JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule $A^2 + 116B^2$, en *Y* prenant *B* impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 295-296.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__295_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS

CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+116B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2+116B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent de cette propriété commune, que, pour chacun d'eux, on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m=58x^2+p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs et p un nombre premier non diviseur de y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un entier donné m contenu dans la formule A^2+116B^2, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$58.1^2,\ 58.3^2,\ 58.5^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$58,\quad 532,\quad 1450,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme m est $\equiv 5 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 29, on voit par l'équation même de la question

$$m = 58x^2 + p^{4l+1}y^2$$

que chaque nombre p sera $\equiv 3 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 29.

2. Les nombres premiers les plus petits que la formule

$$A^2 + 116B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, sont 197 et 557; on a

$$197 = 9^2 + 116.1^2$$

et

$$557 = 21^2 + 116.1^2.$$

Notre théorème se vérifie sur ces deux nombres, au moyen des équations canoniques

$$197 = 58.1^2 + 139.1^2$$

et

$$557 = 58.1^2 + 499.1^2,$$

où 139 et 499 sont des nombres premiers. Le reste 35, obtenu en retranchant 522 de 557, n'est pas canonique; car $35 = 7.5$.

Je me bornerai à ces deux exemples.