JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 71-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__71_0>

SUR LA FORME
$x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Étant donné un entier quelconque n, on demande une expression simple du nombre

$$N(n=x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2)$$

des représentations de n par la forme

$$x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2,$$

c'est-à-dire du nombre des solutions que l'équation

$$n=x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2$$

comporte en y prenant pour x, y, z, t, u, v des entiers indifféremment pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs. Cette question se rattache à celle dont nous avons parlé dans l'article précédent. Mettant donc n sous la forme $2^\alpha m$, m impair, $\alpha=0, 1, 2, 3,\ldots$, nous introduirons d'abord la fonction

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2,$$

ou

$$\rho_2(m),$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m=d\delta$. De plus, nous pourrons avoir à considérer les décompositions de m fournies par l'équation

$$m=i^2+4s^2,$$

i étant supposé entier positif, s positif, nul ou négatif; il faudra alors compter le nombre $\rho(m)$ de ces décompositions et calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Mais cela ne sera nécessaire que quand il s'agira de

$$N(4g+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2).$$

Dans les autres cas, la fonction $\rho_2(m)$ suffit.

2. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair m. Cet entier pourra être de la forme $4g+1$ ou de la forme $4g+3$. Or on a évidemment

$$N(4g+3 = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 0.$$

Supposons donc

$$m = 4g+1.$$

Alors on voit sans peine que la valeur de

$$N(m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2)$$

est double de celle de

$$N(m = x^2+4y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2).$$

Dans le cas de $m=4g+1$, on a donc

$$N(m=x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 2\rho_2(m)+4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Soit ensuite $\alpha=1$, en sorte qu'on ait à s'occuper d'un entier impairement pair $2m$. Ce cas est résolu par la formule très-simple

$$N(2m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Enfin, pour le cas d'un entier pairement pair, c'est-à-dire de $\alpha>1$, l'on a

$$N(2^\alpha m = x^2+y^2+4z^2+4t^2+4u^2+4v^2) = 4\left[4^{\alpha-1}-(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'ajouter des exemples.