JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 21-24.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__21_0>

SUR LA FORME
$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. La forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2,$$

dont nous voulons nous occuper ici, est liée intimement à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2$$

que nous avons considérée dans l'article précédent. Pour le mieux comprendre, on remplacera la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2,$$

par la forme équivalente

$$x^2 + 9y^2 + z^2 + 9t^2,$$

et l'on remarquera que les deux formes binaires

$$x^2 + 9y^2, \quad 2x^2 + 2xy + 5y^2,$$

distinctes il est vrai, appartiennent néanmoins au même déterminant -9. On ne s'étonnera donc pas que le nombre $B(n)$ des représentations d'un entier donné n par la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2$$

se rattache au nombre analogue $A(n)$ qui répond à la forme

$$x^2 + y^2 + 9z^2 + 9t^2.$$

2. Posons

$$n = 2^\alpha 3^\beta m,$$

m étant un entier impair, non divisible par 3, et parcourons les divers cas qui peuvent se présenter relativement aux exposants α, β.

D'abord, on prouve sans peine que, sous la seule condition de $\alpha > 0$, l'on a

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = A(2^\alpha 3^\beta m).$$

Aux formules (1) et (3) de l'article précédent répondent donc les deux formules ci-après :

1° Pour α et $\beta > 0$,

$$B(2^\alpha 3^\beta m) = 12(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m),$$

de sorte qu'en particulier

$$B(3.2^\alpha m) = 0;$$

2° Pour $\beta = 0$, mais $\alpha > 0$,

$$B(2^\alpha m) = 4\zeta_1(m).$$

Le cas d'un entier impair multiple de 3 n'est guère plus difficile, et je trouve que, sous la condition de $\beta > 0$, l'on a

$$B(3^\beta m) = 4(3^{\beta-1} - 1)\zeta_1(m).$$

Le second membre est nul quand $\beta = 1$. Mais il ne l'est jamais pour $\beta > 1$, et l'on a, par exemple,

$$B(9) = 8,$$

résultat confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
9 &= 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,\\
9 &= 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,\\
9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2.1^2 + 2.1.1 + 5.1^2,\\
9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-1)^2 + 2(-1)(-1) + 5(-1)^2,\\
9 &= 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,\\
9 &= 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2 + 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2,\\
9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(-2)^2 + 2(-2).1 + 5.1^2,\\
9 &= 2.0^2 + 2.0.0 + 5.0^2 + 2(2)^2 + 2.2(-1) + 5(-1)^2,
\end{aligned}$$

qui contiennent toutes les représentations dont l'entier 9 est susceptible sous la forme

$$2x^2 + 2xy + 5y^2 + 2z^2 + 2zt + 5t^2.$$

3. Nous n'avons plus à parler que des entiers m impairs et premiers à 3. Mais je n'ai jusqu'à présent obtenu à ce sujet que l'équation suivante :

$$A(m) + 2B(m) = 4\zeta_1(m).$$

Il est vrai que cette équation détermine

$$B(m)$$

quand m est de la forme

$$6l - 1;$$

car, sachant déjà que

$$A(6l-1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l-1),$$

nous pouvons en conclure que l'on a également

$$B(6l-1) = \frac{4}{3}\zeta_1(6l-1).$$

Mais, quand m est de la forme

$$6l + 1,$$

nous n'avons que la seule équation

$$A(6l+1) + 2B(6l+1) = 4\zeta_1(6l+1)$$

entre les deux inconnues

$$A(6l+1)$$

et

$$B(6l+1).$$

Il reste donc à obtenir une seconde équation pour arriver à un résultat définitif. J'ai cru pourtant que la formule

$$A(6l+1)+2B(6l+1)=4\zeta_1(6l+1)$$

méritait d'être indiquée indépendamment de ce que l'on pourra trouver plus tard. On la vérifiera sur les nombres 1, 7, 13, au moyen des valeurs suivantes

$$A(1)=4,\qquad B(1)=0,$$
$$A(7)=0,\qquad B(7)=16,$$
$$A(13)=24,\qquad B(13)=16,$$

qu'il est aisé de former directement.