JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note au sujet de la forme $x^2 + y^2 + a\left(z^2 + t^2\right)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 43-48.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__43_0>

NOTE AU SUJET DE LA FORME
$x^2+y^2+a(z^2+t^2)$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Je veux communiquer dans cette Note un théorème au sujet de la forme

$$x^2+y^2+a(z^2+t^2),$$

où le coefficient constant a du second binôme est un nombre premier. Ce théorème consiste en ce que, si l'on s'est procuré par un moyen quelconque la valeur du nombre

$$N[q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)]$$

des représentations d'un entier q, non multiple de a, par la forme

$$x^2+y^2+a(z^2+t^2),$$

il sera toujours facile d'en conclure le nombre

$$N\left[a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)\right]$$

des représentations (par cette même forme) de l'entier

$$a^\alpha q,$$

qui résulte du produit de q et d'une puissance de a. Nous parlons ici du nombre total des représentations tant propres qu'impropres, en sorte que

$$N\left[a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)\right]$$

exprime le nombre des solutions que l'équation

$$a^\alpha q=x^2+y^2+a(z^2+t^2)$$

comporte quand on admet pour valeurs de x, y, z, t tous les entiers possibles, positifs, nuls ou négatifs, eussent-ils un diviseur commun > 1.

Le cas de $a = 2$ n'offre aucune difficulté; alors q est impair, et il s'agit de la valeur de

$$\mathrm{N}\left[2^\alpha q = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)\right],$$

laquelle est double de celle de

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)\right],$$

ou bien en est le sextuple, suivant que l'on a $\alpha = 1$, ou $\alpha > 1$.

Le cas de a premier $4\mu + 3$ est plus facile encore; la valeur de

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right]$$

est alors toujours égale à celle de

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right].$$

Reste le cas de a premier $4\mu + 1$; c'est celui-là seul que nous considérerons dans ce qui va suivre.

Comme α est ici la seule variable, nous poserons

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right] = \psi(\alpha),$$

et en particulier

$$\mathrm{N}\left[q = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right] = \psi(0).$$

La valeur de

$$\psi(0)$$

est donc supposée connue, et il s'agit d'en déduire celle de

$$\psi(\alpha).$$

Soit

$$q = 2^s m,$$

m étant un entier impair. On pourra avoir

$$s = 0,$$

ou bien

$$s > 0.$$

Plaçons-nous successivement dans ces deux conditions distinctes.

2. Lorsqu'on a $s = 0$, en sorte que q se réduit à un entier impair m (naturellement non divisible par a), je trouve entre les deux fonctions consécutives

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

la relation suivante

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{16(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m),$$

où je représente à mon ordinaire par

$$\zeta_1(m)$$

la somme des diviseurs de

$$m.$$

C'est une équation aux différences finies, aisée à intégrer. On en tire

$$(1)\quad \psi(\alpha) = \frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{8}{a+1}\zeta_1(m)\right].$$

La question proposée est ainsi très-simplement résolue.

Pour $a = 5$, la formule (1) devient

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{3}(5^{\alpha+1} - 3)\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{3}\zeta_1(m)\right],$$

et cette valeur s'accorde avec ce que nous avons dit dans le cahier de janvier au sujet de la forme

$$x^2 + y^2 + 5(z^2 + t^2).$$

Les nombres premiers $4\mu + 1$ qui viennent après 5 sont 13, 17, etc. On pourra donc faire $a = 13$, $a = 17$, etc., et l'on aura ainsi pour chacun des nombres premiers cités une formule particulière. Pour $a = 13$, par exemple, on a

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{21}(13^{\alpha+1} - 7)\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{4}{7}\zeta_1(m)\right]\cdot$$

Quel que soit le nombre premier $4\mu + 1$ choisi pour valeur de a dans la formule (1), on aura évidemment

$$\psi(0) = 4$$

pour

$$m = 1.$$

Donc, pour $m = 1$, la valeur générale de $\psi(\alpha)$ est

$$\frac{8(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{4(a-1)}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Telle est donc la valeur de

$$\mathrm{N}\left[a^\alpha = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right].$$

De même, pour

$$m = 3,$$

on a toujours

$$\psi(0) = 0,$$

d'où

$$\psi(\alpha) = \frac{32(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{32}{a+1}(-1)^\alpha.$$

La valeur de

$$\mathrm{N}\left[3a^\alpha = x^2 + y^2 + a(z^2 + t^2)\right]$$

s'exprime donc par

$$\frac{32(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} - \frac{32}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Je ne m'arrêterai pas davantage à ces détails.

3. Qu'il s'agisse à présent d'un entier pair, en sorte que l'on ait

$$q = 2^s m, \quad s > 0.$$

La relation entre

$$\psi(\alpha)$$

et

$$\psi(\alpha + 1)$$

sera cette fois

$$\psi(\alpha + 1) + \psi(\alpha) = \frac{3.16(a^{\alpha+1} - 1)}{a - 1}\zeta_1(m);$$

le second membre est triple de ce qu'il était tout à l'heure. Voilà donc encore une équation aux différences finies à intégrer. L'intégration donne sans peine

$$(2)\quad \psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1}\zeta_1(m) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{24}{a+1}\zeta_1(m)\right];$$

et la question proposée est résolue.

Pour $a = 13$, par exemple,

$$\psi(\alpha) = \frac{2}{7}(13^{\alpha+1} - 7) + (-1)^\alpha\left[\psi(0) - \frac{12}{7}\zeta_1(m)\right].$$

Quel que soit le nombre premier représenté par a dans la formule (2), on a

$$\psi(0) = 4$$

pour

$$s = 1, \quad m = 1,$$

c'est-à-dire pour

$$q = 2.$$

Donc, pour

$$q = 2,$$

on a toujours

$$\psi(\alpha) = \frac{24(2a^{\alpha+1} - a - 1)}{a^2 - 1} + \frac{4(a-5)}{a+1}(-1)^\alpha.$$

En d'autres termes, la valeur de

$$N\left[2a^\alpha = x^2 + y^2 + a(z^2+t^2)\right]$$

est

$$\frac{24(2a^{\alpha+1}-a-1)}{a^2-1} + \frac{4(a-5)}{a+1}(-1)^\alpha.$$

Prenons, par exemple,

$$a = 13;$$

la valeur de

$$N\left[2.13^\alpha = x^2 + y^2 + 13(z^2+t^2)\right]$$

devra être

$$\frac{2}{7}(13^{\alpha+1}-7) + \frac{16}{7}(-1)^\alpha;$$

de là, en faisant $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, etc., on conclut

$$N\left[2.13 = x^2 + y^2 + 13(z^2+t^2)\right] = 44,$$

puis

$$N\left[2.13^2 = x^2 + y^2 + 13(z^2+t^2)\right] = 628,$$

et ainsi de suite. L'équation

$$N\left[2.13 = x^2 + y^2 + 13(z^2+t^2)\right] = 44$$

est confirmée par les identités

$$26 = (\pm 1)^2 + (\pm 5)^2 + 13(0^2+0^2),$$
$$26 = (\pm 2)^2 + (\pm 3)^2 + 13[0^2 + (\pm 1)^2],$$
$$26 = 0^2 + 0^2 + 13[(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2],$$

dont les deux premières comportent des permutations auxquelles on doit avoir égard. Je laisse au lecteur à pousser plus loin les vérifications.