JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Théorème concernant les nombres premiers contenus dans la formule $A^2 + 20B^2$, en Y prenant B impair

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 10 (1865), p. 281-284.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__281_0>

THÉORÈME

CONCERNANT

LES NOMBRES PREMIERS CONTENUS DANS LA FORMULE A^2+20B^2, EN Y PRENANT B IMPAIR;

Par M. J. LIOUVILLE.

1. Les nombres premiers m, contenus dans la formule quadratique

$$A^2+20B^2,$$

en y prenant B impair, jouissent d'une propriété commune, à savoir que pour chacun d'eux on peut poser au moins une fois (et toujours un nombre impair de fois) l'équation

$$m=10x^2+p^{4l+1}y^2,$$

x, y désignant des entiers impairs (positifs) et p un nombre premier qui ne divise pas y : on admet pour l la valeur zéro.

En d'autres termes, si d'un nombre premier m, contenu dans la formule

$$A^2+20B^2,$$

en y prenant B impair, on retranche tant que faire se peut les termes de la suite

$$10.1^2,\ 10.3^2,\ 10.5^2,\ 10.7^2,\ 10.9^2, \text{ etc.},$$

c'est-à-dire les entiers

$$10,\quad 90,\quad 250,\quad 490,\quad 810, \text{ etc.},$$

il y aura un nombre impair de restes susceptibles d'être mis sous la forme

$$p^{4l+1}y^2,$$

p désignant un nombre premier non diviseur de y.

Nous n'imposons *à priori* aucune condition au nombre premier p. Mais comme on a

$$m \equiv 5 \pmod{8}$$

et qu'en outre m est résidu quadratique de 5, l'équation

$$m = 10x^2 + p^{4l+1}y^2$$

ne pourra avoir lieu qu'autant que p sera aussi résidu quadratique de 5 et vérifiera la congruence

$$p \equiv 3 \pmod{8}.$$

Ainsi p sera nécessairement de l'une des deux formes linéaires

$$40g + 11, \quad 40g + 19.$$

2. Le plus petit nombre premier que la formule

$$A^2 + 20B^2$$

fournisse, en y prenant B impair, est 29. On a

$$29 = 3^2 + 20.1^2.$$

Aussi trouvons-nous pour 29 l'équation canonique

$$29 = 10.1^2 + 19.1^2.$$

Viennent ensuite les nombres premiers

$$101, \quad 181, \quad 229,$$

pour lesquels on a

$$\begin{aligned} 101 &= 9^2 + 20.1^2, \\ 181 &= 1^2 + 20.3^2, \\ 229 &= 7^2 + 20.3^2. \end{aligned}$$

Comme on peut en retrancher 10 et 90, on aura deux restes, et il faudra (d'après notre théorème) qu'un de ces restes soit canonique et que l'autre ne le soit pas. Or je trouve, en effet, relativement à chacun de ces nombres, un reste canonique. Pour 101, c'est

$$101 - 90 = 11.1^2;$$

pour 181, c'est

$$181 - 10 = 19.3^2;$$

enfin, pour 229, c'est

$$229 - 90 = 139.1^2.$$

Les restes non canoniques sont

$$\begin{aligned} 101 - 10 &= 91 = 7.13, \\ 181 - 90 &= 91 = 7.13, \\ 229 - 10 &= 219 = 3.73. \end{aligned}$$

Pour le nombre premier

$$349$$

qui s'exprime ainsi

$$349 = 13^2 + 20.3^2$$

et dont on peut retrancher

$$10,\ 90,\ 250,$$

il y a trois restes, dont deux non canoniques, savoir

$$349 - 10 = 339 = 3.113$$

et

$$349 - 90 = 259 = 7.37,$$

mais un canonique

$$349 - 250 = 11.3^2,$$

ce qui suffit pour l'exactitude de notre théorème.

Même conclusion au sujet du nombre premier

$$461$$

pour lequel on a l'équation

$$461 = 21^2 + 20.1^2.$$

En en retranchant 10 et 90, on a deux restes non canoniques, car

$$461 - 10 = 451 = 11.41$$

et

$$461 - 90 = 371 = 7.53.$$

Mais en en retranchant 250 on a le reste canonique

$$461 - 250 = 211.1^2.$$

Le nombre premier

$$509$$

qui s'exprime par

$$3^2 + 20.5^2$$

remplit la condition imposée par notre théorème. On peut en retrancher 10, 90, 250 et 490, de sorte qu'il y a cette fois quatre restes à considérer. Or en en retranchant 250, on a un reste non canonique égal à 7.37; les trois autres restes

$$509 - 10 = 499.1^2,$$
$$509 - 90 = 419.1^2,$$
$$509 - 490 = 19.1^2,$$

sont canoniques puisque 499, 419 et 19 sont des nombres premiers.

Viennent enfin les deux nombres premiers

$$541 = 19^2 + 20.3^2$$

et

$$709 = 23^2 + 20.3^2,$$

pour chacun desquels on a une seule équation canonique, d'une part

$$541 = 10.1^2 + 59.3^2,$$

et d'autre part

$$709 = 10.3^2 + 619.1^2.$$

Je ne m'arrête pas à transcrire ici les restes non canoniques, ni à prolonger ces vérifications.