JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 65-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__65_0>

SUR LA FORME
$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. La forme à six variables

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut représenter que des entiers pairement pairs ou des entiers impairs $\equiv 1 \pmod{4}$; mais pour chaque entier de l'une des deux espèces indiquées il y a des représentations dont on doit désirer de connaître le nombre. L'objet précis du présent article est de donner de ce nombre une expression commode.

Mais faisons d'abord observer que le cas d'un entier pairement pair n'offrait aucune difficulté. Soit

$$2^{\alpha+2}m$$

un tel nombre, m étant impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro. L'équation

$$2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2$$

ne peut avoir lieu qu'en prenant x pair. Remplaçons donc x par $2x_1$, et nous la ramènerons à celle-ci

$$2^{\alpha}m = x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

La valeur demandée de

$$\mathrm{N}(2^{\alpha+2}m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

est donc égale à celle de

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2)$$

qui a été donnée par Jacobi dans ses *Fundamenta nova*. Décomposons m, de toutes les manières possibles, en un produit $d\delta$ de deux facteurs conjugués, puis calculons la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

que nous représenterons suivant notre habitude par

$$\rho_2(m);$$

nous aurons, d'après ce qui précède,

$$N(2^{\alpha+2} m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$
$$= 4\left[4^{\alpha+1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

2. Mais qu'il s'agisse à présent d'un entier impair $m \equiv 1 \pmod{4}$. Il ne suffira plus d'introduire la fonction numérique $\rho_2(m)$ définie plus haut, à moins pourtant que le nombre m ne soit susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Dans le cas général on aura un certain nombre de fois

$$m = i^2 + 4s^2,$$

i étant un entier impair (que nous supposerons positif) et s un entier quelconque, positif, nul ou négatif. Il faudra, d'une part, compter de combien de manières on peut écrire ainsi

$$m = i^2 + 4s^2,$$

ce qu'on fera directement ou au moyen de la fonction $\rho(m)$ définie (sous la condition de $m = d\delta$) comme exprimant la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}};$$

on sait en effet que, i étant supposé positif,

$$N(m = i^2 + 4s^2) = \rho(m).$$

Puis, d'un autre côté, il faudra former la somme

$$\sum i^2$$

relative aux diverses valeurs de i. Alors on aura

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m).$$

Nous attachons à cette formule une certaine importance.

3. La formule

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m) + 2\sum i^2 - m\rho(m)$$

est évidemment exacte pour $m = 1$. Vérifions-la sur d'autres exemples.

Elle se simplifie quand m, quoique $\equiv 1 \pmod{4}$, n'est pas décomposable en une somme de deux carrés. On a alors tout simplement

$$N(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = \rho_2(m).$$

Soit, par exemple,

$$m = 21.$$

Puisque

$$\rho_2(21) = 21^2 - 7^2 - 3^2 + 1 = 384,$$

il faudra que

$$N(21 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 384.$$

On constatera qu'il en est ainsi au moyen des trois identités

$$\begin{aligned}
21 &= (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,\\
21 &= (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
21 &= (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2.
\end{aligned}$$

La première fournit immédiatement soixante-quatre représentations de l'entier 21 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

et chacune des deux autres en fournit cent soixante lorsqu'on y effectue les permutations convenables; or

$$64 + 160 + 160 = 384.$$

4. Considérons maintenant le cas particulier d'un nombre premier m, pour lequel l'équation

$$m = a^2 + 4b^2$$

ne pourra avoir lieu que d'une seule manière si les entiers a et b sont supposés positifs. En la comparant à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

on trouvera pour celle-ci deux systèmes de solutions

$$i = a, \quad s = b$$

et

$$i = a, \quad s = -b.$$

De là

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2a^2.$$

Ici, d'ailleurs,

$$\rho_2(m) = m^2 + 1.$$

Dans le cas particulier dont je m'occupe, on a donc

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = (m-1)^2 + 4a^2,$$

résultat assez curieux.

Ainsi on devra avoir

$$\mathrm{N}(5 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 20,$$

ce qui est confirmé par l'identité

$$5 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y opérant les permutations convenables.

Pour $m = 13$, d'où $a = 3$, notre formule donne ensuite

$$N(13 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 180.$$

Cela s'accorde avec les identités

$$13 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$13 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

Eu égard aux permutations permises, la première conduit à cent soixante représentations de l'entier 13, la seconde à vingt; et

$$160 + 20 = 180.$$

A $m = 17$ répond $a = 1$, d'où

$$N(17 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 260.$$

Cette fois, les identités à employer sont :

$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 2)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$17 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$17 = (\pm 3)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

En y effectuant les permutations voulues, nous en conclurons respectivement, pour l'entier 17, vingt, cent-soixante, enfin quatre-vingts représentations sous la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

Or

$$20 + 160 + 80 = 260.$$

La vérification cherchée a donc lieu comme toujours.

5. Un autre cas particulier intéressant est celui où l'on prend

$$m = q^2,$$

q étant un nombre premier de la forme $4g+3$. L'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

n'a alors qu'une solution, répondant à

$$i = q, \quad s = 0.$$

De là

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = q^2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(q^2) = q^4 - q^2 + 1.$$

Donc, pour tout nombre q premier et de la forme $4g+3$, on a

$$\mathrm{N}(q^2 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = q^4 + 1.$$

Soit, par exemple,

$$q = 3.$$

Notre formule donnera

$$\mathrm{N}(9 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 82,$$

résultat que confirment les identités

$$9 = (\pm 3)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$9 = (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités donne deux représentations de l'entier 9 par la forme

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2;$$

la seconde en donne quatre-vingts, en y effectuant les permutations convenables. Or

$$2 + 80 = 82.$$

En prenant $q = 7$, on doit avoir semblablement

$$\mathrm{N}(49 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 2402;$$

mais en voilà assez sur tous ces détails.