JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur la forme $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 10 (1865), p. 151-154.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1865_2_10__151_0>

SUR LA FORME
$x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2$;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. On demande une expression simple du nombre

$$N(n=x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2)$$

des représentations d'un entier donné n par la forme à six variables

$$x^2+y^2+z^2+t^2+4u^2+4v^2.$$

Pour répondre à cette question, nous poserons

$$n=2^\alpha m,$$

m étant un entier impair et l'exposant α pouvant se réduire à zéro, puis nous introduirons, comme dans l'article précédent, la fonction

$$\rho_2(m),$$

ou

$$\sum(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}d^2,$$

le signe sommatoire étant relatif aux diviseurs conjugués d, δ de l'entier $m=d\delta$.

2. La fonction

$$\rho_2(m)$$

suffira toujours s'il s'agit d'un entier pair, c'est-à-dire si l'on suppose

$$\alpha>0.$$

Considérons d'abord un entier impairement pair $2m$. La formule cherchée sera

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 24\rho_2(m).$$

Par exemple,

$$N(2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 24,$$

résultat facile à vérifier au moyen de l'identité

$$2 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

en y effectuant les permutations convenables. Les deux identités

$$6 = (\pm 2)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2$$

et

$$6 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2$$

serviront de même à prouver que l'on a

$$N(6 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 192,$$

comme l'indique notre formule.

Qu'il s'agisse maintenant d'un entier pairement pair, en sorte que l'on ait

$$\alpha > 1.$$

La formule sera alors

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\left[2^{2\alpha-1} - (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\rho_2(m).$$

On a, par exemple,

$$N(4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 28,$$

résultat confirmé par les trois identités

$$4 = (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$
$$4 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2.$$

La première de ces identités fournit effectivement seize représentations de l'entier 4 par la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2.$$

La seconde en fournit huit et la troisième quatre, lorsqu'on a soin d'y opérer les permutations convenables. Or

$$16 + 8 + 4 = 28.$$

On vérifiera de même l'exactitude de l'équation

$$\mathrm{N}(8 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 124,$$

au moyen des identités

$$\begin{aligned}
8 &= 0^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,\\
8 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
8 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
8 &= (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,
\end{aligned}$$

dont les trois dernières comportent des permutations.

Pour

$$\mathrm{N}(12 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v) = 288,$$

les identités à employer seraient

$$\begin{aligned}
12 &= (\pm 3)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
12 &= (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,\\
12 &= (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4.0^2,\\
12 &= (\pm 2)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2,\\
12 &= (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + (\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2 + 4(\pm 1)^2;
\end{aligned}$$

mais en voilà assez sur ce sujet.

3. Passons au cas d'un entier impair m, et d'abord admettons que l'on ait

$$m = 4g + 3.$$

La fonction $\rho_2(m)$ suffira encore, et il viendra

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{N}(3 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 32,$$

résultat exact, comme il est aisé de s'en assurer.

Quand $m = 4g + 1$, on prouve facilement que la valeur demandée de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

vaut quatre fois celle de

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2 + 4u^2 + 4v^2)$$

que nous avons donnée dans le cahier de mars. La formule

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m)$$

ne reste donc exacte alors qu'autant que m n'est susceptible d'aucune décomposition en une somme de deux carrés. Mais en général il faudra tenir compte du nombre $\rho(m)$ des solutions de l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

où l'on prendra comme d'ordinaire i positif, s positif, nul ou négatif. On devra aussi calculer la somme

$$\sum i^2.$$

Cela fait, on aura

$$\mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 4\rho_2(m) + 8\sum i^2 - 4m\rho(m).$$

Ainsi, par exemple,

$$\mathrm{N}(1 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 4u^2 + 4v^2) = 8,$$

résultat exact, comme le prouve l'identité

$$1 = (\pm 1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 4.0^2 + 4.0^2,$$

où l'on peut faire occuper à $(\pm 1)^2$ quatre places différentes. Cet exemple suffira, je crois.