JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 155-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__155_0>

SUR LA FORME

$x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

---

1. La détermination du nombre des représentations d'un entier donné n ou $2^\alpha m$ (m impair, $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ldots$) par la forme à six variables

$$x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2$$

exige aussi l'emploi de la fonction numérique

$$\rho_2(m),$$

c'est-à-dire de la somme

$$\sum (-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2,$$

relative aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m = d\delta$. Parcourons graduellement les divers cas qui peuvent se présenter au sujet du nombre demandé

$$\mathrm{N}(2^\alpha m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2),$$

et nous verrons qu'il n'y en a qu'un seul où la fonction $\rho_2(m)$ ne suffise pas sans l'adjonction d'autres fonctions numériques auxiliaires.

2. Le cas le plus simple est celui d'un entier impairement pair $2m$. On a

$$\mathrm{N}(2m = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2) = 16\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{N}(2 = x^2+y^2+z^2+2t^2+2u^2+4v^2) = 16,$$

résultat confirmé par les identités

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$2 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

En y effectuant les permutations convenables, la première de ces identités fournit douze représentations de l'entier 2; la seconde en fournit quatre. Or

$$12 + 4 = 16.$$

Pour vérifier l'exactitude de l'équation

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 128,$$

que notre formule donne ensuite, on s'appuiera de la même manière sur les identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,$$
$$6 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

Eu égard aux permutations qu'elles comportent, la première et la seconde de ces identités fournissent chacune vingt-quatre représentations de l'entier 6 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2;$$

la troisième en fournit quarante-huit, et les deux dernières respectivement vingt-quatre et huit. Or

$$24 + 24 + 48 + 24 + 8 = 128.$$

3. Pour un entier pairement pair, c'est-à-dire pour le cas de

$$\alpha > 1,$$

la formule est

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\left[4^\alpha - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 60.$$

Ce résultat est confirmé par les identités

$$\begin{aligned}
4 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
4 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2,
\end{aligned}$$

dont les deux premières comportent des permutations dont on doit tenir compte.

Notre formule donne encore

$$N(8 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 252,$$

puis

$$N(12 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 544;$$

mais je ne veux pas trop insister sur ces calculs.

4. Le cas de m impair se subdivise en deux autres, suivant que l'on a

$$m = 4g + 3$$

ou

$$m = 4g + 1.$$

Quand

$$m = 4g + 3,$$

on prouve aisément que

$$N(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$N(3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 32.$$

C'est ce que confirment les identités

$$3 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2$$

et

$$3 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités fournit immédiatement huit représentations de l'entier 3. La seconde, qui comporte des permutations, en fournit vingt-quatre. Or

$$8 + 24 = 32.$$

La formule

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m)$$

ne devient inexacte pour un entier m de la forme

$$4g + 1$$

que quand cet entier est décomposable en une somme de deux carrés. Alors il faut poser autant de fois qu'on le peut l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'entier i est supposé positif, tandis que l'entier s est indifféremment positif, nul ou négatif, compter le nombre

$$\rho(m)$$

des décompositions de m ainsi obtenues, enfin calculer la somme

$$\sum i^2$$

relative à leur ensemble. Cela fait, on aura

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m) + 4\sum i^2 - 2m\rho(m).$$

Les deux derniers termes disparaissent d'eux-mêmes quand l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible, et l'on retombe alors sur la formule donnée plus haut.

Mais pour

$$m = 1,$$

par exemple, il faut avoir égard à l'équation

$$1 = 1^2 + 4.0^2,$$

en vertu de laquelle

$$\rho(m) = 1$$

et

$$\sum i^2 = 1.$$

Comme d'un autre côté

$$\rho_2(1) = 1,$$

on devra avoir

$$N(1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 6.$$

C'est ce que confirme l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on peut faire occuper à

$$(\pm 1)^2$$

trois places distinctes.

Soit encore

$$m = 5.$$

On aura les deux décompositions

$$5 = 1^2 + 4.1^2$$

et

$$5 = 1^2 + 4(-1)^2,$$

desquelles on conclura, pour cette valeur de m,

$$\rho(m) = 2$$

et

$$\sum i^2 = 2.$$

D'ailleurs

$$\rho_2(5) = 26.$$

Notre formule donnera donc

$$N(5 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2 + 2u^2 + 4v^2) = 92.$$

Les identités à employer pour vérifier ce résultat sont

$$5 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 2.0^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2(\pm 1)^2 + 2(\pm 1)^2 + 4.0^2,$$
$$5 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 2.0^2 + 2.0^2 + 4(\pm 1)^2.$$

En ayant égard aux permutations qu'elles comportent, on tire de la première de ces identités vingt-quatre représentations de l'entier 5, trente-deux de la seconde, vingt-quatre de la troisième, huit de la quatrième. Or

$$24 + 32 + 24 + 12 = 92.$$

Je ne pense pas qu'on désire d'autres exemples.