JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule $A^2 + 44B^2$, en Y prenant B impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 289-292.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__289_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE $A^2 + 44B^2$, EN Y PRENANT B IMPAIR;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2 + 44B^2,$$

en y prenant B impair, possèdent une propriété commune, à savoir que l'on peut pour chacun d'eux poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m = 22x^2 + p^{4l+1}y^2,$$

x, y étant des entiers impairs et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m compris dans la formule $A^2 + 44B^2$, en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$22.1^2,\quad 22.3^2,\quad 22.5^2,\quad 22.7^2,\ \text{etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$22,\quad 198,\quad 550,\quad 1078,\ \text{etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p; mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8},$$

et qu'en outre m est évidemment résidu quadratique de 11, il résulte de l'équation

$$m = 22x^2 + p^{4l+1}y^2$$

que l'on ne peut pas manquer d'avoir

$$p \equiv 7 \pmod{8}$$

et que de plus p sera résidu quadratique de 11. Donc p doit appartenir à l'une des cinq formes linéaires

$$88g + 15,\ 88g + 23,\ 88g + 31,\ 88g + 47,\ 88g + 71.$$

2. Le plus petit nombre premier que la formule

$$A^2 + 44B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, est 53. On a

$$53 = 3^2 + 44.1^2.$$

Or je trouve en effet pour 53 une équation canonique :

$$53 = 22.1^2 + 31.1^2.$$

Viennent ensuite les nombres premiers 269, 397, 421, qui vérifient les identités

$$\begin{aligned} 269 &= 15^2 + 44.1^2, \\ 397 &= \ \ 1^2 + 44.3^2, \\ 421 &= \ \ 5^2 + 44.3^2, \end{aligned}$$

et dont on peut retrancher 22 et 198. Ainsi, pour chacun de ces nombres, il y aura deux restes; et, d'après notre théorème, il faut que l'un de ces deux restes soit canonique et que l'autre ne le soit pas. Or cela a lieu en effet. Les restes canoniques sont

$$269 - 198 = 71.1^2$$

pour 269, puis

$$397 - 198 = 199.1^2$$

pour 397, enfin

$$421 - 198 = 223.1^2$$

pour 421. Les autres restes sont non canoniques. On a d'abord

$$269 - 22 = 247 = 13.19;$$

ensuite

$$397 - 22 = 375 = 3.5^3,$$

où l'exposant 3 n'a pas la forme voulue $4l + 1$; enfin

$$421 - 22 = 399 = 3.7.19.$$

Considérons, en dernier lieu, les nombres premiers

$$757$$

et

$$773.$$

Ils remplissent la condition imposée par notre théorème, attendu que l'on a

$$757 = 19^2 + 44.3^2$$

et

$$773 = 27^2 + 44.1^2.$$

De plus, chacun d'eux donnera lieu à trois restes, puisque l'on peut en retrancher 22, 198 et 550. Il faut donc, ou que ces trois restes soient canoniques, ou qu'un d'entre eux le soit, les deux autres ne l'étant pas.

Or je trouve en effet, pour 757, deux restes non canoniques, savoir

$$757 - 22 = 735 = 3.5.7^2$$

et

$$757 - 198 = 559 = 13.43,$$

avec un reste canonique

$$757 - 550 = 23.3^2.$$

D'un autre côté, pour 773, j'obtiens trois restes canoniques, d'abord

$$773 - 22 = 751.1^2,$$

puis

$$773 - 198 = 23.5^2,$$

enfin

$$773 - 550 = 223.1^2.$$

Notre théorème est donc constamment vérifié.