JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 73-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__73_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$;
PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$) par la forme à six variables

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

est facile maintenant. Et d'abord s'il s'agit d'un nombre pair, c'est-à-dire du cas de $\alpha > 0$, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne pourra avoir lieu qu'en prenant x pair. Soit donc $x = 2x_1$; en divisant par 2, nous la ramènerons à celle-ci

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2(x_1^2 + t^2 + u^2 + v^2),$$

qui a été traitée dans le cahier d'août 1864. D'après cela, si l'on désigne comme d'ordinaire par $\rho_2(m)$ la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$, on aura pour un entier impairement pair

$$\mathrm{N}(2m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m),$$

tandis que pour un entier pairement pair, c'est-à-dire pour $\alpha > 1$, la formule sera

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

2. Le cas d'un entier impair m se subdivise en deux autres, suivant que m est de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$.

Quand

$$m = 4g+3,$$

la fonction $\rho_2(m)$ suffit encore; car je trouve dans cette hypothèse

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Par exemple, on doit avoir

$$N(3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8;$$

or cela est vérifié par les identités

$$3 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

puisqu'elles fournissent pour l'entier 3 huit représentations.

De même l'équation

$$N(7 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 48$$

est vérifiée par l'identité

$$7 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on aura soin d'effectuer les permutations permises.

3. La formule du n° **2** reste exacte même pour un entier $m \equiv 1 \pmod{4}$, quand cet entier n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Sinon, il faut une autre formule. En effet, lorsque

$$m = 4g+1,$$

la valeur de

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

ne diffère pas de celle de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

qui a été donnée quelques pages plus haut. C'est ce que l'on prouve sans peine. Il faudra donc considérer dans toute sa généralité, comme à l'endroit que je cite, l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier i est supposé positif, tandis que l'entier s est indifférement positif, nul ou négatif. On comptera le nombre

$$\rho(m)$$

des solutions de cette équation et on calculera la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m).$$

4. La formule que je viens d'écrire pour le cas de

$$m = 4g + 1$$

se simplifie naturellement quand m n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Elle se réduit alors à

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m),$$

comme j'en ai averti d'avance. Ainsi, par exemple, ayant

$$\rho_2(21) = 384,$$

on en conclura qu'on a aussi

$$\mathrm{N}(21 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 384.$$

Mais quoiqu'on ait $\rho_2(1) = 1$, on n'a pas

$$\mathrm{N}(1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 1.$$

La vraie valeur est double; et c'est ce que dit la formule du n° **3**, eu égard à l'équation $1 = 1^2 + 4.0^2$. De même, pour trouver

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2),$$

il ne suffit pas de savoir que $\rho_2(5) = 26$; il faut, en outre, avoir égard aux deux équations

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

en vertu desquelles on a, pour $m = 5$,

$$\rho(m) = 2,$$

puis

$$\sum i^2 = 2.$$

De là

$$N(5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 20,$$

résultat exact, comme on peut s'en convaincre au moyen des deux identités

$$5 = (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$5 = (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités donne huit représentations de l'entier 5; la seconde en fournit douze, parce que l'on peut faire occuper à

$$4(\pm 1)^2$$

trois places distinctes. Or

$$8 + 12 = 20.$$

Ces exemples suffiront.