JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule $A^2 + 56B^2$, en Y prenant B impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 293-294.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__293_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS

CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+56B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2+56B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent tous de cette propriété, que pour chacun d'eux on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 28x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m, contenu dans la formule A^2+56B^2, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$28.1^2,\ 28.3^2,\ 28.5^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$28,\quad 252,\quad 700,\quad \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p étant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme m est $\equiv 1 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 7, l'équation

$$m = 28x^2 + p^{4l+1}y^2$$

ne peut avoir lieu que pour $p \equiv 5 \pmod{8}$ et résidu quadratique de 7. Donc p doit appartenir à l'une des trois formes linéaires

$$56g + 29,\quad 56g + 37,\quad 56g + 53.$$

2. Les plus petits nombres premiers fournis par l'expression $A^2 + 56B^2$, en y prenant B impair, sont 137 et 281; on a

$$137 = 9^2 + 56.1^2$$

et

$$281 = 15^2 + 56.1^2.$$

Notre théorème se vérifie sur ces deux nombres, au moyen des équations canoniques

$$137 = 28.1^2 + 109.1^2$$

et

$$281 = 28.3^2 + 29.1^2;$$

le reste 253, obtenu en retranchant 28 de 281, n'est pas canonique, car

$$253 = 11.23.$$

Je ne crois pas devoir pousser plus loin ces vérifications numériques.