JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DESPEYROUS

Classifications des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations inséparables

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 177-202.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__177_0>

CLASSIFICATIONS

des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations inséparables ;

Par M. DESPEYROUS.

Nous avons démontré [*] que la solution du problème proposé par l'Institut en 1858 pour sujet du grand prix des Sciences mathématiques et non encore résolu, « *trouver tous les nombres s de valeurs distinctes que prennent les fonctions de m variables par les permutations de ces variables,* » se ramenait à la solution de cet autre : trouver toutes les manières possibles de classer les permutations de m lettres en s groupes composés chacun d'un même nombre de permutations associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.

Ce résultat donne de l'importance aux classifications des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations *inséparables* pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment : classifications utiles d'ailleurs à la solution de cette question, *trouver toutes les équations résolubles algébriquement,* comme nous le montrerons bientôt.

Nous nous sommes occupé déjà de ces classifications, nous en avons fait connaître trois [**] : mais il en existe un plus grand nombre. Et

---

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, février 1865. Cet article et celui que je publie aujourd'hui formaient le Mémoire que j'ai présenté à l'Académie des Sciences de Paris le 7 juillet 1862. *Voir* les *Comptes rendus*, t. LV, p. 45.

[**] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, décembre 1861. Ce premier Mémoire est la base de tout mon travail et en fixe la date. Il a été lu à la réunion des Sociétés savantes le 24 novembre 1861 ; je n'ai fait depuis lors que développer les résultats qui y sont annoncés.

nous démontrons l'existence de sept classifications distinctes, *quand on opère sur toutes les lettres*, les trois premières comprises et reproduites dans ce nouveau travail avec de légères modifications. L'une d'elles, la septième, contient un très-grand nombre de classifications en raison des indéterminées qu'elle renferme; et ce nombre croît rapidement à mesure que le nombre de lettres augmente, surtout quand ce nombre est composé de plusieurs facteurs premiers.

Toutes ces classifications sont entièrement fondées sur la théorie de l'ordre; c'est pourquoi la lecture de notre travail suppose celle de notre Mémoire déjà cité.

Cauchy a eu l'heureuse idée de distinguer les fonctions en fonctions *intransitives* et en fonctions *transitives*. Une fonction de m lettres est dite transitive lorsque, sans altérer cette fonction, on peut faire occuper à une lettre quelconque telle place que l'on veut, pourvu qu'on déplace convenablement toutes les autres. Généralement, une fonction de m lettres est dite k fois transitive lorsque, sans altérer cette fonction, on peut faire occuper à k lettres quelconques telles places que l'on veut, pourvu qu'on déplace convenablement toutes les autres. Une fonction non transitive est dite *intransitive*.

Cet illustre géomètre fait dépendre la solution de la question proposée par l'Institut de la détermination des nombres de valeurs distinctes des fonctions transitives, détermination qui est loin d'être complète malgré les travaux récents sur cette matière. Nous avons suivi une marche inverse : nous commençons par déterminer les nombres de valeurs distinctes des fonctions *intransitives*. Et toutes les classifications dont il est question dans notre travail ne produisent généralement que des fonctions intransitives.

Or, nous démontrons qu'il y a six classifications de cette espèce, ainsi qu'une septième très-générale et composée des premières. Mais en existe-t-il un plus grand nombre? Question importante; car la détermination complète de ces classifications donnerait, d'après ce que nous avons démontré, *tous* les nombres qui expriment combien de valeurs distinctes prennent les fonctions intransitives. Et pour la solution complète de la question proposée par l'Académie des Sciences, il n'y aurait plus qu'à ramener les fonctions transitives aux fonctions intransitives.

I.

CLASSIFICATIONS.

Première classification. — Considérons un nombre quelconque m de lettres $a, b, c, \ldots, k, l$; et désignons par μ le nombre total de permutations qu'elles produisent, μ étant déterminé par l'équation

$$\mu = 1.2.3\ldots(m-1)m.$$

Parmi ces permutations, prenons toutes celles qui commencent par une même lettre, a par exemple. Pour les obtenir, il suffira de permuter les $m-1$ lettres $b, c, \ldots, k, l$, et d'écrire au commencement de chacune d'elles cette lettre a. Le nombre de ces permutations ainsi obtenues sera égal au produit $1.2.3\ldots(m-1)$, et elles constituent ce que nous appellerons dans la suite la *première classe*. Considérons l'une d'elles, $abc\ldots kl$ par exemple, et joignons à cette permutation toutes celles qui sont relatives aux polygones de Poinsot, c'est-à-dire toutes celles qu'on déduit de cette permutation en prenant successivement les lettres, à partir de la première, de p_1 en p_1, de p_2 en $p_2, \ldots$, de p_ν en p_ν; $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ étant les ν nombres inférieurs et premiers à m. On obtiendra ainsi un premier groupe de ν [*] permutations, la première comprise,

$$abc\ldots kl,\ adh\ldots ig, \ldots.$$

Supprimons ces ν permutations dans la première classe, et prenons parmi celles qui restent une permutation quelconque, $ahg\ldots ci$ par exemple. Nous ferons sur elle ce que nous avons fait sur la première $abc\ldots kl$; c'est-à-dire que nous prendrons successivement les lettres de cette nouvelle permutation, à partir de la première a, de p_1 en p_1, de p_2 en $p_2, \ldots$, de p_ν en p_ν, et nous obtiendrons un deuxième groupe de ν *nouvelles* permutations

$$ahg\ldots ci,\ afl\ldots he, \ldots.$$

---

[*] Si $m = p^\alpha q^\beta \ldots t^\lambda$, on sait que

$$\nu = p^{\alpha-1} q^{\beta-1} \ldots t^{\lambda-1}.(p-1)(q-1)\ldots(t-1).$$

Je dis nouvelles : car si on considère une quelconque des permutations du premier ou du deuxième groupe, et si on fait sur elle les mêmes opérations qui ont été faites sur la première, on reproduira toutes celles du premier ou du deuxième groupe [*]. Donc, si l'une des permutations du second groupe coïncidait avec l'une de celles du premier, ces deux groupes seraient composés des *mêmes* permutations. Ce qui est impossible, puisqu'on a pris, pour former ce deuxième groupe, une permutation différente de celles du premier.

Otons ces ν nouvelles permutations de toutes celles que nous avions après la première suppression; prenons parmi celles qui restent une permutation quelconque, $ald\ldots ef$ par exemple, et faisons sur elle ce que nous avons fait sur chacune des deux premières; nous obtiendrons ainsi un troisième groupe de ν permutations

$$ald\ldots ef,\ a\ldots,\ \ldots;$$

et nous démontrerions de la même manière que ces permutations sont différentes de celles du premier et du deuxième groupe. En continuant ainsi cette même opération, on finira par épuiser les $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations de la première classe : puisque chaque nouvelle permutation, différente de celles des groupes déjà formés, produit ν permutations de la même classe essentiellement différentes de celles qui forment ces groupes.

Cette première classe de permutations est donc partagée en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes formés chacun de ν permutations, ainsi qu'il suit :

$$1^{\text{re}}\ \text{classe.}\left\{\begin{array}{lll} abc\ldots kl, & adh\ldots ig, & \ldots, \\ ahg\ldots ci, & afl\ldots he, & \ldots, \\ ald\ldots ef, & a\ldots, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

On pourrait actuellement prendre les $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations d'une autre classe, c'est-à-dire toutes celles qui commencent par une

[*] *Voir* le théorème de la Note placée à la fin de ce travail.

même lettre différente de a, b par exemple, et établir sur elles la même classification qu'on vient de faire sur celles de la première classe. Mais on arrivera au même résultat, et d'une manière plus simple, si on écrit les permutations du tableau précédent, ligne par ligne et dans le même ordre, en commençant chacune d'elles par cette lettre b et en marchant toujours dans le même sens, de gauche à droite : car il est évident qu'en faisant ainsi l'on obtient respectivement les *mêmes* polygones étoilés de Poinsot lus à partir du même sommet b. On aura ainsi partagé les permutations de la deuxième classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes composés chacun de ν permutations :

$$2^{\text{e}}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} b\ldots,\ b\ldots,\ \ldots,\\ b\ldots,\ b\ldots,\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Par la même raison, si on écrit les permutations de la première classe ligne par ligne et dans le même ordre, en commençant chacune d'elles par la lettre c, on aura également partagé les $1.2.3\ldots(m-1)$ de la troisième classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes composés chacun de ν permutations relatives aux polygones étoilés de Poinsot, et qui correspondront aux *mêmes* polygones de la première classe lus à partir du même sommet c.

En continuant cette même opération jusqu'à l'entier épuisement des m lettres données, toutes les permutations de ces lettres seront partagées en m classes, et chaque classe en $\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{\nu}$ groupes de ν permutations chacun. Telle est la loi de formation de la première classification.

Première classification.

$$1^{\text{re}}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} abc\ldots kl,\ adh\ldots ig,\ \ldots,\\ ahg\ldots ci,\ afl\ldots he,\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$2^{e}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} bc\ldots,\ bd\ldots,\ \ldots,\\ be\ldots,\ bg\ldots,\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

. . . .

$$m^{\text{ième}}\text{ classe}\left\{\begin{array}{l} lg\ldots,\ lb\ldots,\ \ldots.\\ lk\ldots,\ ld\ldots,\ \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Le nombre s des groupes de cette classification est évidemment donné par la formule

$$(1) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.$$

Cette classification ne produira qu'un seul et même tableau, de quelque manière qu'on s'y prenne pour la former; puisque (*voir* la Note), d'une permutation quelconque de chaque groupe du tableau précédent, on ne peut déduire, par le procédé de l'intervalle constant, que les permutations de ce groupe.

Deuxième classification. — Dans le tableau qui précède, réunissons en un seul groupe tous ceux d'une même classe, et faisons la même chose pour chaque classe; nous obtiendrons une nouvelle classification de m lettres composée de m groupes formés chacun de $1.2.3\ldots(m-1)$ permutations.

Deuxième classification.

$ab\ldots,\ ak\ldots,\ \ldots,$
$bh\ldots,\ be\ldots,\ \ldots,$
$cg\ldots,\ cf\ldots,\ \ldots,$
. . . .
$li\ldots,\ la\ldots,\ \ldots,$

le nombre s des groupes de cette classification étant donné par la formule

$$(2) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Il est clair que chaque groupe se compose des permutations qui commencent par une même lettre suivies des permutations des $m-1$ autres, et que cette classification ne peut être faite que d'une seule manière.

Troisième classification. — Prenons les premiers groupes de chacune des m classes de la première classification, et formons un nouveau groupe de ces $m.\nu$ permutations,

abc,...kl, adh...ig..., ..., *bc...,* *bd...,* ..., *lg...,* *lb...,* ....

Prenons de même les seconds groupes de chacune des m classes de la même classification, et formons un nouveau groupe de ces $m.\nu$ permutations,

ahg...ci, afl...he, ..., *be...,* *bg...,* ..., *lk...,* *ld...,* ....

Prenons encore les troisièmes groupes de chacune des m classes de cette même classification, et formons un troisième groupe de ces $m.\nu$ permutations : et continuons ainsi cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé les groupes de chaque classe. Nous obtiendrons une troisième classification.

Troisième classification.

abc...kl, adh...ig, ..., *bc...,* *bd...,* ..., *lg...,* *lb...,* ...,
ahg...ci, afl...he, ..., *be...,* *bg....* ..., *lk...,* *ld...,* ...,
. . . . ,

composée d'un nombre s de groupes marqué par la formule

$$(3) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu},$$

formés chacun de $m.\nu$ permutations assujetties à une même loi de formation, savoir : de ν permutations relatives aux polygones étoilés de Poinsot et déduites d'une permutation quelconque, et des $(m-1)\nu$ permutations qu'on en déduit par le procédé *circulaire* [*] effectué sur chacune des ν premières.

Comme pour les deux premières classifications, cette troisième ne produira qu'un seul et même tableau, de quelque manière qu'on la forme. Cela résulte évidemment de ce qui a été démontré dans la première classification.

Quatrième classification. — Examinons maintenant si les ν permutations, qui forment chacun des groupes de la première classification, ne pourraient pas être subdivisées en sous-groupes par une même loi de formation. A cet effet, considérons les ν polygones de m côtés qui correspondent aux ν permutations d'un de ses groupes, du premier par exemple; polygones qui se déduisent du polygone $abc\ldots kl$ en prenant successivement les sommets, à partir du sommet a, de p_1 en p_1, puis de p_2 en $p_2, \ldots$, et enfin de p_ν en p_ν; $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ étant les ν nombres inférieurs et premiers à m.

Considérons d'abord le premier polygone $abc\ldots kl$, et puis l'un des $\nu - 1$ autres, celui qui correspond à p_i par exemple. De ce second polygone tirons-en un troisième en sautant, à partir du sommet a, de p_i en p_i. Ce troisième polygone sera également de m côtés puisque p_i est premier à m; et de celui-ci tirons-en, par la même loi, un quatrième en sautant de p_i en p_i; et continuons ainsi, jusqu'à ce qu'on retombe sur le polygone de départ $abc\ldots kl$. Nous retrouverons un certain nombre ν' des ν premiers polygones, le premier compris. Car marcher dans le polygone $abc\ldots kl$, d'abord de p_i en p_i, puis dans le polygone produit de p_i en p_i, et ainsi de suite; ce procédé revient évidemment à marcher dans le premier polygone, d'abord de p_i en p_i, puis de p_i^2

---

[*] Considérons une des permutations des m lettres, $abc\ldots kl$ par exemple; plaçons ces lettres dans cette disposition sur une circonférence de cercle de rayon arbitraire, et lisons ces lettres dans l'ordre où elles sont écrites à partir de b : la permutation obtenue $bc\ldots kla$ est dite *permutation circulaire de la première*. En les lisant successivement, à partir de $c, d, \ldots, l$ et dans le même sens, on obtiendra $m-2$ autres permutations circulaires.

en $p_i^2, \ldots,$ et enfin de $p_i^{\nu'}$ en $p_i^{\nu'}$: et comme p_i est premier à m, les puissances p_i^2, $p_i^3, \ldots, p_i^{\nu'}$ sont aussi premières à m, et les résidus à m de chacune d'elles sont également premiers à m. Donc ces ν' polygones se trouvent parmi les ν premiers.

Or, de deux choses l'une, ou ces ν' polygones feront tous les ν premiers ou n'en feront qu'une partie. Dans le premier cas, le nombre p_i ne produit rien de nouveau, et p_i est racine *primitive* de m; dans le second cas, je dis que ν' est un diviseur de ν.

Car parmi les ν polygones prenons-en un qui ne soit pas compris dans le groupe des ν' formés comme il vient d'être dit, et déduisons de ce polygone par la même loi et avec le même nombre p_i un nouveau groupe de ν' polygones. Ces nouveaux polygones, qui, d'après ce qui précède, font partie du même groupe des ν premiers polygones, seront différents des ν' formés précédemment. Car si un seul polygone du second groupe coïncidait avec l'un des ν' premiers, comme on déduit toujours par la même loi, le second groupe des ν' polygones coïnciderait tout entier avec le premier; ce qui est impossible, puisqu'on part, pour former le second groupe des ν' polygones, d'un polygone qui n'est pas compris dans le premier.

Si après avoir ôté des ν polygones, qui forment le premier groupe de la première classification, les deux groupes que nous venons de former et qui se composent chacun de ν' polygones, il en reste encore; on démontrerait de la même manière qu'on formerait un troisième groupe de ν' polygones différents de ceux des deux premiers, et appartenant encore au premier groupe total; et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en restât plus dans ce groupe total de ν polygones. Donc ν' est un diviseur de ν, soit $\nu' = \frac{\nu}{\theta}$.

Cela étant, formons un groupe des ν' permutations relatives aux ν' premiers polygones produits par p_i et que nous appellerons dorénavant *sous-groupe;* formons un nouveau sous-groupe des ν' permutations relatives aux ν' seconds polygones produits par le même nombre p_i, et ainsi de suite. Nous subdiviserons, de cette manière, les ν permutations du premier groupe de la première classification en θ sous-groupes composés chacun de ν' permutations.

De chacun des groupes de la première classe de la même classification nous déduirons, par le même procédé et avec le même nombre p_i, θ nouveaux sous-groupes. Cela fait, nous déduirons de ces sous-groupes ainsi formés, par des permutations circulaires, de nouveaux sous-groupes composés chacun de ν' permutations : et par ce moyen les μ permutations qu'offrent les m lettres se trouveront partagées en un nombre s de groupes, appelés sous-groupes, déterminé par la formule

$$(4) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.\theta,$$

composés chacun de $\frac{\nu}{\theta}$ permutations. Telle est la loi de formation de la quatrième classification.

Le nombre p_i étant un des nombres inférieurs et premiers à m, les résidus à m de toutes les puissances de p_i reviennent périodiquement les mêmes. On ne pourra donc, avec ce nombre p_i et en suivant la marche précédente, décomposer que d'une seule manière les ν permutations de chacun des groupes de la première classification en θ groupes composés chacun de ν' permutations. Il résulte de là que chacun des nombres inférieurs et premiers à m produira une seule classification de cette quatrième espèce, quelle que soit la manière dont on s'y prenne pour la former.

Remarque I. — Le nombre θ étant relatif à p_i, il faudra, dans les applications, prendre les valeurs de θ relatives à chacun des ν nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$.

Remarque II. — Si m a des racines *primitives* et si p_i est l'une d'elles, $\nu' = \nu$, $\theta = 1$; et, par suite, cette formule (4) coïncide avec la formule (1).

Remarque III. — En réunissant en un seul groupe *tous* les sous-groupes de chacune des m classes, on retrouverait la deuxième classification, qui a été déduite de la première en réunissant en un seul groupe *tous* ceux de chacune des m classes.

Cinquième classification. — Cette classification se déduit de la précédente suivant la même loi que la troisième se déduit de la première.

Nous prendrons donc les premiers sous-groupes de chacune des m classes de cette quatrième classification, et nous formerons de ces $m\nu'$ permutations un nouveau groupe. Nous formerons également un seul groupe des $m.\nu'$ permutations qui constituent les seconds sous-groupes de ces mêmes m classes; et ainsi de suite pour les troisièmes, les quatrièmes,..., sous-groupes de ces m classes. Les μ permutations des m classes seront partagées de cette manière en un nombre s de groupes déterminé par la formule

$$(5) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu}.\theta,$$

composés chacun de $m.\nu'$ permutations.

Il est clair que cette classification ne peut, comme chacune des quatre premières, donner lieu qu'à un seul et même partage relatif à un même nombre p_i, de quelque manière qu'on s'y prenne pour l'effectuer.

Remarque I. — Si on prend $p_i = 1$, on a $\nu' = 1$, $\theta = \nu$; et, par suite, la formule (5) produit cette autre formule qui nous sera utile plus tard

$$(6) \qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m}.$$

Remarque II. — Si m a des racines primitives et si p_i est l'une d'elles, $\nu' = \nu$, $\theta = 1$, et par conséquent cette même formule (5) reproduit la formule (3).

Sixième classification. — Il est encore possible de partager les μ permutations de m lettres en *deux* groupes jouissant de la propriété suivante : toutes les permutations d'un même groupe se déduisent les unes des autres par un nombre *pair* de substitutions successives de deux lettres quelconques, tandis que les permutations d'un des groupes se déduisent de celles de l'autre par un nombre *impair* de substitutions successives de deux lettres quelconques.

Admettons en effet que cette classification soit faite pour les permutations d'une même classe de m lettres, je dis que nous pourrons partager toutes les permutations de ces m lettres en deux groupes jouissant de la propriété énoncée. Car pour passer des permutations d'une classe quelconque à celles d'une autre, il suffit d'effectuer sur les premières des permutations circulaires à m lettres. Mais toute permutation circulaire à m lettres, déduite d'une permutation donnée, peut être obtenue en effectuant sur cette dernière $m-1$ substitutions successives de deux lettres ayant une lettre commune [*].

De là il suit que si m est impair, $m-1$ sera pair; et dans ce cas, il faudra joindre à chacun des deux groupes, connus par hypothèse et relatifs à une même classe, toutes les permutations qu'on en déduit respectivement, par le procédé circulaire; et continuer cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé les m lettres données. Par ce moyen, *toutes* les permutations des m lettres seront évidemment partagées en deux groupes ayant exactement les mêmes propriétés que les deux groupes relatifs à une même classe.

De là il suit encore que si au contraire m est pair, $m-1$ sera impair; et dans ce cas on déduira, comme précédemment, de chacun des groupes connus et relatifs à une même classe, les permutations circulaires commençant par les secondes lettres de ces permutations; mais on devra joindre *alternativement* celles déduites du premier groupe à celles du second, et *vice versâ*. Et puisque la somme de deux nombres impairs est un nombre pair, on devra joindre, au contraire, *respectivement* aux permutations du premier et du second des deux nouveaux groupes celles que l'on déduit du premier et du second des deux groupes primitifs par le procédé circulaire en commençant aux troisièmes lettres. On joindra encore *alternativement* aux permutations du premier et du deuxième des deux derniers groupes obtenus les permutations circulaires que l'on déduit du premier et du second des deux groupes primitifs en commençant par les quatrièmes lettres de ces permutations, puisque la somme de trois nombres impairs est un nombre impair. On continuera ainsi cette même série d'opérations jusqu'à ce qu'on ait épuisé les m lettres données; et, par ce moyen, il

[*] Ainsi, de *abcde* par exemple, on déduit la permutation circulaire *bcdea* qui peut être encore obtenue en effectuant sur *abcde* les quatre substitutions successives de deux lettres, *ab*, *ac*, *ad*, *ae* ayant une lettre commune *a*.

est clair que toutes les permutations de ces m lettres seront partagées en deux groupes jouissant de la propriété énoncée.

Pour effectuer cette sixième classification, il faut donc connaître les deux groupes primitifs d'une même classe; mais toutes ces permutations commencent par une même lettre, il suffit donc de savoir partager en deux groupes jouissant de la même propriété les permutations de $m - 1$ lettres. Or, cette dernière classification peut être faite, d'après ce qui vient d'être dit, si on sait effectuer cette même classification pour les permutations de $m - 2$ lettres; et ainsi de suite. En sorte qu'il suffit de classer les permutations de trois lettres a, b, c en deux groupes jouissant de la même propriété. Ce qui est aisé, car la remarque I de la cinquième classification appliquée à trois lettres donne les deux groupes

$$abc,\ bca,\ cab,$$
$$acb,\ cba,\ bac,$$

tels que les permutations d'un même groupe se déduisent les unes des autres par un nombre pair de substitutions successives de deux lettres, tandis que celles d'un groupe se déduisent de celles de l'autre par un nombre impair de substitutions successives de deux lettres.

Remarque. — Nous avons dit que deux substitutions successives de deux lettres, ayant une lettre commune, équivalent à une permutation circulaire de trois lettres : ainsi les deux substitutions ab, ac faites successivement sur abc produisent la permutation circulaire bca. Donc les permutations de chacun des deux groupes de cette sixième classification se déduisent les unes des autres par des permutations circulaires de trois lettres quelconques [*].

Classification composée. — Dans les six classifications qui précèdent nous avons eu égard aux m lettres données; mais on peut décomposer préalablement les m lettres d'une permutation quelconque en α suites,

---

[*] La loi de formation de cette sixième classification fournit un moyen très-simple pour obtenir le *déterminant* de m^2 quantités et pour démontrer les propriétés remarquables de cette fonction.

et soumettre les lettres de chacune d'elles à l'une des six premières classifications.

Soient m_1 le nombre de lettres de la première suite qui seront par exemple les m_1 premières de cette permutation, m_2 le nombre de lettres de la deuxième suite qui seront les m_2 lettres qui suivent, etc.; et enfin m_α le nombre de lettres de la dernière suite qui seront les m_α dernières; on aura

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\alpha :$$

et soumettons les m_1 premières lettres, les m_2 qui suivent, etc., et les m_α dernières de cette permutation à des classifications déterminées, mais quelconques et prises parmi les six premières. Soient $M_1, M_2, \ldots, M_\alpha$ les nombres de permutations que l'on obtient en opérant successivement et isolément sur les m_1 premières lettres, sur les m_2 qui suivent, etc., et sur les m_α dernières; en sorte que chacun d'eux soit égal à l'un des dénominateurs des formules (1), (2), (3), (4), (5), (6) ou au nombre 2, et relatif soit à m_1, soit à m_2, etc., soit à m_α. Le nombre de permutations que l'on déduira de la permutation donnée à m lettres sera évidemment égal au produit $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$: de toutes ces permutations nous formerons le premier groupe.

Supprimons ces permutations de toutes celles qu'offrent les m lettres, et parmi celles qui restent prenons une permutation quelconque sur laquelle nous ferons exactement ce que nous avons fait sur la première : nous obtiendrons $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ *nouvelles* permutations de m lettres dont nous formerons le second groupe. Je dis nouvelles; car si on considère une quelconque des permutations du premier groupe, et si on fait sur elle les mêmes opérations qu'on a effectuées sur la première, on reproduira ce même premier groupe; puisque la loi de formation de chaque groupe d'une quelconque des six classifications qui précèdent reproduit les permutations de ce groupe quelle que soit celle de ses permutations que l'on soumette à cette loi. Il en est évidemment de même du second groupe; donc si une des permutations de ce groupe coïncidait avec l'une de celles du premier, comme on déduit toujours par la même loi, toutes les permutations du second groupe coïncideraient avec celles du premier : ce qui est impossible, puisque pour le former on est parti d'une permutation différente de celles de ce premier groupe.

Otons des μ permutations des m lettres ces nouvelles permutations de toutes celles que nous avions après la première suppression; et considérons, parmi celles qui restent, une permutation quelconque avec laquelle nous produirons, de la même manière, $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations dont nous formerons le troisième groupe, et qu'on démontrerait, par le même raisonnement, être différentes de celles des deux premiers. Et continuons ainsi cette même opération jusqu'à ce qu'on ait épuisé toutes les permutations des m lettres; ce qui arrivera inévitablement, puisque toute permutation différente de celles qui se trouvent dans les groupes déjà formés produit $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations nouvelles. Nous aurons partagé ainsi les μ permutations de m lettres en un nombre de groupes déterminé par la formule

$$s = \frac{1.2.3\ldots(m-1).m}{M_1 M_2 \ldots M_\alpha}, \tag{7}$$

composés chacun de $M_1 M_2 \ldots M_\alpha$ permutations, et assujettis à une même loi de formation; loi variable dans les applications.

Mais quelle que soit celle que l'on adopte, l'une quelconque des permutations d'un de ces groupes reproduisant toutes celles de ce groupe par cette loi, la classification qu'elle produit est unique de son espèce, comme les six premières; c'est-à-dire qu'elle ne donne lieu qu'à un seul et même tableau, de quelque manière qu'on la forme.

Application. — Comme exemple des six premières classifications, nous prendrons $m = 5$; auquel cas $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$, $\nu = 4$, et la formule (1) donne $s = 30$.

Le premier tableau sera donc :

Classes.	Groupes.	Permutations.
1	1	*abcde, acebd, adbec, aedcb,*
	2	*abced, acdbe, aebdc, adecb,*
	3	*abecd, aedbc, acbde, adceb,*
	4	*aebcd, abdec, acedb, adcbe,*
	5	*abdce, adebc, acbed, aecdb,*
	6	*adbce, abedc, acdeb, aecbd;*

Classes.	Groupes.	Permutations.
2	7	*bcdea*, *bdace*, *becad*, *baedc*,
	8	*bceda*, *beacd*, *bdcae*, *badec*,
		. . . .
3	13	*cdeab*, *cebda*, *cadbe*, *cbaed*,
		. . . . ;
4	19	*deabc*, *daceb*, *dbeca*, *dcbae*,
		. . . . ;
5	25	*eabcd*, *ebdac*, *ecadb*, *edcba*,
		. . . .

Le tableau relatif à la deuxième classification sera, d'après la notation adoptée et en observant que la formule (2) donne $s = 5$:

Groupes.	Permutations.					
1	1,	2,	3,	4,	5,	6,
2	7,	8,	9,	10,	11,	12,
3	13,	14,	15,	16,	17,	18,
4	19,	20,	21,	22,	23,	24,
5	25,	26,	27,	28,	29,	30.

La troisième classification produira le tableau suivant, s étant égal à 6 :

Groupes.	Permutations.				
1	1,	7,	13,	19,	25,
2	2,	8,	14,	20,	26,
3	3,	9,	15,	21,	27,
4	4,	10,	16,	22,	28,
5	5,	11,	17,	23,	29,
6	6,	12,	18,	24,	30.

La quatrième classification donnera le tableau suivant en prenant $p_i = 4$, auquel cas $\theta = 2$ et la valeur s donnée par la formule (4) est égale à 60 :

Classes.	Groupes.	Permutations.
1	1	*abcde*, *aedcb*,
	2	*acebd*, *adbec*,
	3	*abecd*, *adceb*,
	. . . . ;	
2	13	*bcdea*, *baedc*,
	14	*bdace*, *becad*,
	. . . . ;	
. . . . ;		
5	49	*eabcd*, *edcba*,
	. . . .	

Le tableau de la cinquième classification sera, la formule (5) donnant $s = 12$ et en adoptant la notation du tableau précédent :

Groupes.	Permutations.
1	1, 13, 25, 37, 49,
2	2, 14, 26, 38, 50,
. . .	. . . . ,
12	12, 24, 36, 48, 60.

La sixième classification donnera enfin les deux groupes suivants :

1er groupe.

abcde, *acdbe*, *adbce*, *adceb*, *abdec*, *acbed*,
adebc, *abecd*, *acedb*, *aedbc*, *acebd*, *aedcb*,

plus les permutations circulaires de ces 12 écrites, et prises successivement par rapport aux lettres de rang 2, 3, 4, 5.

2e groupe.

abdce, *adcbe*, *acbde*, *acdeb*, *adbec*, *abced*,
acebd, *adecb*, *abedc*, *aebcd*, *aecdb*, *aedbc*,

plus les permutations circulaires de ces 12 écrites, et prises successivement par rapport aux lettres de rang 2, 3, 4, 5.

II.

PROPRIÉTÉ GÉNÉRALE DES GROUPES DES CLASSIFICATIONS PRÉCÉDENTES.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification forment un seul et même ordre.*

En effet, plaçons sur une circonférence de cercle de rayon arbitraire et à égales distances les unes des autres les m lettres données, dans l'ordre qui produit la première des permutations du groupe que l'on considère, et formons les ν polygones relatifs aux ν permutations de ce groupe.

Le premier polygone s'obtient en joignant un à un les m points désignés par ces lettres, ce qui exige qu'on parcoure une seule fois la circonférence. Généralement le polygone relatif au nombre p_i, inférieur et premier à m, s'obtient en joignant les mêmes points de p_i en p_i, à partir du point considéré comme origine; ce qui exige qu'on parcoure p_i fois cette même circonférence. Mais, *la théorie de l'ordre étant indépendante de la notion de grandeur, et n'étant relative qu'à celle de la disposition des choses*, ce dernier polygone peut être obtenu, comme le premier, en parcourant une *seule* fois une circonférence d'un rayon p_i fois plus grand, et en prenant sur elle m points à égales distances les uns des autres. Et comme ce résultat est vrai pour toutes les valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ de p_i, il s'ensuit que les ν polygones relatifs aux ν permutations du groupe que l'on considère coexistent tous dans un seul quelconque d'entre eux, comme les racines d'une même équation, sans qu'on puisse les distinguer ou les isoler par aucune analyse. Donc ces ν polygones ne sont autre chose qu'*un seul et même polygone*.

Nous dirons dorénavant que les ν permutations qui correspondent à ces mêmes ν polygones ne forment qu'*un seul et même ordre;* et comme ce résultat est vrai pour les permutations de chacun des autres groupes, il s'ensuit que le théorème est démontré.

Corollaire I. — Il résulte de là : 1° que si on cherche le côté x

d'un polygone régulier de m côtés inscrit dans un cercle de rayon donné r, ce côté doit dépendre d'une équation de degré ν dont les racines sont les côtés des ν polygones étoilés de Poinsot; et la remarque du théorème I du Mémoire déjà cité prouve que cette équation ne doit contenir que les puissances paires de x, et que son degré se réduit par conséquent à $\frac{\nu}{2}$;

2° Que si on cherche dans quel cercle de rayon x on peut inscrire un polygone régulier de m côtés avec un côté donné c, ce rayon doit dépendre d'une équation de degré $\frac{\nu}{2}$.

Corollaire II. — Il résulte aussi de ce théorème et de ce qui a été démontré dans la quatrième classification que les ν' permutations de chacun de ses groupes forment un seul et même *sous-ordre*.

THÉORÈME II. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Toutes les permutations d'un quelconque des groupes de cette classification ne sont en effet, théorème I, qu'un seul et même polygone, qu'un seul et même ordre. Donc, si, par un échange quelconque de lettres, une des permutations de l'un de ses groupes se change en une autre du même groupe, cet échange de lettres, effectué sur toute autre permutation de ce groupe, transformera nécessairement cette permutation en une autre du même groupe. Donc ce même échange de lettres, opéré successivement sur les ν permutations de ce groupe, transformera les unes dans les autres, ne fera que les déplacer.

Si, au contraire, un échange de lettres transformait une des permutations de l'un des groupes du premier tableau en une autre d'un groupe différent, cet échange de lettres transformerait, théorème I, toute autre permutation du premier groupe en une autre du second. Donc cet échange de lettres, opéré successivement sur les ν permutations du premier groupe considéré, changerait ces ν permutations en celles du second; et le premier groupe se substituerait tout entier au second.

Ainsi, le théorème est démontré.

THÉORÈME III. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la deuxième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Il résulte en effet de cette classification que chaque groupe se compose d'une *même* lettre suivie des $m-1$ autres, permutées de toutes les manières possibles. Donc si un échange quelconque de lettres transforme une permutation d'un des groupes de cette classification en une autre de ce groupe, il est clair que cet échange de lettres ne changeant pas la lettre immobile de ce groupe transformera toute autre permutation de ce groupe en une autre du même groupe.

Si, au contraire, un échange de lettres transformait une des permutations d'un des groupes de cette classification en une permutation quelconque d'un autre groupe, la première lettre immobile et relative au premier groupe que l'on considère serait donc changée en la première qui est immobile et relative à cet autre; et dès lors cet échange de lettres, effectué sur toute autre permutation de ce premier groupe, changerait cette permutation en une autre du second.

Ces deux résultats démontrent le théorème énoncé.

Remarque. — La loi de formation de cette classification et le théorème I prouvent que toutes les permutations d'un quelconque de ses groupes sont relatives à *tous* les polygones d'un *même* sommet, c'est-à-dire à *tous les ordres vus d'un même point;* du point a pour le premier groupe, du point b pour le second, etc., et du point l pour le dernier.

THÉORÈME IV. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la troisième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car les permutations d'un quelconque des groupes de la première classification forment, théorème I, un seul et même polygone, un seul et même ordre, et les permutations d'un quelconque des groupes de la troisième se déduisent des premières en les lisant circulairement à partir de la lettre a, puis de la lettre b, et ainsi de suite jusqu'à la dernière l. Donc les permutations d'un des groupes de cette troisième classification constituent un seul et même polygone, un seul et même ordre vu successivement de chacun des m points $a, b, \ldots, l$.

De là il suit que si un échange de lettres transforme une permutation d'un des groupes de cette troisième classification en une autre du même groupe, cet échange ne fera pas sortir du point de vue de cet ordre, et que par conséquent il transformera toute autre permutation de ce groupe en une autre du même groupe. De là il suit encore que si, au contraire, un échange de lettres transforme une permutation d'un des groupes de la même classification en une quelconque d'un autre groupe, cet échange de lettres fera passer du point de vue relatif au premier groupe que l'on considère à celui du second, et que par conséquent cet échange de lettres transformera toute autre permutation de ce premier groupe en toute autre du second.

C. Q. F. D.

Théorème V. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la quatrième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

En effet, les permutations d'un quelconque de ses groupes se déduisent de l'une d'elles, d'ailleurs arbitraire, en sautant dans le polygone qui lui correspond d'un même intervalle constant, en sautant du *même* intervalle dans le polygone obtenu, et ainsi de suite, cette opération étant répétée un nombre de fois déterminé. Donc, si, par suite d'un échange de lettres, une permutation d'un groupe quelconque se transforme en une autre de ce groupe, cet échange de lettres équivaut à l'opération précédente répétée un nombre de fois déterminé : mais cette permutation obtenue ou le polygone qui lui correspond n'est autre, corollaire II du théorème I, que le polygone qui correspond à la première où l'on a changé la notation; donc ce même échange de lettres effectué sur cette autre permutation obtenue produira nécessairement une permutation du même groupe. Donc cet échange de lettres transformera les permutations de ce groupe les unes dans les autres, ne fera que les déplacer.

De plus, les permutations d'un quelconque des groupes de cette classification ne formant qu'un seul et même sous-ordre, il en résulte que si un échange de lettres transforme, au contraire, une permutation d'un de ses groupes en une autre d'un groupe différent, cet échange de lettres effectué sur toute autre permutation du premier groupe que l'on considère transformera toute autre permutation de ce premier groupe en une autre du second.

Ainsi le théorème est démontré.

Théorème VI. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la cinquième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car la loi de formation de cette classification et le corollaire II du théorème I prouvent que les permutations d'un quelconque de ses groupes constituent un seul et même sous-ordre vu successivement de chacun des m points $a, b, \ldots, l$. On peut donc appliquer aux groupes de cette classification le même raisonnement que celui qui a été appliqué aux groupes de la troisième : ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème VII. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la sixième classification sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

En effet, une quelconque des permutations à m lettres étant donnée, l'un de ses deux groupes se compose de toutes les permutations qui s'en déduisent par un nombre *pair* de substitutions successives de deux lettres quelconques; et l'autre groupe se compose de toutes celles qui s'en déduisent par un nombre *impair* de substitutions successives de deux lettres quelconques, les permutations de ce dernier se déduisant par conséquent les unes des autres, comme le premier, par un nombre pair de substitutions successives de deux lettres arbitraires.

Donc, si un échange de lettres transforme une permutation quelconque d'un des deux groupes en une permutation de ce même groupe, cet échange de lettres équivaudra à un nombre pair de substitutions successives de deux lettres; dès lors ce même échange transformera toutes les permutations de ce groupe les unes dans les autres.

Si, au contraire, un échange de lettres transforme une permutation quelconque de l'un des deux groupes en une permutation de l'autre, cet échange de lettres équivaudra à un nombre impair de substitutions successives de deux lettres quelconques. Donc ce même échange transformera toutes les permutations de l'un d'eux en toutes celles de l'autre.

Théorème VIII. — *Les permutations d'un quelconque des groupes de la classification composée sont inséparables pour tous les échanges possibles des lettres qui les forment.*

Car les divers procédés qui déduisent d'une quelconque des permutations d'un des groupes de cette classification toutes les permutations de ce groupe déduisent également toutes les permutations d'un autre groupe d'une quelconque de ses permutations. On peut donc appliquer à ces groupes un raisonnement analogue au précédent : ce qui démontre le théorème.

Théorème IX. — *Les nombres* 1, 2, μ *et les valeurs* s *déterminées par les formules*

$$(1)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu},$$

$$(2)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

$$(3)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu},$$

$$(4)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{\nu}.\theta,$$

$$(5)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m.\nu}.\theta,$$

$$(6)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{m},$$

$$(7)\qquad s = \frac{1.2.3\ldots(m-1)m}{M_1 M_2 \ldots M_\alpha},$$

sont des nombres qui expriment combien de valeurs distinctes prennent les fonctions intransitives de m *lettres par les permutations de ces lettres.*

En effet, si on réunit en un seul groupe tous les groupes ou *ordres* des m classes de la première classification, et si on prend une fonction symétrique des valeurs d'une fonction arbitraire de m lettres qui soient relatives à toutes les permutations de ce groupe unique, on obtiendra évidemment une fonction de m lettres qui n'aura qu'une seule valeur, et qui sera, par suite, symétrique par rapport à ces m lettres.

La fonction linéaire des m lettres $a, b, \ldots, l$

$$Aa + Bb + \ldots + Ll,$$

dont les coefficients A, B,..., L sont indépendants, prend évidemment un nombre de valeurs marqué par le nombre total des permutations qu'offrent ces m lettres.

Et il résulte du théorème IV de notre dernier travail [*] que, puisque toutes les permutations de m lettres peuvent être partagées, d'après ce qui précède, en s groupes de permutations *inséparables*, s étant égal à 2 ou déterminé par une quelconque des sept formules précédentes, il existe des fonctions de m lettres dont les nombres de leurs valeurs distinctes sont 2 ou s : et ces fonctions sont généralement *intransitives* d'après les définitions adoptées, puisque dans les classifications dont il est ici question aucune des m lettres ne demeure immobile.

Remarque. — La formule (7) produit un grand nombre de théorèmes parmi lesquels nous devons remarquer le suivant, à cause de son utilité dans les applications.

THÉORÈME X. — *Si on décompose le nombre de lettres m en deux parties m_1, m_2 et si M_1, M_2 désignent respectivement les nombres de permutations qu'on obtient en soumettant les m_1 premières lettres et les m_2 secondes à l'une quelconque des six premières classifications, parmi les nombres propres à représenter combien de valeurs distinctes prennent les fonctions de m lettres, il y a ceux que l'on obtient en multipliant les nombres de valeurs distinctes que ces fonctions prendraient par les permutations de m_1 lettres par le facteur*

$$\frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m-1)m}{M_2}.$$

Car, parmi les nombres s de valeurs distinctes que prennent les

[*] *Journal de Mathématiques* publié par M. Liouville, février 1865.

fonctions de m lettres, il y a les valeurs de s données par la formule générale (7). Or, cette formule, m étant égal à $m_1 + m_2$, peut se mettre sous la forme.

$$s = \frac{1.2.3\ldots m_1}{M_1} \cdot \frac{(m_1+1)(m_1+2)\ldots(m-1)m}{M_2};$$

mais, d'après le signification de M_1 et d'après les six premières formules du théorème précédent, le facteur

$$\frac{1.2.3\ldots m_1}{M_1}$$

représente le nombre de valeurs distinctes que prend une fonction de m_1 lettres par les permutations de ces lettres; donc l'équation précédente démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — Si $m_1 = m - 1$, auquel cas $m_2 = 1$ et $M_2 = 1$, le second facteur du second membre de l'équation précédente est égal à m. Donc, parmi les nombres propres à représenter combien de valeurs distinctes prennent les fonctions de m lettres par les permutations de ces lettres, il y a les produits par le nombre m des nombres de valeurs distinctes que prennent ces fonctions par les permutations de $m - 1$ lettres.

NOTE.

THÉORÈME. — *Les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont telles, que, l'une d'elles étant donnée, on en déduit, par le procédé de l'intervalle constant, les mêmes ν permutations.*

Considérons en effet l'une d'elles, celle qui est produite par exemple par le nombre p_i inférieur et premier à m, et marchons dans cette permutation de p_h en p_h, p_h étant un autre nombre inférieur et premier à m. Marcher dans la permutation que l'on considère d'abord de p_i en p_i et ensuite de p_h en p_h dans la permutation produite, cela revient évidemment à marcher dans la première de $p_i p_h$ en $p_i p_h$. Or, chacun des nombres p_i et p_h étant premier à m, leur produit sera aussi premier à m; et je dis que le résidu à m de $p_i p_h$ sera encore premier à m. Car, en désignant par r ce résidu et par M un nombre entier, on aura

$$p_i p_h = \mathrm{M}.m + r;$$

et, si m et r avaient un facteur premier commun α, le second membre de cette égalité, et par suite le premier, serait divisible par α; et par conséquent $p_i p_h$ ne serait pas premier à m. Donc ce résidu est l'un des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ inférieurs et premiers à m, et par conséquent la permutation obtenue coïncidera avec l'une de celles qui forment le groupe que l'on considère.

Je dis de plus que si on remplace successivement p_h par $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ les ν permutations qu'on déduira de celle que nous avons d'abord considérée et qui est relative à p_i sont toutes différentes les unes des autres. Il suffira de prouver pour cela que les résidus à m des ν produits $p_1 p_i, p_2 p_i, \ldots, p_\nu p_i$ sont tous différents. Car si deux d'entre eux, ceux de $p_k p_i$, $p_{k'} p_i$ par exemple, étaient égaux, la différence de ces produits $(p_k - p_{k'}) p_i$ serait un multiple de m; ce qui ne peut être, puisque p_i est premier à m et que $p_k - p_{k'}$ est inférieur à m.

Donc enfin les ν permutations d'un quelconque des groupes de la première classification sont telles, que, l'une d'elles étant donnée, on en déduit ces mêmes ν permutations par le procédé de l'intervalle constant.