoir celle qui a été déjà expliquée à l'occasion de la neuvième des questions composées, c'est-à-dire du cas où l'on ignore le nombre (des termes de la suite) en même temps que la somme. Cette méthode consiste, pour trouver le nombre (des termes), en ce que vous divisez la différence des deux termes extrêmes par la quantité dont (les termes) se dépassent mutuellement, d'où il résultera le nombre (des termes) moins un. Ensuite vous multiplierez la somme des deux termes extrêmes par la moitié du nombre (des termes) d'où il résultera la somme. Ou bien (on opère alors) d'après la seconde manière, ainsi qu'il vient d'être dit : parce que, si quelqu'un dit : additionnez les nombres impairs suivant leur ordre, par exemple depuis sept jusqu'à quinze, c'est comme s'il avait dit : additionnez les nombres impairs suivant leur ordre depuis l'unité jusqu'à quinze moins la somme des nombres impairs depuis l'unité jusqu'à six. Par là est expliqué aussi le reste des cas, parce que le principe est le même.

On comprend, d'après ce qui précède, que la première manière est plus particulière que la seconde, attendu qu'elle a pour condition l'existence de la proportion arithmétique, de sorte qu'elle ne comprend pas les (cas des) carrés et des cubes.

La phrase de l'auteur : « Le deux tient, pour les nombres pairs, la place de l'unité », signifie que, si les nombres pairs (pris) suivant leur ordre, et leurs carrés et leurs cubes, commencent par le deux, on opère d'après la méthode particulière précédemment mentionnée; que si (la suite ne commence) pas (par le deux), on opère d'après les deux manières qui viennent d'être mentionnées, pourvu que la chose demandée soit seulement d'additionner les nombres pairs (simples); sinon, on emploie, pour leurs carrés et leurs cubes, la seconde manière exclusivement.

Quant à la manière de trouver les côtés rationnels des cubes, et les côtés d'autres (puissances) et à ce qui s'y rattache, nous mentionnerons cela certainement dans le chapitre des racines, si Dieu, le Très-Haut, le permet. F. 21, r°. lig. 29.

Il a dit : L'exposé (des propriétés) des carrés est fondé sur (celles) des triangles, et pareillement (la théorie) des pentagones et des autres nombres figurés. Expliquons donc cela, et expliquons la manière de les trouver, ainsi que l'opération (dont on se sert) dans ce (but) et dans leur addition. | Tout cela est compris dans l'opération mentionnée F. 21, v°. dans le Traité. Je dis donc que les Arithméticiens placent les nombres suivant leur ordre dans une ligne, et les appellent « côtés », en les assimilant aux lignes; qu'ils considèrent l'unité comme contenant virtuellement toutes les figures, de sorte qu'elle est côté, triangle, carré, et chacune des autres figures virtuellement; qu'ils additionnent l'unité, comme triangle, au deux comme côté, d'où résulte le second triangle, et qu'ils additionnent ensuite celui-ci au trois, comme côté, d'où résulte le troisième triangle, etc.

... [1] Puisque donc nous avons obtenu comme résultat ces quantités composées, multiplions le cubo-cube par un. Il en résultera (le cubo-cube) lui-même, et nous le posons dans une première ligne. Ensuite nous multiplions le quadrato-cube par dix, et nous posons le résultat dans une seconde ligne. Après cela nous multiplions le côté, c'est-à-dire le seize, par le coefficient des cubes, et nous posons cela dans une troisième ligne. Enfin nous plaçons le coefficient du carré dans une quatrième ligne. Nous additionnons les quatre lignes, d'où il provient ce qui se trouve au-dessus du trait, et cela est le résultat du premier membre de l'équation.

---

[1] Pour l'intelligence de ce qui suit je ferai observer qu'il s'agit ici de vérifier l'équation

$$x^8+10x^7+648000x^3+18662400x^2=461x^6+5400x^5+15480x^4,$$

et que l'on a

$$\begin{aligned} x &= 16, & x^4 &= 65536,\\ x^2 &= 256, & x^5 &= 1048576,\\ x^3 &= 4096, & x^6 &= 16777216, \end{aligned}$$

Ensuite nous multiplions le carré-carré par le coefficient du cubo-
F. 203, v°. cube, et nous posons cela dans une première ligne. | Nous multiplions le cube par le coefficient du quadrato-cube et nous posons cela dans une seconde ligne. Puis nous multiplions le carré par le coefficient du carré-carré, et nous posons cela dans une troisième ligne. Nous additionnons ces trois lignes, et il résulte ce qui se trouve au-dessus du trait. Cela est le résultat du second membre de l'équation, et est conforme au premier

		56293376
Le premier résultat.	Premier....	16777216
	Second....	10485760
	Troisième...	10368000
	Quatrième..	18662400

		56293376
Le second résultat.	Premier....	30212096
	Second.....	22118400
	Troisième...	03962880

Il est évident par là que la différence entre les deux parties est deux carrés moins dix, et non dix moins deux carrés, si par hasard vous aviez d'abord supposé cette différence égale à dix moins deux carrés.

Vous êtes arrivé, dans cet exemple, à ce qui a été expliqué précédemment, à savoir que l'on ne doit pas affirmer qu'une solution ne peut pas être juste, à moins d'avoir passé, pour les deux résultats opposés qui résultent de l'augmentation après la diminution, d'un nombre au nombre immédiatement suivant. Alors la justesse sera déterminée dans cette dernière forme. Conduisez donc l'opération dans ce cas conformément à ses conditions, et vous opérerez juste, si Dieu, le Très-Haut, le permet.

J'ai proposé tous les problèmes de cette section comme des (cas particuliers) dérivés d'un seul (problème) fondamental, afin de rendre évident par là que de tous les problèmes précédemment mentionnés il peut être déduit une infinité (de cas particuliers).

Que ceci soit la fin de ce que nous avons présenté dans cette composition bénie. Dieu seul connaît la vérité.

L'achèvement de cet (ouvrage) eut lieu à l'aube du jour béni de mercredi, le sixième (jour) du mois sacré de Dzoûl-hidjdjah de l'année huit cent trente-quatre [1], par la main de celui qui a besoin du Dieu Très-Haut, qui l'a écrit et composé, Ahmed Ibn Almadjdî le châféite, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, et à tous les musulmans, amen, amen. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur la plus noble de ses créatures, Mohammed, et sur sa famille.

Ceci est la fin de ce que j'ai trouvé dans l'exemplaire de mon Seigneur, qui fut écrit de sa main, puisse Dieu le Très-Haut prolonger sa vie; sur lequel (exemplaire) j'ai copié le présent exemplaire. L'achèvement de la copie du présent exemplaire eut lieu vers midi, le lundi, dix-septième (jour) du mois de Rabia second de l'année huit cent quarante [2]. Et cette copie fut faite pour son propre usage, et pour l'usage de qui il plaira à Dieu après lui, par l'esclave qui a besoin de la miséricorde de son maître le riche et l'éternel, Aboûl Baraqât Mohammed Ben Mohammed Ben Mohammed Al'irâkî, puisse Dieu pardonner à lui, à ses père et mère, aux docteurs (qui l'ont instruit), et à chacun de tous les musulmans, amen. Que la bénédiction et le salut de Dieu soient sur notre seigneur Mohammed, sa famille et ses compagnons. Dieu nous suffit, c'est le meilleur des protecteurs.

---

[1] Cette date correspond au mercredi 15 août 1431 de J.-C.

[2] Le catalogue des manuscrits orientaux du *British Museum* donne ici, comme date du mois, dans le texte qu'il reproduit, le vingt-septième, et dans la traduction latine dont il accompagne ce texte, le vingt-sixième. L'un et l'autre est erroné. Le manuscrit porte en réalité le dix-septième; et ce qui prouve en outre que cette leçon est la bonne, c'est que le jour dont il s'agit doit être un lundi (*feria secunda*), ce qui a lieu en effet pour le 17 Rabîa II de l'année 840 de l'hégire qui correspond au lundi 29 octobre 1436 de Jésus-Christ, tandis que le 27 Rabîa II de l'année 840 de l'hégire est un jeudi.

Manuscrit coté CCCCXIX *des manuscrits orientaux du* British Museum (**7470** *des manuscrits additionnels*).

Volume in-4 de 114 feuillets en papier, dont les deux premiers et les deux derniers sont des feuillets de garde non numérotés. Les 110 autres feuillets sont numérotés aux rectos avec les numéros 1 à 110 écrits au crayon en chiffre moderne, et aux versos avec les numéros 1 à 100 et 1 à 10 écrits à l'encre en chiffres arabes orientaux.

Ce manuscrit est occupé depuis lig. 1 du verso du feuillet numéroté 3, jusqu'à lig. 11 du recto du feuillet numéroté 110, par la copie d'un Traité intitulé « la Clef du calcul » par Djamchid Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth (Eddin) Alqâchânî. La copie est datée du lundi, (2?) Chawwâl de l'année 997 de l'hégire, ou (probablement) 14 août [1] 1589 de J.-C.

Le verso du feuillet numéroté 1, et le recto et verso du feuillet numéroté 2, sont occupés par un premier projet de la préface qui se distingue de la rédaction qui occupe le verso du feuillet numéroté 3, particulièrement en ceci qu'il renferme une dédicace adressée au célèbre sultan de Samarkand, Ouloug Beh Goûrgân, et une table très-étendue des contenus des chapitres de l'ouvrage entier.

L'auteur fut un des astronomes qui prirent part à la rédaction des tables d'Ouloug Beg, mais mourut avant l'achèvement de cette œuvre. Comparer *Thomas Hyde,* Tabulæ long. ac lat. stellarum fixarum, ex observatione Ulugh Beighi; Oxonii, 1665, in-4, douzième page (non numérotée) de la « Præfatio ad lectorem », lignes 3 à 4 et 18 à 21. La préface de « la Clef du calcul » dont je fais suivre ici la traduction, contient des indications nombreuses et intéressantes sur les autres ouvrages de Djamchîd Ben Mas'oûd.

Les numéros des feuillets marqués en marge des pages 112 à 116 de la traduction ci-après se rapportent à la numération écrite au crayon et mentionnée ci-dessus.

F. 3, v°, Au nom de Dieu clément et miséricordieux. Louange à Dieu qui est unique pour la création des unités, et qui est seul cause de la composition des nombres [2]. Que sa bénédiction soit sur la meilleure de ses créatures, Mohammed, le plus puissant des intercesseurs au jour terrible de la résurrection, sur sa famille, et sur ses enfants qui guident dans les chemins du salut et de la bonne direction.

Pour en venir au fait. Celui qui, parmi les créatures de Dieu, le Très-Haut, a le plus besoin de son pardon, Dyamchîd Ben Mas'oûd Ben Mahmoûd, le médecin, surnommé Ghiyâth Alqâchânî, que Dieu fasse prospérer sa situation, dit :

---

[1] Le mois de Chawwâl de l'année 997 de l'hégire comprend quatre lundis qui correspondent respectivement aux 14, 21, 28 août et 4 septembre de l'année 1589 de Jésus-Christ. La date numérique du jour du mois manque dans le manuscrit.

[2] Dieu est le représentant par excellence de l'unité, et l'unité est, par le moyen de la composition, le principe de la formation des nombres, « fons et origo numerorum ».

J'ai fait des opérations du calcul et des règles géométriques l'objet d'une étude approfondie, de sorte que j'en ai saisi les vrais procédés et que je suis parvenu au plus haut point dans leurs finesses. J'en ai éclairci les parties obscures et difficiles, et j'en ai résolu les questions douteuses et compliquées. J'ai découvert des règles et des théorèmes nombreux concernant ces sciences, et j'ai obtenu la solution de problèmes qui avaient paru tellement ardus à beaucoup d'autres savants, qu'ils avaient renoncé à s'en occuper. C'est ainsi que j'ai refait le calcul de toutes les colonnes des tables Ilkhâniennes [1] d'après les méthodes les plus exactes, et que j'ai composé les tables appelées Khâkâniennes en vue de compléter les tables Ilkhâniennes [2]. J'y ai réuni tout ce que j'ai inventé en fait d'opérations astronomiques, et qui ne se trouvait point dans d'autres tables, en y ajoutant des démonstrations géométriques. J'ai composé aussi les Tables servant à faciliter les opérations, et divers autres tableaux.

J'ai composé, en outre, des Mémoires (tels que le Mémoire intitulé) le Parfait, sur les [3] doutes qui se sont présentés aux anciens au sujet des distances et des volumes; le Mémoire (intitulé) le Contenant, sur le rapport du diamètre à la circonférence, et le Mémoire (intitulé) la Corde et le Sinus, sur la manière de déterminer ces deux (lignes) pour le tiers d'un arc dont on connaît la corde et le sinus. Ce dernier (problème) est encore un de ceux qui ont offert des difficultés aux anciens, ainsi que l'a dit l'auteur de l'Almageste en s'exprimant à ce sujet en des termes qui signifient ce qui suit. Il n'existe pas de méthode en aucune façon, pour connaître linéairement la corde du tiers d'un arc dont on connaît la corde. Or, puisqu'il en est ainsi, nous avons ima-

---

[1] Les tables Ilkhâniennes furent composées par le célèbre astronome Nacîr Eddîn Althoûcî (né en 1201 et mort en 1274 de Jésus-Christ) en honneur du Khân mongol Houlagou, qui mit fin au khalifat de Bagdâd par la conquête de cette ville en 1258 de Jésus-Christ, et qui fit construire pour Nacîr Eddîn l'observatoire de Merâghah.

[2] Ces mots à partir de « appelées » sont laissés en blanc dans le texte manuscrit. Je les ai rétablis au moyen du passage correspondant, fol. 1, verso du manuscrit dans le premier projet de la préface.

[3] Au lieu des mots « le Parfait, sur les », le passage correspondant du fol. 1, verso, porte : « par exemple le mémoire intitulé *l'Échelle du ciel*, sur la solution des ».

giné un artifice pour trouver la corde d'un degré avec une approximation très-exacte [1]. Et pareillement il a dit auparavant, au sujet de la manière de trouver la corde d'un demi-degré, qu'il n'existe pas de méthode pour la déterminer (d'une manière absolue).

J'ai aussi inventé l'instrument appelé le Disque des zones, et j'ai écrit sur la manière de le construire et d'(en) connaître (l'usage) un Mémoire intitulé les Délices des jardins. C'est un instrument qui sert à déterminer les longitudes vraies des planètes, leurs latitudes, leurs distances de la terre, leurs rétrogradations, les occultations et les éclipses, et tout ce qui s'y rattache.

J'ai trouvé des réponses à des questions nombreuses que m'avaient proposées les plus distingués des calculateurs, soit pour me mettre à l'épreuve, soit pour s'instruire; et quoique ces questions n'aient pas été toutes réductibles aux six cas algébriques [2], je suis parvenu, à l'occasion de ces opérations, à des théorèmes nombreux, à l'aide desquels les opérations du calcul peuvent être traitées de la manière la plus aisée, d'après la méthode la plus facile, avec le moindre travail, avec la plus grande utilité, et en présentant l'exposé le plus clair.

J'ai donc jugé convenable de les rassembler dans un recueil, et j'ai formé l'intention de les développer avec clarté, de manière que ce soit un manuel pour les amateurs, et un moyen d'augmenter encore la perspicacité des personnes douées d'intelligence.

F. 76, r°. *Exemple.* — Nous désirons (connaître) la somme des résultats des produits (formés) pour chacun des nombres jusqu'à six, (en multipliant d'abord chaque nombre) par le (nombre) suivant, puis le résultat par le (nombre) suivant. Nous additionnons (les nombres) depuis l'unité jusqu'au cinq. Ce sera quinze. Nous multiplions cela par qua-

---

[1] Comparer : Composition mathématique de Claude Ptolémée, traduite, etc., par M. Halma, t. I; Paris, 1813, in-4, p. 34, lig. 5 et suivantes du texte grec. Il me semble qu'en cet endroit la traduction française ne serre pas d'assez près les expressions de l'original.

[2] C'est-à-dire à des équations du premier ou du second degré. Les six cas dont il s'agit sont représentés par les équations

$$x = a,\quad x^2 = ax,\quad x^2 = a,\quad x^2 + ax = b,\quad x^2 + a = bx,\quad x^2 = ax + b.$$

torze. Il résulte deux cent dix, ce qui est la quantité cherchée [1].

Douzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à combien nous en voulons, nous additionnons une unité au double du dernier nombre et nous multiplions un tiers de la somme par la somme desdits nombres [2].

Exemple. — Nous désirons additionner les carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous ajoutons au double de ce (dernier nombre) une unité. Il résulte treize, ce dont le tiers est quatre et un tiers. Nous multiplions cela par la somme desdits nombres, laquelle est vingt et un. Il résulte quatre-vingt-onze.

Treizième règle. — Si nous désirons additionner les cubes des (nombres) suivant l'ordre depuis l'unité (jusqu'à) combien nous en voulons, nous multiplions la somme de ces nombres par elle-même; il résultera la quantité cherchée [3].

Exemple. — Nous désirons (connaître) la somme des cubes des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous additionnons ces nombres. Ce sera vingt et un. Nous multiplions cela par lui-même. Il résulte quatre cent quarante et un, ce qui est la quantité cherchée.

Quatorzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième [4] du reste. Nous l'ajoutons à la somme

---

[1] $$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+(n-2)(n-1)n \\ =[1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)].\\ [1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)-1].$$

[2] $$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{2n+1}{3}(1+2+3+\ldots+n).$$

[3] $$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2.$$

[4] Le texte manuscrit porte ici « un tiers ». Mais l'exemple qui suit prouve que ce n'est qu'une erreur de copiste.

desdits nombres, et nous multiplions ce qui en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quantité cherchée [1].

Exemple. — Nous désirons additionner les carré-carrés des nombres suivant l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité; il reste vingt. Nous en prenons le cinquième, ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un; il provient vingt-cinq. Nous multiplions
F. 76, v°. cela | par quatre-vingt-onze, ce qui est la somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante-quinze.

Quinzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des puissances suivant l'ordre pour un nombre quelconque à partir de la première puissance, ce qui fait encore partie de ce que nous avons découvert [2], nous retranchons de la dernière puissance constamment une unité, et nous multiplions le reste par la première puissance. Nous divisons (ensuite) le résultat par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. Ce qui résulte est ce que nous avions désiré.

Autre manière. — Nous retranchons de la dernière puissance la première puissance, et nous divisons ce qui reste par un nombre moindre d'une unité que la première puissance. A ce qui en résulte nous ajoutons la dernière puissance, afin qu'il résulte la quantité cherchée [3].

Exemple de la première manière. — Etc.

---

[1] $$1^4+2^4+3^4+\dots+n^4=\left\{\frac{1}{5}[1+2+3+\dots+(n-1)+n-1]+[1+2+3+\dots+n]\right\}\cdot(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=\frac{1}{30}(6n^5+15n^4+10n^3-n).$$

[2] Le texte manuscrit fait suivre ici le passage que voici : « nous multiplions la » première puissance par la dernière puissance et nous retranchons une unité de la » première puissance; ce qui résulte est la quantité cherchée. *Exemple.* » Après ce dernier mot le texte continue avec « Nous retranchons, etc. » Il est évident que ce passage ne se trouve intercalé à cette place que par la méprise d'un copiste très-négligent. En général cette partie du manuscrit est copiée avec peu de soin.

[3] $$a+a^2+a^3+\dots+a^n=\frac{(a^n-1)a}{a-1}=\frac{a^n-a}{a-1}+a^n.$$