JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note au sujet de la forme $x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 49-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__49_0>

NOTE AU SUJET DE LA FORME

$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2,$$

où l'entier constant a est un nombre premier. Le théorème dont il s'agit consiste en ce que si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2,$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

2. Le cas de $a = 2$ n'offre aucune difficulté. Il répond à la forme

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

dont nous avons parlé ailleurs (Cahier de janvier 1862) de manière à n'avoir pas besoin d'y revenir ici.

Le cas de a premier $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$, c'est-à-dire non diviseur de $t^2 + 2u^2$, n'est pas moins facile. En effet l'équation

$$a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2$$

ne peut avoir lieu pour $\alpha > 0$, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, qu'avec des valeurs de x et de y multiples de a. Or, en faisant $x = ax'$, $y = ay'$, cette équation se réduit à celle-ci

$$a^{\alpha-1} q = z^2 + 2t^2 + ax'^2 + 2ay'^2,$$

qui est de même forme, mais où l'exposant de a dans le premier membre se trouve diminué d'une unité. En répétant l'opération tant que cet exposant n'est pas nul, on arrive à cette conclusion que la valeur de

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

ne diffère pas de celle de

$$\mathrm{N}(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

que nous supposons connue.

Désormais donc nous ne prendrons pour a qu'un nombre premier de l'une ou de l'autre des deux formes $8\mu + 1$, $8\mu + 3$. Comme α est la seule variable, nous poserons

$$\mathrm{N}\,(a^\alpha q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = \psi(\alpha),$$

et en particulier

$$\mathrm{N}(q = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = \psi(0).$$

La question sera de déterminer

$$\psi(\alpha),$$

connaissant

$$\psi(0).$$

Soit

$$q = 2^s m,$$

m étant un entier impair (naturellement non multiple de q) et l'exposant s pouvant se réduire à zéro. Nous supposerons d'abord

$$s = 0,$$

puis

$$s = 1,$$

enfin

$$s > 1,$$

ce qui nous conduira à trois formules distinctes.

3. Qu'il s'agisse d'abord d'un entier impair (ou du cas de $s = 0$), en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = \mathrm{N}(a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

m étant un entier impair, non divisible par le nombre premier a (que nous supposerons, comme on l'a vu, de l'une des deux formes $8\mu + 1$, $8\mu + 3$). Je trouve qu'il existe entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{8(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

où je représente à mon ordinaire par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de m. Cette relation n'est autre chose qu'une équation aux différences finies, très-facile à intégrer, et l'on en tire

$$(1)\quad \psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{a+1}\zeta_1(m)\right],$$

ce qui résout, pour le cas dont nous nous occupons, la question proposée. On pourra appliquer la formule (1) aux diverses valeurs

$$3,\ 11,\ 17,\ 19,\ldots,$$

que a peut prendre; en faisant en particulier $a = 3$, on retrouvera un résultat que nous avons déjà donné (dans le Cahier de septembre 1864) en nous occupant de la forme

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6t^2.$$

Pour

$$m = 1,$$

on a

$$\zeta_1(m) = 1$$

et

$$\psi(0) = 2,$$

quel que soit l'entier pris pour a dans la suite $3, 11, 17, 19,\ldots$. De là

$$\psi(\alpha) = \frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$\mathrm{N}(a^\alpha = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

s'exprime par

$$\frac{4(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 2}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

Par exemple,

$$\mathrm{N}(a = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 6;$$

la grandeur de a n'influe pas sur le second membre, et l'on voit aisément *à priori* qu'il en devait être ainsi. On a ensuite

$$N(a^2 = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 8a + 2.$$

Il serait aisé de continuer; mais je ne m'arrête pas à ces détails.

4. Qu'il s'agisse maintenant d'un entier impairement pair (ou du cas de $s = 1$), en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = N(2a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2).$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

sera cette fois

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{16(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

et l'on en conclura la formule suivante :

$$(2) \quad \psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{8}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Pour

$$m = 1,$$

par exemple, on a

$$\zeta_1(m) = 1$$

et

$$\psi(0) = 2,$$

partant

$$\psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 6}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$N(2a^\alpha = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

s'exprime donc par

$$\frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{2a - 6}{a + 1}(-1)^\alpha.$$

Ainsi on a en particulier

$$N(2a = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 14,$$

quel que soit l'entier a pris dans la suite 3, 11, 17, 19,.... Puis

$$N(2a^2 = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2) = 16a + 2,$$

et ainsi de suite.

5. Qu'il s'agisse enfin d'un entier pairement pair, en sorte que l'on ait

$$\psi(\alpha) = N(2^s a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2),$$

avec

$$s > 1.$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

sera dans cette hypothèse :

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{48(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

et l'on en tirera

$$(3)\quad \psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

La valeur de

$$N(2^s a^\alpha m = x^2 + 2y^2 + az^2 + 2at^2)$$

par

$$\frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

Je laisse au lecteur à vérifier ce résultat sur des exemples.