JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres; dix-huitième article

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 169-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__169_0>

SUR

QUELQUES FORMULES GÉNÉRALES QUI PEUVENT ÊTRE UTILES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

PAR M. J. LIOUVILLE.

DIX-HUITIÈME ARTICLE.

1. Ce dix-huitième article pourra être convenablement rapproché du dix-septième, inséré au cahier d'avril. On continue, en effet, à considérer un nombre impair donné

$$m,$$

et les modes de partition qu'on applique, tant au nombre m qu'à son double, restent les mêmes. Mais les sommes qu'on en déduit et qu'on parvient à lier entre elles sont différentes.

Représentons-nous d'abord l'entier impairement pair $2m$ comme la somme de deux entiers positifs impairs m', m'', c'est-à-dire écrivons

$$2m = m' + m'',$$

m' prenant les valeurs successives

$$1,\ 3,\ldots,\ 2m-3,\ 2m-1,$$

tandis que m'' prend les valeurs complémentaires

$$2m-1,\ 2m-3,\ldots,\ 3,\ 1;$$

puis, décomposons de toutes les manières possibles chacun des entiers m', m'' en un produit de deux facteurs, de manière à avoir

$$m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta''.$$

Nous arriverons ainsi à l'équation fondamentale

$$2m = d'\delta' + d''\delta''.$$

De cette équation dérive la somme

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\left[\mathfrak{F}(d'+d'',\ \delta'-\delta'')+\mathfrak{F}(d'-d'',\ \delta'+\delta'')\right]$$

que nous désignerons, pour abréger, par

$$R'$$

et qui est une de celles dont nous voulons nous occuper. Le signe sommatoire

$$\sum$$

porte sur tous les groupes d'entiers positifs impairs

$$d',\ \delta',\ d'',\ \delta''$$

pour lesquels on a

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

conformément à ce que je viens d'expliquer.

Nous aurions pu diviser la somme R' en deux parties, savoir

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\mathfrak{F}(d'+d'',\ \delta'-\delta'')$$

et

$$\sum(-1)^{\frac{d''-1}{2}}\mathfrak{F}(d'-d'',\ \delta'+\delta''),$$

dont la première aurait pu, en outre, être remplacée par

$$\sum(-1)^{\frac{\delta''-1}{2}}\mathfrak{F}(\delta'+\delta'',\ d'-d'').$$

Ces changements de forme ont leur utilité; mais nous avons dû fixer les idées en choisissant une expression précise qui pour le moment suffit.

Une fonction

$$\mathfrak{F}(x, y)$$

de deux variables figure dans la somme

$$R'.$$

Cette fonction est jusqu'ici complétement arbitraire; mais plus tard nous l'assujettirons à quelques conditions qui seront mentionnées en temps utile.

2. Il faut maintenant se représenter le nombre m comme formé de deux parties entières et positives, l'une impaire, l'autre paire, et poser

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2.$$

On fera successivement

$$m_1 = 1, \quad m_1 = 3, \ldots, \quad m_1 = m - 2;$$

et à chaque valeur de m_1 correspondra une valeur du produit pair $2^{\alpha_2} m_2$, où le facteur m_2 est supposé impair. Cette valeur

$$2^{\alpha_2} m_2 = m - m_1$$

déterminera à la fois les deux facteurs 2^{α_2} et m_2 : l'exposant α_2 variera d'un cas à l'autre.

Soit enfin, de toutes les manières possibles en nombres entiers positifs,

$$m_1 = d_1 \delta_1, \quad m_2 = d_2 \delta_2,$$

et nous serons conduits à l'équation

$$m = d_1 \delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2,$$

d'où nous conclurons la somme nouvelle

$$\sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \mathfrak{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2)$$

que je désignerai, pour abréger, par

$$R_1.$$

La fonction $\mathcal{F}(x, y)$ est la même que plus haut.

3. C'est entre la somme

$$R'$$

du n° **1** et la somme

$$R_1$$

du n° **2** que nous établissons une liaison par l'intermédiaire d'une troisième somme relative aux diviseurs de l'entier donné m.

Soit d un quelconque des diviseurs de m (dont 1 et m font toujours partie). La somme dont nous parlons, et que nous désignerons abréviativement par

$$R$$

s'exprimera de cette façon :

$$\sum \mathcal{F}(2d, 0).$$

Je n'ai pas besoin d'ajouter que le signe

$$\sum$$

porte sur toutes les valeurs de d.

Mais le moment est venu de dire quelles restrictions nous imposons à la généralité absolue de la fonction

$$\mathcal{F}(x, y);$$

car la relation que nous voulons obtenir n'aurait pas lieu pour une fonction quelconque. Désormais donc nous exigeons que cette fonction soit paire par rapport à y, et impaire par rapport à x; autrement dit, nous exigeons que l'on ait d'une part

$$\mathcal{F}(x, -y) = \mathcal{F}(x, y),$$

et d'autre part

$$\mathcal{F}(-x, y) = -\mathcal{F}(x, y),$$

à quoi j'ajoute, comme d'habitude, la condition particulière

$$\mathcal{F}(o, y) = o.$$

Pour toute fonction algébrique ou numérique remplissant ces conditions, l'on a

$$R' = R + 4R_1,$$

ou bien, explicitement,

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} [\mathcal{F}(d'+d'', \delta' - \delta'') + \mathcal{F}(d'-d'', \delta' + \delta'')]$$
$$= \sum \mathcal{F}(2d, o) + 4\sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} \mathcal{F}(2d_1, 2^{\alpha_2+1} d_2).$$

Telle est la formule, curieuse suivant nous, à laquelle j'ai consacré le présent article.

4. Pour $m = 1$, l'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2 \delta_2$$

est impossible; la somme

$$R_1$$

relative à ce mode de partition est donc nulle. D'un autre côté, on ne peut faire

$$m = d\delta,$$

qu'avec

$$d = 1, \quad \delta = 1.$$

Enfin, l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta''$$

n'a évidemment lieu qu'en prenant l'unité pour valeur commune de

$$d', \delta', d'', \delta''.$$

De là

$$R = \mathcal{F}(2, o),$$

et

$$R' = \mathcal{F}(2, o) + \mathcal{F}(o, 2),$$

ce qui se réduit à

$$R' = \mathcal{F}(2, 0),$$

attendu que le terme $\mathcal{F}(0, 2)$ est nul d'après la nature de la fonction $\mathcal{F}(x, y)$. L'équation

$$R' = R + 4R_1$$

est donc vérifiée.

Pour $m = 3$, on a $m = d\delta$ par $d = 1$, $\delta = 3$ et par $d = 3$, $\delta = 1$; d'où

$$R = \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(6, 0).$$

L'équation

$$m = d_1\delta_1 + 2^{\alpha_2} d_2\delta_2$$

a lieu alors en faisant

$$d_1 = 1, \quad \delta_1 = 1, \quad 2^{\alpha_2} d_2 = 2, \quad \delta_2 = 1;$$

par conséquent

$$R_1 = \mathcal{F}(2, 4).$$

Quant à l'équation

$$2m = d'\delta' + d''\delta'',$$

elle comporte huit systèmes de solutions compris dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 5, \\
d' = 1, & \delta' = 1, & d'' = 5, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 1, & \delta' = 3, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 3, \\
d' = 3, & \delta' = 1, & d'' = 3, & \delta'' = 1, \\
d' = 1, & \delta' = 5, & d'' = 1, & \delta'' = 1, \\
d' = 5, & \delta' = 1, & d'' = 1, & \delta'' = 1.
\end{array}$$

La somme

$$R'$$

est donc composée de seize termes, savoir :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}(2, -4) + \mathcal{F}(0, 6) + \mathcal{F}(6, 0) + \mathcal{F}(-4, 2) \\
&+ \mathcal{F}(2, 0) + \mathcal{F}(0, 6) - \mathcal{F}(4, 2) - \mathcal{F}(-2, 4) \\
&+ \mathcal{F}(4, -2) + \mathcal{F}(2, 4) - \mathcal{F}(6, 0) - \mathcal{F}(0, 2) \\
&+ \mathcal{F}(2, 4) + \mathcal{F}(0, 6) + \mathcal{F}(6, 0) + \mathcal{F}(4, 2).
\end{aligned}$$

Quatre termes sont nuls à cause de l'équation de condition

$$\mathfrak{F}(0, y) = 0.$$

Quatre autres

$$\mathfrak{F}(-4, 2), \quad -\mathfrak{F}(4, 2), \quad \mathfrak{F}(4, -2), \quad \mathfrak{F}(4, 2)$$

se détruisent entre eux, attendu que l'on doit avoir

$$\mathfrak{F}(-4, 2) = -\mathfrak{F}(4, 2), \quad \mathfrak{F}(4, -2) = \mathfrak{F}(4, 2).$$

Deux autres termes, le troisième et le onzième, se détruisent identiquement. Restent six termes dont deux forment la somme

$$\mathfrak{F}(2, 0) + \mathfrak{F}(6, 0),$$

c'est-à-dire la valeur de R. Les quatre autres

$$\mathfrak{F}(2, -4), \quad -\mathfrak{F}(-2, 4), \quad \mathfrak{F}(2, 4), \quad \mathfrak{F}(2, 4)$$

ont pour valeur commune $\mathfrak{F}(2, 4)$, puisque l'on doit avoir

$$\mathfrak{F}(2, -4) = \mathfrak{F}(2, 4), \quad \mathfrak{F}(-2, 4) = -\mathfrak{F}(2, 4).$$

Ils donnent donc pour total

$$4\mathfrak{F}(2, 4),$$

c'est-à-dire $4R_1$. Ainsi on a cette fois encore

$$R' = R + 4R_1.$$

5. On remplira évidemment les conditions imposées à la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ en posant

$$\mathfrak{F}(x, y) = x.$$

Notre formule donne donc

$$\sum (-1)^{\frac{d''-1}{2}} d' = \sum d + 4 \sum (-1)^{\frac{\delta_2 - 1}{2}} d_1.$$

Pour former la somme placée au premier membre, il faut la considérer comme une somme triple, et se rappeler nos équations du n° **1** :

$$2m = m' + m'', \quad m' = d'\delta', \quad m'' = d''\delta'',$$

puis désigner, d'après une notation qui nous est habituelle, par

$$\rho(m'')$$

la somme des valeurs de

$$(-1)^{\frac{d''-1}{2}}$$

pour les diviseurs d'' de m'', et par

$$\zeta_1(m')$$

la somme des diviseurs d' de m'. Le premier membre pourra s'écrire alors

$$\sum \zeta_1(m')\rho(m''),$$

le signe sommatoire portant maintenant sur tous les groupes m', m''. On opérera d'une manière semblable pour le second membre, en se rappelant nos équations du n° **2** :

$$m = m_1 + 2^{\alpha_2} m_2, \quad m_1 = d_1\delta_1, \quad m_2 = d_2\delta_2;$$

et l'on arrivera à la formule

$$\sum \zeta_1(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) + 4\sum \zeta_1(m_1)\rho(m_2).$$

Je ne pense pas qu'il soit nécessaire de développer ici d'autres exemples et je me borne à indiquer celui de

$$\mathcal{F}(x, y) = \sin(xt)\cos(yz),$$

t et z étant des constantes arbitraires.